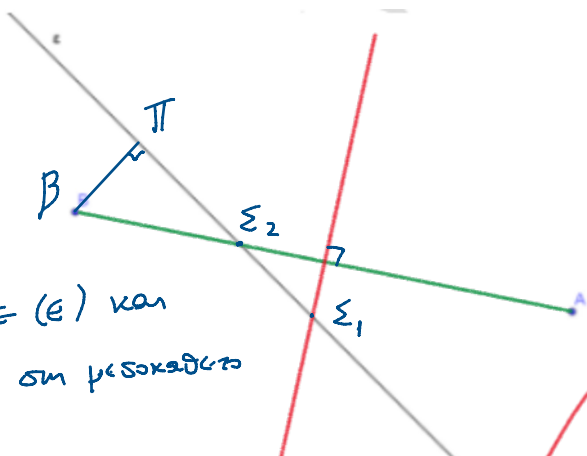


### ΘΕΜΑ 8

Η ευθεία  $\varepsilon$  με εξίσωση  $x+y-1=0$  του παρακάτω σχήματος, αναπαριστά τη γραμμή ενός σιδηροδρομικού δικτύου που εξυπηρετεί τους κατοίκους δύο πόλεων  $A(8,1), B(-7,4)$  (για την ακρίβεια  $A, B$  είναι τα κεντρικά σημεία των πόλεων από τα οποία μετράμε αποστάσεις). Για το λόγο αυτό θα κατασκευαστεί κατά μήκος της γραμμής ( $\varepsilon$ ), ένας σταθμός σε ένα σημείο  $\Sigma$  και μία πεζογέφυρα σε ένα σημείο  $\Pi$ .  
Να βρείτε :

- ποια πόλη από τις  $A, B$  είναι πλησιέστερα στη γραμμή του τραίνου.
- τις συντεταγμένες του  $\Pi$ , αν είναι γνωστό ότι θα κατασκευαστεί στο πλησιέστερο σημείο της γραμμής στην πόλη  $B$ .
- τις συντεταγμένες του  $\Sigma$  στις παρακάτω περιπτώσεις
  - ο σταθμός  $\Sigma$  να ισαπέχει από τις πόλεις  $A, B$ .
  - το οδικό δίκτυο που θα συνδέει το σταθμό  $\Sigma$  με τις πόλεις  $A, B$  να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος.



α)  $(\varepsilon): x+y-1=0$   
 $A(8,1), B(-7,4)$

$$d(A, \varepsilon) = \frac{|8+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

$$d(B, \varepsilon) = \frac{|-7+4-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$d(A, \varepsilon) > d(B, \varepsilon)$$

β) Το  $\Sigma_1 \in (\varepsilon)$  και  
 $\Sigma_1$  ανήκει στη μεσοκάθετο  
 των  $AB$

Έστω  $\Sigma_1(x_1, y_1)$

$$\Sigma_1 \in (\varepsilon) \Rightarrow \boxed{x_1 + y_1 = 1} \quad (3)$$

$$\Sigma_1 A = \Sigma_1 B \Rightarrow \sqrt{(x_1 - 8)^2 + (y_1 - 1)^2} = \sqrt{(x_1 + 7)^2 + (y_1 - 4)^2}$$

$$(3) + (2) \Rightarrow 2y_1 = 12 \Rightarrow y_1 = 6 \quad \Pi(-5, 6)$$

$$\text{και } (1) \Rightarrow x_1 = -5$$

$$x_1^2 - 16x_1 + 64 + y_1^2 - 2y_1 + 1 = x_1^2 + 14x_1 + 49 + y_1^2 - 8y_1 + 16$$

$$30x_1 - 6y_1 = 0 \Rightarrow \boxed{y_1 = 5x_1} \quad (4)$$

$$(3), (4) \Rightarrow x_1 + 5x_1 = 1 \Rightarrow 6x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{6}, y_1 = \frac{5}{6} \leq 1\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$$

ii) Το  $\Sigma_2$  είναι το σημείο τέμν. των  $\varepsilon, AB$

$$a_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{5}$$

$$AB: y - 1 = -\frac{1}{5}(x - 8) \Rightarrow 5y - 5 = -x + 8 \Rightarrow \boxed{x + 5y = 13}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 5y = 13 \end{cases} \xrightarrow{(-)} -4y = -12 \Rightarrow \boxed{y = 3}, \boxed{x = -2} \quad \Sigma_2 (-2, 3)$$

#### ΘΕΜΑ 9

Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο  $\Lambda(2,6)$  και η θέση ενός πλοίου με το σημείο  $\Pi(\lambda-1, 2+\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α)

i. Αν το πλοίο κινείται ευθύγραμμα, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του.

ii. Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι.

β) Αν τελικά το πλοίο δεν περάσει από το λιμάνι, να βρείτε:

i. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι;

Το σημείο του καρτεσιανού επιπέδου που βρίσκεται το πλοίο, όταν απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι.

$$\beta i) d(\Pi, \epsilon) = \frac{|2 - 6 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ii) Έστω  $\Pi_0$  το ζητούμενο σημείο

$$\Lambda \Pi_0 \perp \epsilon \Rightarrow a_{\Lambda \Pi_0} \cdot a_{\epsilon} = -1 \Rightarrow a_{\Lambda \Pi_0} \cdot 1 = -1 \Rightarrow a_{\Lambda \Pi_0} = -1$$

$$\Lambda \Pi_0: y - y_1 = a_{\Lambda \Pi_0}(x - x_1) \Rightarrow y - 6 = -1(x - 2) \Rightarrow \boxed{y = -x + 8}$$

$$\Pi_0: \begin{cases} y = -x + 8 \\ x - y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x - (-x + 8) &= -3 \\ 2x - 8 &= -3 \end{aligned}$$

$$2x = 5$$

$$\boxed{x = \frac{5}{2}}$$

$$\text{και } \boxed{y = \frac{11}{2}}$$

$$\Pi_0 \left( \frac{5}{2}, \frac{11}{2} \right)$$

$$\alpha) i) \begin{aligned} \text{Έστω} \\ x_n = 2 - 1 \\ y_n = 2 + \lambda \end{aligned} \quad \xrightarrow{(-)}$$

$$\boxed{x_n - y_n = -3}$$

Αρα το  $\Pi$  κινείται στην ευθεία  $\boxed{x - y = -3} \quad (\epsilon)$

$$ii) 2 - 6 = -4 \neq -3$$

$\Lambda \notin \epsilon$  δηλαδή δεν θα περάσει απ' το λιμάνι

