

Σχετική Θέση Ευθείας και Κωνικής

Ας θεωρήσουμε μία ευθεία $y = \lambda x + \beta$ και μία κωνική τομή $Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$. Η ευθεία ε και η κωνική C έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία, αφού το σύστημα

$$\begin{cases} y = \lambda x + \beta & (1) \\ Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0 & (2) \end{cases}$$

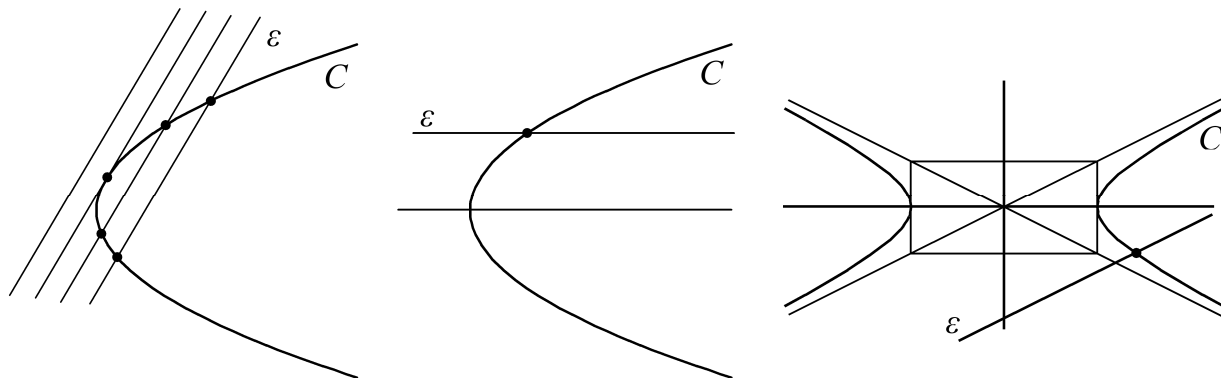
έχει το πολύ δύο διακεκριμένες λύσεις.

Για την επίλυση του συστήματος θέτουμε στη (2), όπου $y = \lambda x + \beta$, οπότε προκύπτει μια δευτεροβάθμια εξίσωση.

— Αν η εξίσωση αυτή έχει δύο ρίζες άνισες ή μια απλή ρίζα (όταν είναι 1ου βαθμού), τότε η ευθεία και η κωνική τέμνονται.

— Αν η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες, δηλαδή αν είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 0$, τότε αποδεικνύεται ότι η ευθεία εφάπτεται της κωνικής.

— Τέλος, αν η εξίσωση δεν έχει ρίζες, τότε η ευθεία και η κωνική δεν έχουν κοινά σημεία.



4. Να βρεθεί η τιμή του $\kappa \in \mathbf{R}$, για την οποία η παραβολή $y = x^2 - \kappa x + 2$ εφάπτεται της ευθείας $y = x - 2$.

$$\begin{cases} y = x^2 - \kappa x + 2 & (1) \\ y = x - 2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \xrightarrow{(2)} x - 2 = x^2 - \kappa x + 2$$

$$x^2 - \kappa x - x + 2 + 2 = 0$$

$$x^2 - (k+1)x + 4 = 0$$

Πρέπει και οφεί $\Delta = 0$

$$[-(k+1)]^2 - 16 = 0$$

$$(k+1)^2 = 16$$

$$k+1 = 4$$

$$\boxed{k=3}$$

$$\text{ή } k+1 = -4$$

$$\boxed{k=-5}$$

3. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία που είναι παράλληλη προς μια από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ τέμνει την υπερβολή σε ένα μόνο σημείο. Ποιο είναι το σημείο τομής της ευθείας $2x - y = 1$ και της υπερβολής $4x^2 - y^2 = 1$;

$$4x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} - y^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$$

ασυμπτωτες

$$\varepsilon_1: y = \frac{1}{\frac{1}{2}} x \Rightarrow y = 2x$$

$$\varepsilon_2: y = -2x$$

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - y^2 = 1 & (1) \\ 2x - 1 = y & (2) \end{cases}$$

$$(1) \xrightarrow{(2)} 4x^2 - (2x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \cancel{4x^2} - \cancel{4x^2} + 4x - 1 = 1 \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ και } y = 0$$

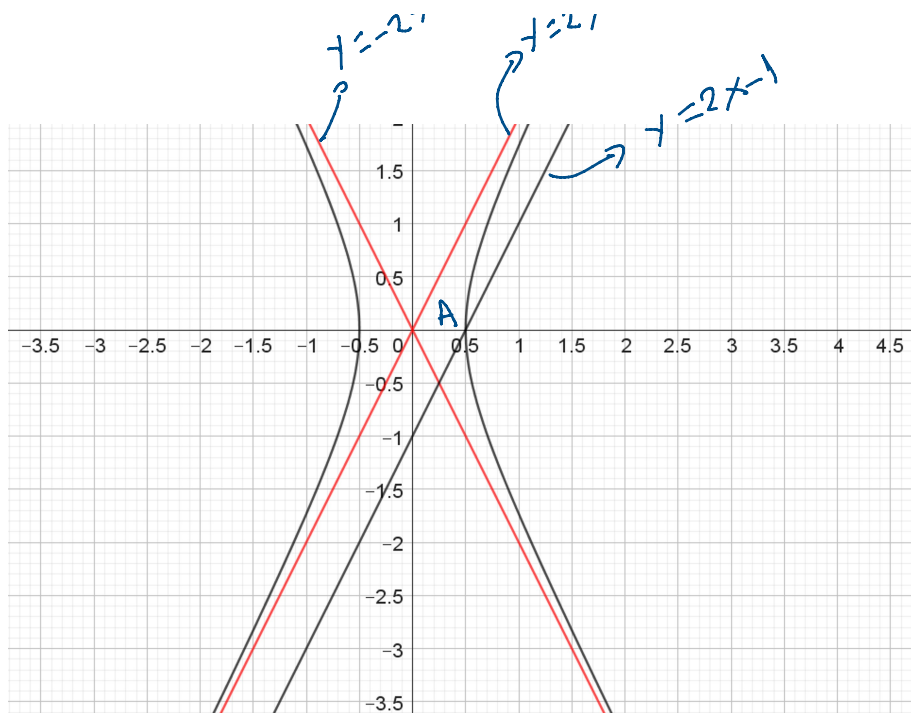
Η ευθεία $2x - y = 1$ και η υπερβολή $4x^2 - y^2 = 1$ έχουν κοινό σημείο, το $(\frac{1}{2}, 0)$ αλλά η ευθεία δεν εφαπτεται της υπερβολής. Άρα συμβαίνει διότι η ευθεία είναι παράλληλη στην ασύμπτωτη της υπερβολής.

$$y = 2x$$

$$y = -2x$$

$$2x - 1$$

κοινό σημείο



κοινό σημείο
 $A(\frac{1}{2}, 0)$

6. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $3x^2 + y^2 = 4$, οι οποίες:

(i) είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = -3x + 1$

(ii) είναι κάθετες στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$

(iii) διέρχονται από το σημείο $M(0, 4)$.

ι) Αφού η ζητούμενη εφαπτομένη είναι παράλληλη στην $y = -3x + 1$
θα 'ναι της μορφής $y = -3x + b$
Για να εφαπτάται, πρέπει να λύνει το σύστημα $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 4 & (1) \\ y = -3x + b & (2) \end{cases}$ να καταλήξει σε εξίσωση 2ου βαθμού με $\Delta = 0$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } (1) \Rightarrow 3x^2 + (-3x + b)^2 &= 4 \Leftrightarrow 3x^2 + 9x^2 - 6bx + b^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \\ &12x^2 - 6bx + b^2 - 4 = 0 \\ \text{Πρέπει και αρκεί } \Delta &= 0 \Leftrightarrow 36b^2 - 48(b^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \\ &36b^2 - 48b^2 + 192 = 0 \Leftrightarrow \\ &12b^2 = 192 \Leftrightarrow b^2 = 16 \\ &b = 4 \quad \vee \quad b = -4 \end{aligned}$$

οπότε $\epsilon_1: y = -3x + 4$ $\epsilon_2: y = -3x - 4$