

ΘΕΜΑ 1

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (2,3)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

$$\alpha) \vec{\gamma} = 2(1,2) + (2,3) = (2,4) + (2,3) = (4,7)$$

$$\beta) |\vec{\gamma}| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$$

$$\gamma) \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = (1,2) \cdot (4,7) = 4 + 14 = 18$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(6,3)$, $\Delta(1,-2)$ και $\Gamma(9,2)$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το μέσο M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(4,2)$ και το μέσο N του τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(5,0)$.

β) $\vec{MN} = (1,-2)$ και $\vec{\Delta\Gamma} = (8,4)$.

γ) $\vec{MN} \perp \vec{\Delta\Gamma}$.

$$\alpha) \begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4 \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \end{aligned} \quad \left| \rightarrow M(4,2) \right.$$

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{x_\Gamma + x_\Delta}{2} = \frac{1+9}{2} = 5 \\ y_N &= \frac{y_\Gamma + y_\Delta}{2} = \frac{2+(-2)}{2} = 0 \end{aligned} \quad \left| \rightarrow N(5,0) \right.$$

$$\beta) \begin{aligned} \vec{MN} &= (5-4, 0-2) = (1,-2) \\ \vec{\Delta\Gamma} &= (9-1, 2+2) = (8,4) \end{aligned}$$

$$\gamma) \vec{MN} \cdot \vec{\Delta\Gamma} = (1,-2) \cdot (8,4) = 8 - 8 = 0 \quad \rightarrow \vec{MN} \perp \vec{\Delta\Gamma}$$

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB} = (2, 1)$ και $\vec{AG} = (3, -1)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{BG} = (1, -2)$.

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την ΑΓ.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

$$\alpha) \vec{BG} = \vec{AG} - \vec{AB} = (3, -1) - (2, 1) = (1, -2)$$

$$\beta) \vec{AB} \cdot \vec{BG} = (2, 1) \cdot (1, -2) = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{BG} \rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \quad |\vec{BG}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \rightarrow |\vec{AB}| = |\vec{BG}| \rightarrow \hat{A} = \hat{G} = 45^\circ$$

$$\gamma) (AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AG})| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |-2 - 3| = \frac{5}{2}$$

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 4, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$.

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$.

γ) Να βρείτε τη $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$.

$$\alpha) \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

$$\beta) \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}|^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$\gamma) \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\gamma} \Rightarrow (\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{2}$$

ΘΕΜΑ 5

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 2), \vec{\beta} = (-2, 1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το διάνυσμα $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.

β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{v}$.

$$\alpha) \vec{v} = 2 \cdot (3, 2) + 3 \cdot (-2, 1) = (6, 4) + (-6, 3) = (0, 7)$$

$$\beta) \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (3, 2) \cdot (-2, 1) = -6 + 2 = -4$$

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\gamma) \vec{\alpha} \cdot \vec{\nu} = (3, 2) \cdot (0, 7) = 0 + 14 = 14$$

ΘΕΜΑ 6

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2, |\vec{\beta}|=4, (\vec{\alpha}, \vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} \text{ και } \vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}.$$

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

β) Να βρείτε το $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$.

γ) Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|, |\vec{\delta}|$

δ) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\gamma}, \vec{\delta})$.

$$\alpha) \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

$$\beta) \vec{\gamma} \cdot \vec{\delta} = (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta}^2 =$$

$$= 2|\vec{\alpha}|^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - |\vec{\beta}|^2 = 2 \cdot 2^2 - 4 - 4^2 = -12$$

$$\gamma) |\vec{\gamma}|^2 = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 4 - 8 + 16 = 12 \Rightarrow |\vec{\gamma}| = \sqrt{12}$$

$$|\vec{\delta}|^2 = |2\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = (2\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 16 + 16 + 16 = 48 \Rightarrow$$

$$|\vec{\delta}| = \sqrt{48} = \sqrt{4 \cdot 12} = 2\sqrt{12}$$

$$\delta) \cos(\vec{\gamma}, \vec{\delta}) = \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}}{|\vec{\gamma}| \cdot |\vec{\delta}|} = \frac{-12}{\sqrt{12} \cdot 2\sqrt{12}} = \frac{-12}{2 \cdot 12} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{\gamma}, \vec{\delta}) = \frac{2\pi}{3}$$

ΘΕΜΑ 7

Θεωρούμε τα σταθερά σημεία $A(3,4), B(2,5)$ και $\Gamma(-2,2)$ και το μεταβλητό σημείο

$M(4\alpha-1, 3\alpha+1), \alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία M κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην $B\Gamma$.

δ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου M ισχύει $(MB\Gamma) = (AB\Gamma)$.

Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά;

$$\alpha) \vec{AB} = (2-3, 5-4) = (-1, 1)$$

$$\vec{A\Gamma} = (-2-3, 2-4) = (-5, -2)$$

$$\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$2 + 5 = 7 \neq 0 \Rightarrow \vec{AB} \not\parallel \vec{A\Gamma}$$

$\Rightarrow A, B, \Gamma$ δεν είναι συνευθειακά
οπότε σχηματίζουν τρίγωνο

$$\beta) \lambda_{B\Gamma} = \frac{y - y_B}{x - x_B} = \frac{2-5}{-2-2} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4},$$

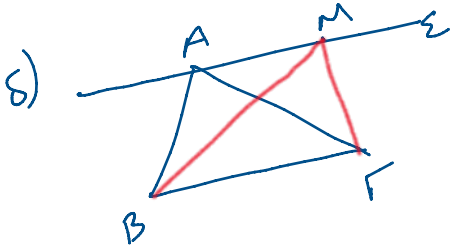
$$\beta\Gamma: y - y_B = \lambda_{B\Gamma}(x - x_B) \Rightarrow y - 5 = \frac{3}{4}(x - 2)$$

$$\delta) M(4a-1, 3a+1)$$

$$\begin{array}{l} x = 4a - 1 \\ y = 3a + 1 \end{array} \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ \cdot 4 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} -3x = -12a + 3 \\ 4y = 12a + 4 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \boxed{-3x + 4y = 7} \quad (E)$$

$$\lambda_E = -\frac{A}{B} = \frac{3}{4} = \lambda_{B\Gamma} \Rightarrow E \parallel B\Gamma$$

$$A \in E \Leftrightarrow -3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 7 \Leftrightarrow 7 = 7 \text{ now is true}$$



Γεωμετρικά

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $MB\Gamma$ έχουν κοινή βάση $B\Gamma$
και $d(A, B\Gamma) = d(M, B\Gamma)$ αφού $E \parallel B\Gamma$
οπότε $(AB\Gamma) = (MB\Gamma)$

Αλγεβρικά

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})| = \frac{1}{2} \cdot 7 = \frac{7}{2}$$

$$(MB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\vec{MB}, \vec{B\Gamma})| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 3-4a & 4-3a \\ -9 & -3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-9 + 12a + 16 + 12a| = \frac{7}{2}$$

$$\text{Άρα } (AB\Gamma) = (MB\Gamma)$$