

Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(iv) Όταν έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \frac{4}{3}x$ και $y = -\frac{4}{3}x$ και διέρχεται από το σημείο $M(3\sqrt{2}, 4)$.

1η περίπτωση /

Αν οι εστίες είναι σωρ κ' τότε $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ και $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$
 $M \in C \Rightarrow \frac{(3\sqrt{2})^2}{a^2} - \frac{4^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{18}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1} \quad (1)$ $\boxed{b = \frac{4a}{3}} \quad (2)$

$$(1) \Rightarrow \frac{18}{a^2} - \frac{16}{\frac{16a^2}{9}} = 1 \Leftrightarrow \frac{18}{a^2} - \frac{9}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = 3$$

και $(2) \Rightarrow \boxed{b = 4}$

Τελικά $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

2η περίπτωση /

Αν οι εστίες είναι σωρ γ' τότε $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ και $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$
 $M \in C \Rightarrow \frac{4^2}{a^2} - \frac{(3\sqrt{2})^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{16}{a^2} - \frac{18}{b^2} = 1} \quad (1)$ $\boxed{a = \frac{4b}{3}} \quad (2)$

$$(1) \Rightarrow \frac{16}{\frac{16b^2}{9}} - \frac{18}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{b^2} - \frac{18}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{-9}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = -9 \text{ αδύνατο.}$$

2. Να βρείτε τις εστίες, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες της υπερβολής:

(i) $9x^2 - 16y^2 = 144$,

(ii) $x^2 - y^2 = 4$,

(iii) $144x^2 - 25y^2 = 3600$.

i) $\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1$
 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

ii) $x^2 - y^2 = 4$
 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ (ισοσκελής)
 $a^2 = b^2 = 4 \Rightarrow a = b = 2$

$$\frac{x}{16} - \frac{y}{9} = 1$$

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow c = 5$$

$$F(5, 0), F'(-5, 0)$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

$$\text{ασυμπτωτες} : y = \frac{3}{4}x, y = -\frac{3}{4}x$$

$$4 \quad 4$$

$$a^2 = b^2 = 4 \Rightarrow a = b = 2$$

$$c^2 = 8 \Rightarrow c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

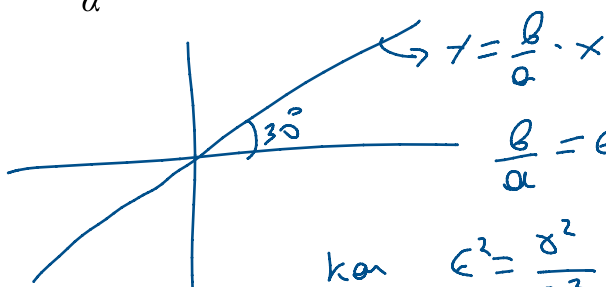
$$F(2\sqrt{2}, 0), F'(-2\sqrt{2}, 0)$$

$$e = \sqrt{2}$$

$$\text{ασυμπτωτες} : y = x, y = -x$$

3. Να βρείτε την εκκεντρότητα της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, της οποίας η ασύμπτωτη

$y = \frac{b}{a}x$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 30° .



$$\frac{b}{a} = \tan 30^\circ \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{και } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow e = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

3. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $x^2 - 4y^2 = 12$ οι οποίες:

(i) είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = x + 1$

(ii) είναι κάθετες στην ευθεία $y = -\frac{4}{\sqrt{3}}x$

(iii) διέρχονται από το σημείο $M(3, 0)$

Έστω $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής

$$A \in C \Rightarrow x_1^2 - 4y_1^2 = 12 \quad (1)$$

$$C_A : xx_1 - 4yy_1 = 12$$

$$i) C_A \parallel y = x + 1 \Leftrightarrow \lambda_{C_M} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1}{4y_1} = 1 \Leftrightarrow x_1 = 4y_1 \quad (2)$$

$$ii) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} (4y_1)^2 - 4y_1^2 = 12 \Leftrightarrow 16y_1^2 - 4y_1^2 = 12 \Leftrightarrow 12y_1^2 = 12 \Leftrightarrow y_1^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow y_1 = 1 \quad \hat{u} \quad y_1 = -1$$

$$\Leftrightarrow y_1 = 1 \quad \hat{=} \quad y_1 = -1$$

$$x_1 = 4$$

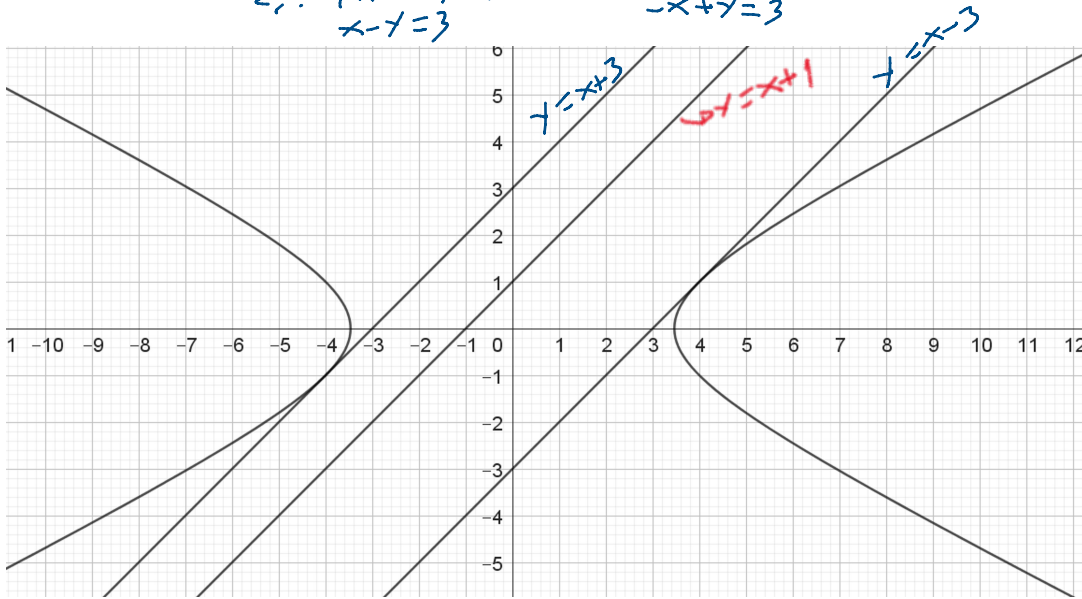
$$x_1 = -4$$

$$\Sigma_1: 4x - 4y = 12$$

$$-4x + 4y = 12$$

$$-x + y = 3$$

$$x - y = 3$$



$$\text{iii) } M \in \Sigma_A \Rightarrow 3x_1 - 0 = 12 \Rightarrow \boxed{x_1 = 4}$$

$$a) \Rightarrow 4^2 - 4y_1^2 = 12$$

$$16 - 12 = 4y_1^2$$

$$4 = 4y_1^2$$

$$y_1^2 = 1$$

$$y_1 = 1 \quad \hat{=} \quad y_1 = -1$$

$$A_1(4, 1) \in \Sigma_1: 4x - 4y = 12 \Rightarrow x - y = 3$$

$$A_2(4, -1) \in \Sigma_2: 4x + 4y = 12 \Rightarrow x + y = 3$$

