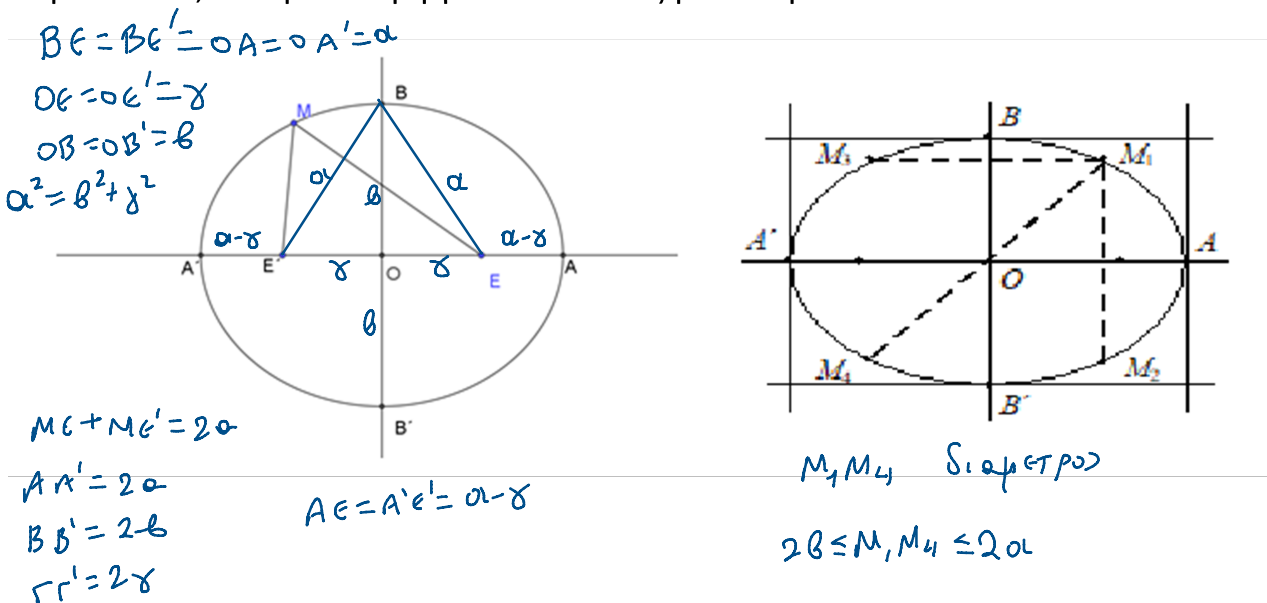


Ορισμός Έλλειψης

Έστω E' και E δύο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται **έλλειψη** με **εστίες** τα σημεία E' και E ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα E' και E είναι **σταθερό** και μεγαλύτερο του $E'E$. Το σταθερό αυτό άθροισμα το συμβολίζουμε, συνήθως, με 2α και την απόσταση των εστιών E' και E με 2γ . Η απόσταση $E'E$ ονομάζεται **εστιακή απόσταση** της έλλειψης. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό ένα σημείο M του επιπέδου είναι σημείο της έλλειψης, αν και μόνο αν $(ME') + (ME) = 2\alpha$. Ισχύει $(E'E) < (ME') + (ME)$, δηλαδή $2\gamma < 2\alpha$ οπότε $\gamma < \alpha$. Αν $\gamma = 0$, τότε τα σημεία E', E συμπίπτουν, και η έλλειψη γίνεται κύκλος με κέντρο το E και ακτίνα α .



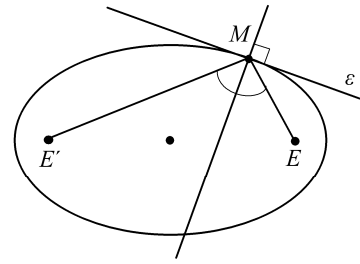
Ιδιότητες Έλλειψης

1. Η ευθεία που ενώνει τις εστίες E', E της έλλειψης και η μεσοκάθετος του $E'E$ είναι άξονες συμμετρίας της έλλειψης, ενώ το μέσο O του $E'E$ είναι κέντρο συμμετρίας της. Το σημείο O λέγεται **κέντρο** της έλλειψης.
2. Τα ευθύγραμμα τμήματα $A'A$ και $B'B$, τα οποία έχουν μήκη $(A'A) = 2\alpha$ και $(B'B) = 2\beta$, λέγονται **μεγάλος άξονας** και **μικρός άξονας** αντιστοίχως. Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο οποιαδήποτε συμμετρικά ως προς O σημεία M_1 και M_4 της έλλειψης λέγεται **διάμετρος** της έλλειψης. Αποδεικνύεται ότι $2\beta \leq (M_1M_4) \leq 2\alpha$, δηλαδή ότι κάθε διάμετρος της έλλειψης είναι μεγαλύτερη ή ίση από το μικρό άξονα και μικρότερη ή ίση από το μεγάλο άξονα της έλλειψης.
3. Η έλλειψη περιέχεται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι κάθετες στους άξονες συμμετρίας της στα άκρα των αξόνων της, δηλαδή στα σημεία A, A', B, B' .
4. Είναι $\alpha > \beta, \alpha > \gamma$ και ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Δηλαδή το τρίγωνο OBE είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα $BE = \alpha$. Αν επιπλέον $\beta = \gamma$ είναι και ισοσκελές.
5. Είναι $OA = OA' = BE = BE' = OE = OE' = \gamma, AE = AE' = \alpha - \gamma$.

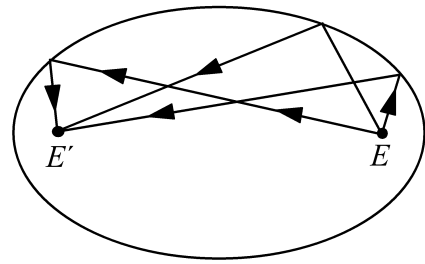
5. Είναι $OA = OA = BE = BE = BE = BE = \alpha$, $OB = OB = \beta$, $OE = OE = \gamma$, $AE = AE = \alpha - \gamma$.

Ανακλαστική ιδιότητα

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής M διχοτομεί τη γωνία $E' \hat{M} E$, όπου E', E οι εστίες της έλλειψης.



Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή ένα ηχητικό κύμα ή μια φωτεινή ακτίνα που ξεκινούν από τη μία εστία μιας έλλειψης, ανακλώμενα σε αυτήν, διέρχονται από την άλλη εστία.



Εκκεντρότητα Έλλειψης

Μια παράμετρος που καθορίζει τη μορφή της έλλειψης είναι η εκκεντρότητα της έλλειψης. Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της έλλειψης και τη συμβολίζουμε με ε , το λόγο $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} < 1$. Επειδή $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, είναι $\varepsilon = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha}$, οπότε $\varepsilon^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} = 1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ και

άρα $\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. Όσο μεγαλώνει η εκκεντρότητα τόσο μικραίνει ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ και κατά συνέπεια τόσο πιο επιμήκης γίνεται η έλλειψη. Όταν το ε τείνει στο μηδέν, τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ τείνει στο 1 και επομένως η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος. Όταν, όμως, το

Ε τείνει στη μονάδα, τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ τείνει στο 0 και επομένως η έλλειψη τείνει να εκφυλιστεί σε ευθύγραμμο τμήμα.

Οι ελλείψεις που έχουν την ίδια εκκεντρότητα, άρα ίδιο λόγο $\frac{\beta}{\alpha}$, λέγονται **όμοιες**.

Εξίσωση έλλειψης με κέντρο (0,0) και εστίες στον $\chi\chi'$ η εξίσωση της έλλειψης C με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ όπου } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$ Για κάθε $M(x,y) \in C$ είναι $-\alpha \leq x \leq \alpha$, $-\beta \leq y \leq \beta$ Η εφαπτομένη της C στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$	Εξίσωση έλλειψης με κέντρο (0,0) και εστίες στον $\psi\psi'$ η εξίσωση της έλλειψης C με εστίες τα σημεία $E'(0,-\gamma)$, $E(0,\gamma)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1, \text{ όπου } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$ Για κάθε $M(x,y) \in C$ είναι $-\alpha \leq y \leq \alpha$, $-\beta \leq x \leq \beta$. Η εφαπτομένη της C στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $\frac{xx_1}{\beta^2} + \frac{yy_1}{\alpha^2} = 1$
--	---

- Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
 - Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ και μεγάλο άξονα 10
 - Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0,-5)$ και $E(0,5)$ και μεγάλο άξονα 26
 - Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-12,0)$ και $E(12,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{12}{13}$
 - Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M\left(4, \frac{9}{5}\right)$
 - Όταν έχει εστίες στον άξονα $y'y$ και διέρχεται από τα σημεία $M_1(1,1)$ και $M_2\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Λύση

- Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ και μεγάλο άξονα 10

$$\left. \begin{array}{l} E(4,0) \\ E'(-4,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{το κέντρο της έλλειψης είναι το } (0,0) \text{ και } \gamma = 4 \text{ / εστίες στον } \chi\chi'$$

$$\text{Μεγάλο άξονα } 10 \rightarrow 2\alpha = 10 \Rightarrow \alpha = 5$$

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1}$$

(ii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0, -5)$ και $E(0, 5)$ και μεγάλο άξονα 26

$$\left. \begin{array}{l} \text{εστίες } F(0, 5) \\ F'(0, -5) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{κέντρο το } (0, 0) \\ c = 5, \text{ εστίες στον } y' \end{array}$$

$$\text{μείζων άξονας} \Rightarrow 2a = 26 \Rightarrow a = 13$$

$$b = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$$

$$C: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1}$$

(iii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-12, 0)$ και $E(12, 0)$ και εκκεντρότητα $\frac{12}{13}$

$$\left. \begin{array}{l} F(12, 0) \\ F'(-12, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{κέντρο το } (0, 0), \text{ εστίες στον } x' \\ c = 12 \end{array}$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{12}{13} = \frac{12}{a} \Rightarrow a = 13, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1}$$