

1. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ και μεγάλο άξονα 10

(ii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0,-5)$ και $E(0,5)$ και μεγάλο άξονα 26

(iii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-12,0)$ και $E(12,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{12}{13}$

(iv) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ και διέρχεται από το σημείο

$$M\left(4, \frac{9}{5}\right)$$

(v) Όταν έχει εστίες στον άξονα $x'y'$ και διέρχεται από τα σημεία $M_1(1,1)$ και

$$M_2\left(2, \frac{1}{2}\right).$$

Για το $E(4,0)$ $E'(-4,0)$ $\rightarrow$ η έλλειψη έχει κέντρο το $O(0,0)$
οι εστίες είναι στα $\pm c$ και $c=4$

$$\text{Ορισμός } (ME) + (ME') = 2a \Rightarrow \sqrt{(4-4)^2 + \left(\frac{9}{5}-0\right)^2} + \sqrt{(4+4)^2 + \left(\frac{9}{5}-0\right)^2} = 2a \Rightarrow$$

$$\frac{9}{5} + \sqrt{64 + \frac{81}{25}} = \frac{9}{5} + \frac{41}{5} = \frac{50}{5} = 10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow \boxed{a=5}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \quad \text{οπότε} \quad C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(v) Όταν έχει εστίες στον άξονα $x'y'$ και διέρχεται από τα σημεία $M_1(1,1)$ και

$$M_2\left(2, \frac{1}{2}\right).$$

κέντρο $(0,0)$

$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$M_1 \in C \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{-4}{a^2} - \frac{9}{b^2} = -4 \quad (1)$$

$$M_2 \in C \Rightarrow \frac{4}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \frac{1}{4b^2} - \frac{4}{b^2} = -3 \Leftrightarrow 1 - 16 = -12b^2 \Rightarrow b^2 = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

$$\text{και } (1) \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{4}{5} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow a^2 = 5$$

$$\text{Τελικά } C: \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{\frac{5}{4}} = 1$$

2. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα των ελλείψεων:

(i) $x^2 + 4y^2 = 4$

(ii) $169x^2 + 144y^2 = 24336$

i) $x^2 + y^2 = 1$

ii) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$

$$i) \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

$$a=2, b=1, c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$$

$$E(\sqrt{3}, 0), E'(-\sqrt{3}, 0)$$

$$2a=4, 2b=2, c = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

μεγαλύνω
αξονας

μικρύνω
αξονας

$$ii) \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$$

$$a^2=169 \Rightarrow a=13$$

$$b^2=144 \Rightarrow b=12$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$E(0, 5), E'(0, -5)$$

$$2a=26, 2b=24, c = \frac{5}{13}$$

4. Αν E', E είναι οι εστίες και $B'B$ ο μικρός άξονας της έλλειψης $x^2 + 2y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EBB'E'$ είναι τετράγωνο.

$$C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

$$a^2=4 \Rightarrow a=2$$

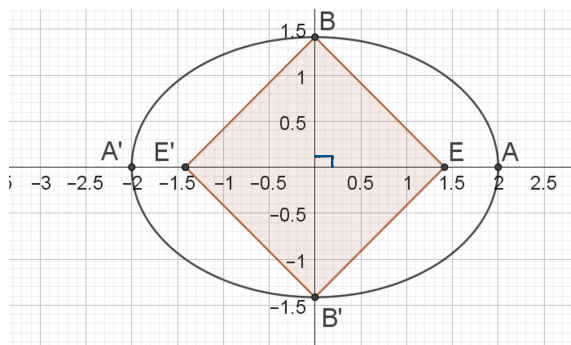
$$b^2=2 \Rightarrow b=\sqrt{2}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2}$$

$$A(2, 0), A'(-2, 0)$$

$$B(0, \sqrt{2}), B'(0, -\sqrt{2})$$

$$E(\sqrt{2}, 0), E'(-\sqrt{2}, 0)$$



Το $EBB'E'$ είναι τετράγωνο διότι
οι διαγωνισμοί του διχοτομούνται (παρ/μς)
τεμνούνται κάθετα (ρ/μς) και είναι ίσοι (ορθογώνιο)
Αν $b \neq c$ θα ήταν ρόμβος και όχι
τετράγωνο