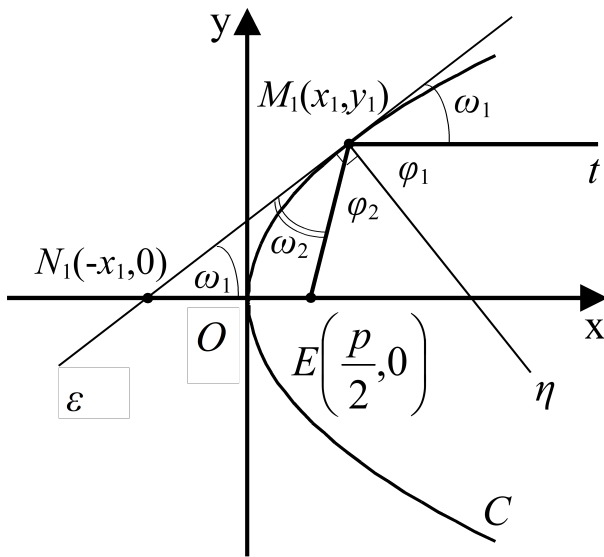


Ανακλαστική Ιδιότητα Παραβολής

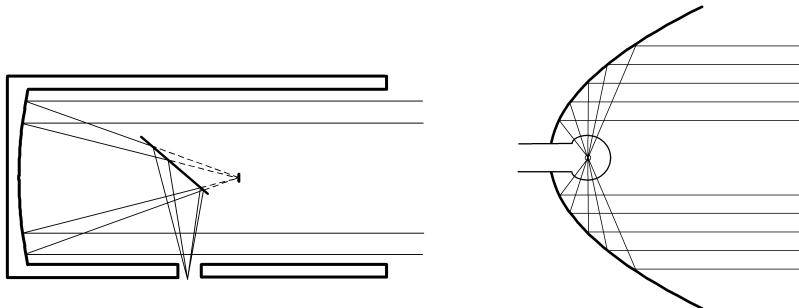
Μια σπουδαία ιδιότητα της παραβολής, γνωστή ως *ανακλαστική ιδιότητα* είναι η εξής:

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο επαφής M_1 διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία M_1E και η ημιευθεία M_1t , που είναι ομόρροπη της OE , όπου E είναι η εστία της παραβολής.



Η χρήση της παραπάνω ιδιότητας γίνεται στα παραβολικά τηλεσκόπια, στα ραντάρ, στα φανάρια των αυτοκινήτων, στους προβολείς των οδοντιάτρων κτλ. Συγκεκριμένα:

- Όλες οι ακτίνες φωτός που προσπίπτουν στο παραβολικό κάτοπτρο παράλληλα προς τον άξονά του, ανακλώμενες, συγκεντρώνονται στην εστία.
- Στα φανάρια των αυτοκινήτων που έχουν παραβολικά κάτοπτρα οι λαμπτήρες βρίσκονται στην εστία τους. Έτσι, οι φωτεινές ακτίνες, ανακλώμενες στο κάτοπτρο, εξέρχονται παράλληλα προς τον άξονά του.



ΣΧΟΛΙΟ

Σύμφωνα με την προηγούμενη απόδειξη, για να φέρουμε την εφαπτομένη μιας παραβολής σε ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$, αρκεί να ενώσουμε το σημείο $N_1(-x_1, 0)$ με το $M_1(x_1, y_1)$.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 12x$ με εστία E και η εφαπτομένη ευθεία

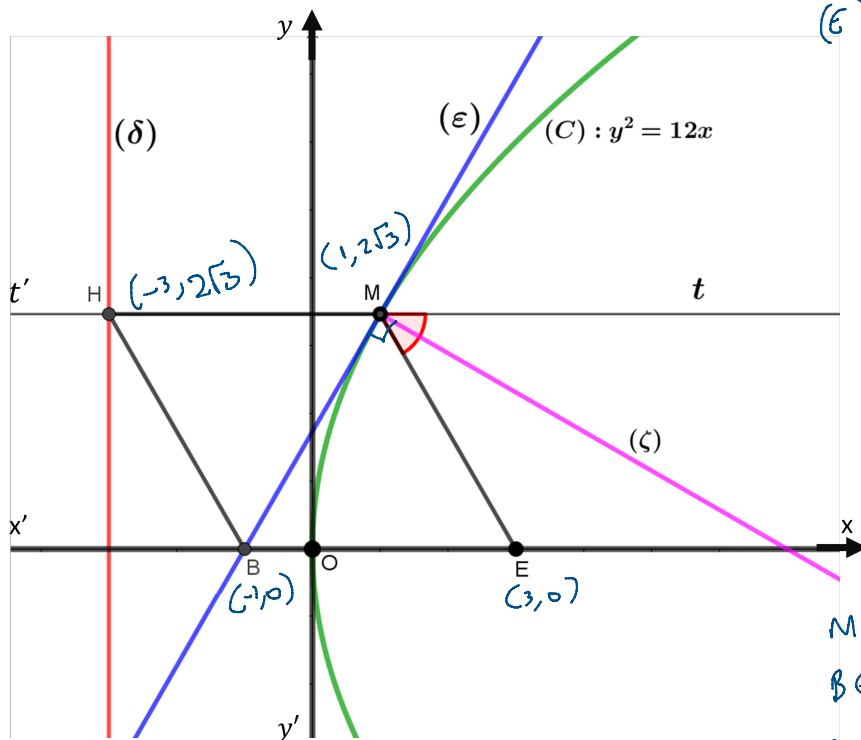
(ε) της (C) στο σημείο της $M(1, 2\sqrt{3})$, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B . Από το σημείο M φέρνουμε ευθεία $t't$ παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, η οποία τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο H .

α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B, H, E .

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $MEBH$ είναι ρόμβος.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) η οποία διχοτομεί την γωνία $\widehat{EMt}$.



$$y^2 = 12x$$

$$p = 6$$

$$E(3, 0)$$

$$\delta: x = -3$$

$$(ε): y \cdot y_1 = p(x + x_1)$$

$$y \cdot 2\sqrt{3} = 6(x + 1)$$

$$y = \frac{6}{2\sqrt{3}}(x + 1)$$

$$y = \sqrt{3}(x + 1)$$

$$\boxed{y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}}$$

$$\text{για } y = 0 \text{ έχουμε}$$

$$0 = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

$$x = -1$$

$$B(-1, 0)$$

$$MH = 4$$

$$BE = 4$$

$$ME = d(M, \delta) = 4$$

$$BH = \sqrt{(-3+1)^2 + (2\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{Αφού } MH = BE = ME = BH \rightarrow \text{MEBH ρόμβος}$$

Από ομοκατασκευαστικότητα

$$\gamma \perp \epsilon \Rightarrow \gamma \cdot 2\epsilon = -1 \Rightarrow \gamma \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\delta: y - 2\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$$

3. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων A και B της παραβολής $y = \frac{1}{4}x^2$, που

έχουν την ίδια τεταγμένη και ισχύει $\widehat{AOB} = 90^\circ$.

$$x^2 = 4y$$

$$p = 2, E(0, 1), \delta: y = -1$$

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_1)$$

$$\widehat{AOB} = 90^\circ \Rightarrow \vec{OA} \perp \vec{OB} \Rightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \Rightarrow (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{x_1 x_2 + y_1^2 = 0} \quad (1)$$

$$A \in C \Rightarrow x_1^2 = 4y_1 \quad (2)$$

$$B \in C \Rightarrow x_2^2 = 4y_1 \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ή } \boxed{x_1 = -x_2} \quad (4)$$

$$\text{από } A \neq B$$

$$x_1 x_2 + y_1^2 = 0 \Rightarrow x_1^2 = y_1^2 \Rightarrow x_1 = y_1 \text{ ή } x_1 = -y_1$$

$$C_1, (4) \rightarrow x_1 \cdot (-x_1) + y_1^2 = 0 \Rightarrow x_1^2 = y_1^2 \Rightarrow x_1 = y_1 \quad \vee \quad x_1 = -y_1$$

$$\text{Αν } x_1 = y_1 \xrightarrow{(2)} y_1^2 = 4y_1 \Rightarrow y_1 = 0 \quad \vee \quad \boxed{y_1 = 4}$$

αλλοτ.
 $A \neq O$

$A(4,4), B(-4,4)$

$$\text{Αν } x_1 = -y_1 \xrightarrow{(2)} x_1^2 = -4x_1 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad x_1 = -4$$

αλλοτ.
 $A \neq O$

$A(-4,4), B(4,4)$

1. Να αποδειχτεί ότι ο κύκλος $(x-3)^2 + y^2 = 8$ εφάπτεται της παραβολής $y^2 = 4x$.
(Δηλαδή, έχουν τις ίδιες εφαπτόμενες στα κοινά σημεία τους).

κύκλος C_1 , κ(3,0), ρ=2√2
παραβολή C_2 , ρ=2, F(1,0), δ: x=-1

Εύρεση κοινών σημείων : Οι συν/νές τους είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 8 & C_1 \\ y^2 = 4x & C_2 \end{cases} \quad C_1 \xrightarrow{(2)} (x-3)^2 + 4x = 8$$

$$x^2 - 6x + 9 + 4x - 8 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

για $x=1$
 $y^2 = 4$
 $y = \pm 2$

$A(1,2), B(1,-2)$

Η εφαπτομένη της παραβολής στο A: $y \cdot y_A = p \cdot (x + x_A) \Rightarrow 2y = 2(x+1) \Rightarrow y = x+1$
Η εφαπτομένη της παραβολής στο B: $y \cdot y_B = p \cdot (x + x_B) \Rightarrow -2y = 2(x+1) \Rightarrow y = -x-1$

Α.ν.Σ.ο. ϵ_A, ϵ_B εφαπτονται του $C_1 \Leftrightarrow d(K, \epsilon_A) = d(K, \epsilon_B) = \rho$

$$\text{Είναι } d(K, \epsilon_A) = \frac{|3 - 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = \rho$$

$$d(K, \epsilon_B) = \frac{|3 + 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = \rho$$

