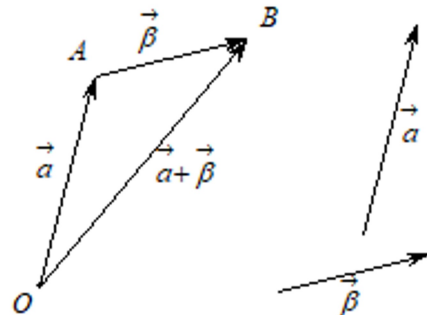


Μέτρο Αθροίσματος Διανυσμάτων

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$. Από την τριγωνική ανισότητα γνωρίζουμε όμως ότι $|(OA) - (AB)| \leq (OB) \leq (OA) + (AB)$ και επομένως για κάθε

διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $||\vec{a}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{a} + \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$



Αν αντί για $\vec{\beta}$ στην παραπάνω σχέση βάλουμε το $-\vec{\beta}$ έχουμε

$||\vec{a}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{a} - \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$ Ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{\beta}| &= |\vec{a}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{a} \nearrow \nearrow \vec{\beta} & , & & |\vec{a} - \vec{\beta}| &= |\vec{a}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{a} \nearrow \searrow \vec{\beta} \\ |\vec{a} + \vec{\beta}| &= ||\vec{a}| - |\vec{\beta}|| \Leftrightarrow \vec{a} \nearrow \searrow \vec{\beta} & , & & |\vec{a} - \vec{\beta}| &= ||\vec{a}| - |\vec{\beta}|| \Leftrightarrow \vec{a} \nearrow \nearrow \vec{\beta} \end{aligned}$$

Θέμα 7^ο Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει

$|\vec{a}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, |\vec{\gamma}| = 7$. Να δείξετε ότι $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} \neq \vec{0}$

Λύση

Έστω $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$. Τότε $\vec{a} + \vec{\beta} = -\vec{\gamma} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 7$ Άρα
 $|\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| \Rightarrow |\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| \Rightarrow |\vec{a} + \vec{\beta}| = 7$
 αφού $|\vec{a} + \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| + |\vec{\beta}| \Rightarrow |\vec{a} + \vec{\beta}| \leq 2 + 3 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{\beta}| \leq 5$

Άρα $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} \neq \vec{0}$.

Θέμα 8^ο Αν για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει $|\vec{a}| = 2|\vec{\beta}| = 4|\vec{\gamma}| = 8 \Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = 8 \\ |\vec{\beta}| = 4 \\ |\vec{\gamma}| = 2 \end{cases}$
 $|\vec{a} + \vec{\beta}| = 12$ και $|\vec{a} + \vec{\gamma}| = 6$ να δείξετε ότι $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$, $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$, $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$

Λύση

$\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$, $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\gamma} \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{\gamma}| = ||\vec{a}| - |\vec{\gamma}||$

Είναι $\begin{cases} |\vec{a} + \vec{\beta}| = 12 \\ |\vec{a}| + |\vec{\beta}| = 8 + 4 = 12 \end{cases} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}| \Rightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$

Είναι $\begin{cases} |\vec{a} + \vec{\gamma}| = 6 \\ ||\vec{a}| - |\vec{\gamma}|| = 8 - 2 = 6 \end{cases} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{\gamma}| = ||\vec{a}| - |\vec{\gamma}|| \Rightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$

$$\text{Είναι } \left. \begin{array}{l} |\vec{a} + \vec{\gamma}| = 6 \\ |\vec{a}| - |\vec{\gamma}| = 8 - 2 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{\gamma}| = |\vec{a}| - |\vec{\gamma}|$$

$$\text{Τέλος } \left. \begin{array}{l} \vec{a} \nearrow \nearrow \vec{\gamma} \\ \vec{a} \nearrow \searrow \vec{\gamma} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{a} \nearrow \searrow \vec{\gamma}$$

Ορισμός

Εστω λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$ και $\vec{a}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα.

Ονομάζουμε **γινόμενο του λ με το $\vec{a}$** και το συμβολίζουμε με $\lambda \cdot \vec{a}$ ή $\lambda \vec{a}$ το διάνυσμα που

- είναι ομόρροπο του $\vec{a}$, αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του $\vec{a}$, αν $\lambda < 0$ και
- έχει μέτρο $|\lambda| |\vec{a}|$.

Αν είναι $\lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε ως $\lambda \cdot \vec{a}$ το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.

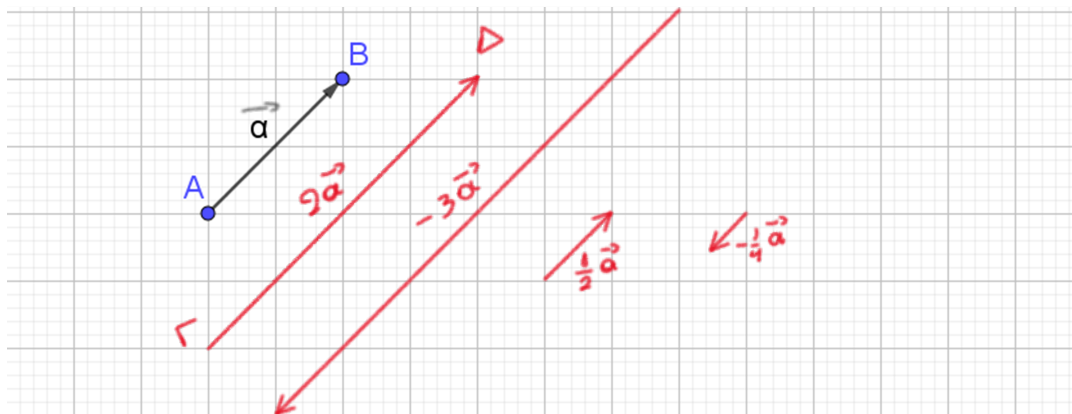
Παρατήρηση

Η πράξη έχει οριστεί ως πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα και όχι το ανάποδο, που σημαίνει ότι στο συμβολισμό της πράξης ο αριθμός προηγείται του διανύσματος.

Συνεπώς **δεν έχει νόημα να γράψουμε $\vec{a} \cdot \lambda$**

Θέμα 1ο

Αν $\vec{a}$ το παρακάτω διάνυσμα να σχεδιάσετε τα διανύσματα $2 \cdot \vec{a}$, $-3 \cdot \vec{a}$, $\frac{1}{2} \cdot \vec{a}$, $-\frac{1}{4} \cdot \vec{a}$



$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \vec{a} &= \frac{\vec{a}}{2} \\ -\frac{1}{4} \vec{a} &= -\frac{\vec{a}}{4} \end{aligned}$$

Ιδιότητες	Συνέπειες ορισμού και ιδιοτήτων
(1) $\lambda(\vec{a} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{\beta}$	(i) $\lambda\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \vec{a} = \vec{0}$
(2) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$	(ii) $(-\lambda\vec{a}) = \lambda(-\vec{a}) = -(\lambda\vec{a})$
(3) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$	(iii) $\lambda(\vec{a} - \vec{\beta}) = \lambda\vec{a} - \lambda\vec{\beta}$
	(iv) $(\lambda - \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} - \mu\vec{a}$
	(v) Αν $\lambda\vec{a} = \lambda\vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$, τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$
	(vi) Αν $\lambda\vec{a} = \mu\vec{a}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$, τότε $\lambda = \mu$.

- $\lambda \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda \vec{\alpha} - \lambda \vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha} = \vec{\beta}$
 $\lambda \vec{\alpha} = \mu \vec{\alpha} \Leftrightarrow \lambda \vec{\alpha} - \mu \vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow (\lambda - \mu)\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda - \mu = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = \mu \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha} = \vec{0}$

Θέμα 2ο Να δείξετε ότι για τυχαία σημεία A, B, Γ, Δ σημεία του επιπέδου ισχύει ότι $4\vec{A\Gamma} + 3\vec{\Delta B} + 2\vec{\Delta\Gamma} = 5\vec{\Delta\Gamma} - 3\vec{BA} - \vec{\Gamma A}$

$$\begin{aligned}
 & 4\vec{A\Gamma} + 3\vec{\Delta B} + 2\vec{\Delta\Gamma} = 5\vec{\Delta\Gamma} - 3\vec{BA} - \vec{\Gamma A} \Leftrightarrow \\
 & 4(\vec{O\Gamma} - \vec{OA}) + 3(\vec{O\Delta} - \vec{OB}) + 2(\vec{O\Gamma} - \vec{OD}) = 5(\vec{O\Gamma} - \vec{OD}) - 3(\vec{OA} - \vec{OB}) - (\vec{OA} - \vec{OG}) \Leftrightarrow \\
 & 4\vec{O\Gamma} - 4\vec{OA} + 3\vec{O\Delta} - 3\vec{OB} + 2\vec{O\Gamma} - 2\vec{OD} = 5\vec{O\Gamma} - 5\vec{OD} - 3\vec{OA} + 3\vec{OB} - \vec{OA} + \vec{OG} \Leftrightarrow \\
 & 6\vec{O\Gamma} - 4\vec{OA} + 3\vec{O\Delta} - 3\vec{OB} - 2\vec{OD} = 5\vec{O\Gamma} - 5\vec{OD} - 4\vec{OA} + 3\vec{OB} \quad \text{που ισχύει}
 \end{aligned}$$

Γραμμικός Συνδυασμός Διανυσμάτων

Ας θεωρήσουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Ανάλογα ορίζεται και ο γραμμικός συνδυασμός τριών ή περισσότερων διανυσμάτων.

Έτσι, για παράδειγμα, το διάνυσμα $\vec{v} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

Θέμα 3ο

Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τα παρακάτω διανύσματα να σχεδιάσετε τα διανύσματα

$$2 \cdot \vec{\alpha} + 3 \cdot \vec{\beta}, \quad \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} - 2 \cdot \vec{\beta}$$

