

Μάθημα 54ο - Εξίσωση εφαπτομένης παραβολής

η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

Για παράδειγμα, η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 4x$ στο σημείο της $M_1(1, 2)$ έχει εξίσωση $y \cdot 2 = 2(x + 1)$, η οποία γράφεται $y = x + 1$.

$M_1(1, 2)$

- Αν μια παραβολή έχει εξίσωση

$$x^2 = 2py,$$

τότε η εφαπτομένη της στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$xx_1 = p(y + y_1).$$

Θέμα 1ο

Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής $y^2 = 3x$ στα σημεία $(0, 0)$ και $(12, 6)$.

και $(12, 6)$.

$$(E) : y \cdot y_1 = p \cdot (x + x_1)$$

$$\begin{aligned} 2p &= 3 \\ p &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$0(0,0) \rightarrow E_1 : y \cdot 0 = \frac{3}{2}(x + 0) \Rightarrow \boxed{x=0} \rightarrow \bullet \text{ } y \text{ } y'$$

$$(12, 6) \rightarrow : 6y = \frac{3}{2}(x + 12) \Rightarrow 6y = \frac{3}{2}x + 18$$

Θέμα 2ο

A) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y = 4x^2$ στο σημείο της με τεταγμένη 1

B) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y = 4x^2$ στο σημείο της με τεταγμένη αρνητική και τεταγμένη 1

$$A) M(1, y_1) \in C \Rightarrow y_1 = 4 \cdot 1^2 = 4$$

$$M(1, 4) \quad E_M : \boxed{x \cdot 1 = \frac{1}{8}(y + 4)}$$

$$\begin{aligned} y &= 4x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}y \\ 2p &= \frac{1}{4} \Rightarrow p = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B) M(x_1, 1) \in C \Rightarrow 1 &= 4x_1^2 \\ x_1^2 &= \frac{1}{4} \quad x_1 < 0 \Leftrightarrow \\ \boxed{x_1 &= -\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$E_M : \boxed{-\frac{1}{2}x = \frac{1}{8}(y + 1)}$$

Θέμα 3ο

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και η ευθεία (ε): $y = x - 1$.

α) Να δείξετε ότι η (ε) περνά από την εστία της παραβολής.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία A, B της (ε) και της παραβολής.

γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία A, B είναι κάθετες.

α) $y^2 = 4x$, $p = 2$, $E(1, 0)$, $\delta: x = -1$

$E \in (ε) \Leftrightarrow 0 = 1 - 1$ που ισχύει

β) $y^2 = 4x$ $(x-1)^2 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 1 = 0$
 $y = x - 1$
 $\Delta = 32$

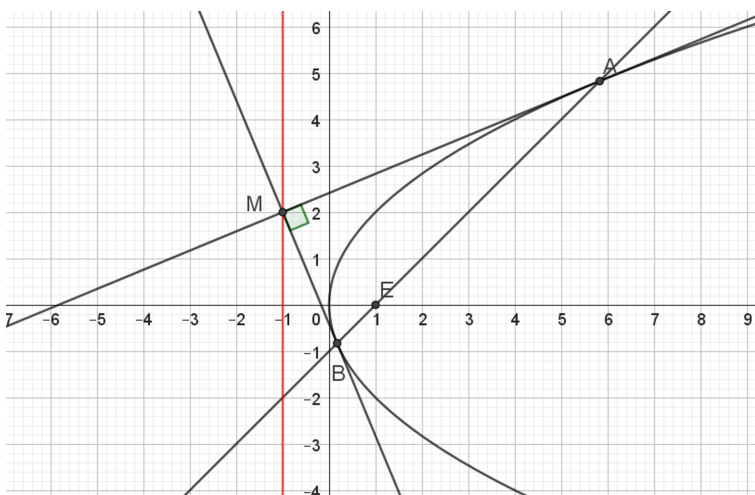
$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} 3 + 2\sqrt{2} \\ 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

κοινά $A(3 + 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$
σημεία $B(3 - 2\sqrt{2}, 2 - 2\sqrt{2})$

γ) $\epsilon_A: y(2 + 2\sqrt{2}) = 2(x + 3 + 2\sqrt{2}) \rightarrow \lambda_{\epsilon_A} = \frac{2}{2 + 2\sqrt{2}} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$

$\epsilon_B: y(2 - 2\sqrt{2}) = 2(x + 3 - 2\sqrt{2}) \rightarrow \lambda_{\epsilon_B} = \frac{2}{2 - 2\sqrt{2}} = \frac{1}{1 - \sqrt{2}}$

$$\lambda_{\epsilon_A} \cdot \lambda_{\epsilon_B} = \frac{1}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \frac{1}{1 - 2} = -1 \Rightarrow \epsilon_A \perp \epsilon_B$$

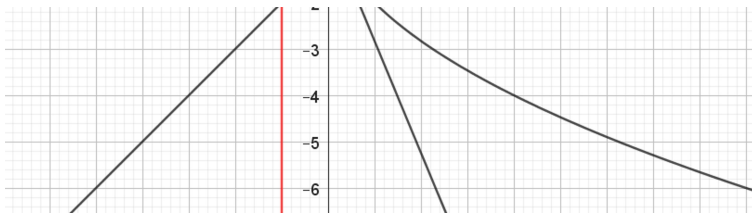


Επίσης, το σημείο τέμνη Μ των ϵ_A, ϵ_B είναι πάνω στη διευθετούσα.

Σχόλιο

Τα παραπάνω ισχύουν για κάθε παραβολή και ευθεία που διέρχεται από την εστία της.

Οι εφαπτόμενες στα σημεία τέμνη μιας παραβολής με ευθεία που



Οι εφαπτόμενες στα σημεία τμήν
μιας παραβολής με εστία ω
διέρχεται από την εστία ω ,
τέμνονται κάθετα σε σημείο ω
διευθετούσα ω

Θέμα 4ο

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής $y = \frac{1}{4}x^2$ στα σημεία $A(4,4)$ και

$B(-1, \frac{1}{4})$ τέμνονται κάθετα και πάνω στη διευθετούσα της.

$$y = \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow x^2 = 4y, \quad p=2, \quad E(0,1), \quad \delta: y=-1$$

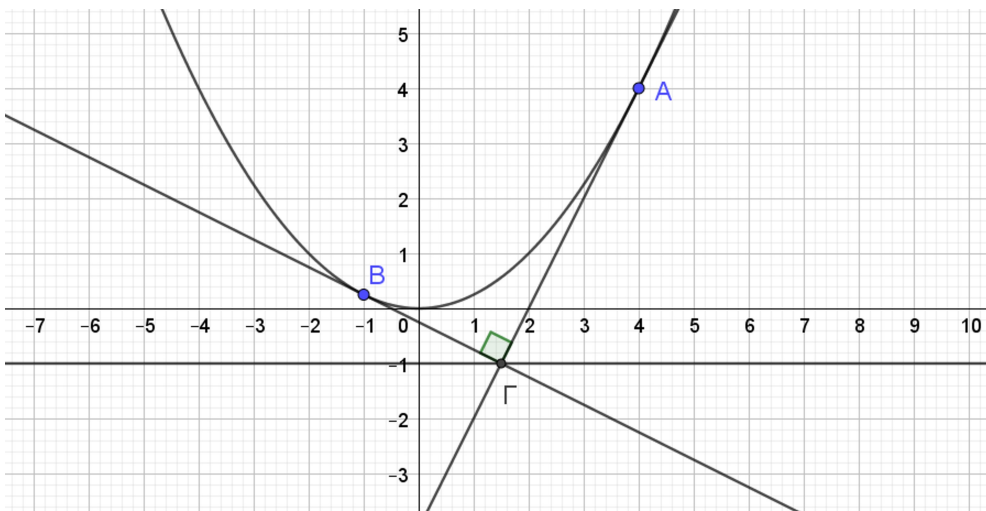
$$E_A: x \cdot 4 = 2(y+4) \Rightarrow 2x = y+4 \rightarrow \lambda_{E_A} = 2$$

$$E_B: x(-1) = 2(y + \frac{1}{4}) \Rightarrow -x = 2y + \frac{1}{2} \rightarrow \lambda_{E_B} = -\frac{1}{2}$$

$$\lambda_{E_A} \cdot \lambda_{E_B} = -1 \rightarrow E_A \perp E_B$$

$$\begin{cases} 2x = y+4 \\ x = -2y - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 2(-2y - \frac{1}{2}) = y+4 \Rightarrow -4y - 1 = y+4 \Rightarrow -5y = 5 \Rightarrow \boxed{y = -1} \text{ και } \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

Σημείο τμήν $(\frac{3}{2}, -1) \in \delta$



Έκπαιση

Από κάθε σημείο
ω, διευθετούσα
φθάνει κοθός
εφαπτόμενες στην
παραβολή και
αρκιστοφά ον γ
παραβολή εκκ κοθός
εφαπτόμενες, ωρίς
τέμνονται πάνω στη
διευθετούσα ω .