

ΘΕΜΑ 10

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, (1) και η ευθεία $\epsilon: x - 2y + 3 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ .

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία ϵ έχει κοινά σημεία με τον κύκλο C .

γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες ϵ_1, ϵ_2 του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία ϵ .

δ) Να αποδείξετε ότι $d(\epsilon_1, \epsilon_2) = 2\rho$. Πως αιτιολογείται γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό;

α) $A = -2, B = 4, \Gamma = 0$ $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-2)^2 + 4^2 - 4 \cdot 0 = 20 > 0$
 οπότε παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}) \rightarrow K(1, -2)$

και $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

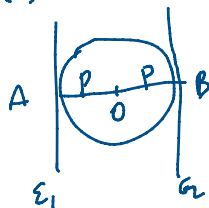
β) $d(K, \epsilon) = \frac{|1 - 2(-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5} > \rho$ οπότε δεν έχουν κοινά σημεία.

γ) $\lambda_{\epsilon_1} \cdot \lambda_{\epsilon} = -1 \Rightarrow \lambda_{\epsilon_1} \cdot \frac{1}{2} = -1 \rightarrow \lambda_{\epsilon_1} = -2$

οπότε $\epsilon_1: y = -2x + b \Leftrightarrow 2x + y - b = 0$

Πρέπει $d(K, \epsilon_1) = \rho \Leftrightarrow \frac{|2 - 2 - b|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |b| = 5 \Leftrightarrow b = \pm 5$
 οπότε $\epsilon_1: y = -2x + 5$
 $\epsilon_2: y = -2x - 5$

δ) $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$
 $d(O, \epsilon_1) = \rho$
 $d(O, \epsilon_2) = \rho$ } $d(\epsilon_1, \epsilon_2) = d(O, \epsilon_1) + d(O, \epsilon_2) = \rho + \rho = 2\rho$



ΘΕΜΑ 11

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 4$ και το σημείο $A(2\sqrt{2}, 0)$.

α) i. Να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου C .

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο A και να αποδείξετε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες.

β) Αν B, Γ τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες ευθείες από το σημείο A , να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου $AB\Gamma$.

i) $C: x^2 + y^2 = 4$ $(KA) = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 0^2} = 2\sqrt{2} > r$ οπότε A εξωτερικός του C .
 κέντρο $K(0,0)$
 $r = 2$

ii) Έστω $M(x_0, y_0)$ το σημείο επαφής. Τότε $(\epsilon): x x_0 + y y_0 = 4$
 Αναζητώ τα x_0, y_0

$$M \in C \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = 4$$

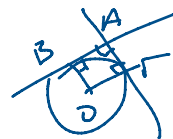
$$A \in (\epsilon) \Rightarrow 2\sqrt{2}x_0 + 0 = 4 \Rightarrow \boxed{x_0 = \sqrt{2}}$$

για $x_0 = \sqrt{2}$ $(\sqrt{2})^2 + y_0^2 = 4$
 $y_0^2 = 2$
 $y_0 = \pm \sqrt{2}$

$$M_1(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \rightarrow (\epsilon_1): \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 4$$

$$M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \rightarrow (\epsilon_2): \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 4$$

iii)



$$\left. \begin{array}{l} \Delta \epsilon_1 = -1 \\ \Delta \epsilon_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \epsilon_1 \perp \epsilon_2 \Rightarrow AB\Gamma \text{ έχει } \angle \text{ορθός και } OB = OG \text{ οπότε} \\ OB\Gamma \text{ τετράγωνο οπότε } (OB\Gamma) = r^2 = 4$$