

Θέμα 2°

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$ και το σημείο $M(2,1)$

A) Να αποδείξετε ότι εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(2,-1)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$

B) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο $M(2,1)$

Γ) Αν A, B τα σημεία επαφής των παραπάνω εφαπτομένων με τον κύκλο, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου MAB

A) $A = -4, B = 2, \Gamma = 3$

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16 + 4 - 12 = 8 > 0$ οπότε παριστάνει κύκλο

με κέντρο $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}) \rightarrow K(2, -1)$

και $\rho = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

B) Από το $M(2,1)$ διέρχονται οι ευθείες (ε): $y - 1 = 2(x - 2)$
και η (ς): $x = 2$

Ελέγχω αν η (ς) εφαπτεται τω C

$d(K, \varsigma) = 0$ αφού $K \in \varsigma$ αφού η (ς) δεν εφαπτεται τω C.

Βρίσκω τώρα την 2 ώστε η (ε): $2x - y + 1 - 2\lambda = 0$
να εφαπτεται τω C.

Πρέπει και αρκεί $d(K, \epsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|2\lambda + 1 + 1 - 2\lambda|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \sqrt{2}$

$2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2^2 + 1} \Leftrightarrow 4 = 2 \cdot (2^2 + 1) \Leftrightarrow 2 = 2^2 + 1 \Leftrightarrow$

$2^2 = 1 \Leftrightarrow 2 = \pm 1$

για $2 = 1 \rightarrow \epsilon_1: x - y - 1 = 0$

για $2 = -1 \rightarrow \epsilon_2: -x - y + 3 = 0$

Θέμα 5ο

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο O θεωρούμε κύκλο (C) και ευθεία $(ε)$ με εξισώσεις $x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0$ (1) και $4x + 3y - 10 = 0$ (2) αντίστοιχα.

α) i. Να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα R του κύκλου (C) .

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση του κέντρου K από την ευθεία $(ε)$ και να αποδείξετε ότι η ευθεία $(ε)$ τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία.

i. Να προσδιορίσετε τα σημεία A και B στα οποία η ευθεία $(ε)$ τέμνει τον κύκλο (C) .

β) Αν είναι $A(1,2)$ και $B(4,-2)$, τότε:

i. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$.

ii. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο AB διέρχεται από το σημείο O .

$$i) K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}) \rightarrow K(\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$$

$$r = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2} = \frac{\sqrt{81 + 9 - 40}}{2} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$ii) d(K, \epsilon) = \frac{|18 + \frac{9}{2} - 10|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{\frac{25}{2}}{5} = \frac{5}{2} < \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Αφού $d(K, \epsilon) < r \rightarrow$ η $(ε)$ τέμνει τον C σε δύο σημεία

$$iii) \text{ Οι συν/τες των κοινών σημείων είναι οι λύσεις του συστήματος } \begin{cases} 4x + 3y - 10 = 0 \Rightarrow 4x = 10 - 3y \Rightarrow x = \frac{10 - 3y}{4} \\ x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\left(\frac{10 - 3y}{4}\right)^2 + y^2 - 9 \cdot \frac{10 - 3y}{4} - 3y + 10 = 0$$

$$\frac{100 - 60y + 9y^2}{16} + y^2 - 9 \cdot \frac{10 - 3y}{4} - 3y + 10 = 0$$

$$100 - 60y + 9y^2 + 16y^2 - 360 + 108y - 48y + 160 = 0$$

$$25y^2 - 100 = 0$$

$$y^2 = 4$$

$$y = 2 \quad \text{ή} \quad y = -2$$

$$x = 1 \quad \quad x = 4$$

$$A(1, 2) \quad B(4, -2)$$

$$A(1, 2) \quad B(4, -2)$$

$$\vec{OA} = (1, 2)$$

$$\vec{OB} = (4, -2)$$

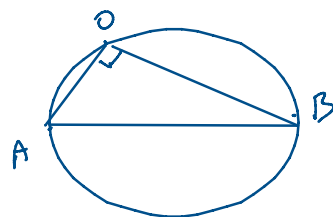
$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (1, 2) \cdot (4, -2) = 4 - 4 = 0$$

$$\vec{OA} \perp \vec{OB}$$

$$\hat{AOB} = 90^\circ$$

οπότε το O

ανήκει στον κύκλο
με διαμέτρο AB



Θέμα 4ο

Δίνεται η εξίσωση $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2(x+3)$: (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2, -2)$ και ακτίνα $\rho = 3$.

β) Να δείξετε ότι η αρχή O των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία A και B ώστε η αρχή των αξόνων να είναι το μέσο της χορδής AB.

δ) Αν η ευθεία (ε) του προηγούμενου ερωτήματος έχει εξίσωση $y = x$ τότε να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου KAB.

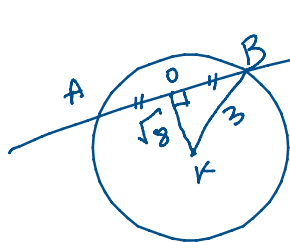
$$a) x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 2x + 6$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$$

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16 + 16 + 4 = 36 > 0 \quad \text{οπότε παριστάνει κύκλο}$$

$$K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}) = K(2, -2) \quad \rho = \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$b) (KO) = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} < 3 \quad \text{αφού } (KO) < \rho \Rightarrow \text{O εσωτερικό του κύκλου}$$



$$KO \text{ απόσταση} \Rightarrow KO \perp AB \Rightarrow \lambda_{KO} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow$$

$$\frac{-2-0}{2-0} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow \lambda_{AB} = 1$$

$$AB: y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x$$

$$(KAB) = \frac{AB \cdot KO}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{8}}{2} = \sqrt{8} \text{ τ.μ.}$$

$$(k_{AB}) = \frac{AB \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{8}}{2} = \sqrt{8} \quad \tau. \nu.$$

$$\text{Tr. O. } \sigma_{\tau 0} \quad \Delta_{\tau 0 B} = OB^2 = 9 - 8 = 1$$

$$OB = 1$$

$$AB = 2$$