

ΘΕΜΑ 2.1

Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της C .

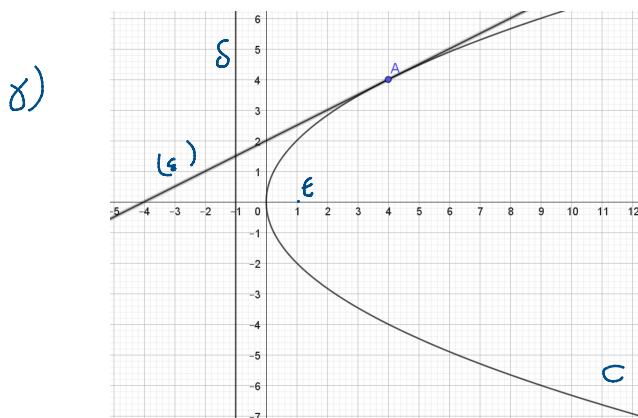
β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της C στο σημείο της $M(4,4)$.

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C , τη διευθετούσα δ και την ευθεία (ϵ).

$$\alpha) 2p = 4 \Rightarrow p = 2$$

$$E\left(\frac{p}{2}, 0\right) \rightarrow E(1, 0) \quad , \quad \delta: x = -\frac{p}{2} \Rightarrow x = -1$$

$$\beta) y y_1 = p(x + x_1) \Rightarrow y \cdot 4 = 2(x + 4) \Rightarrow 2y = x + 4$$



ΘΕΜΑ 2.2

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{2}x^2$ (1).

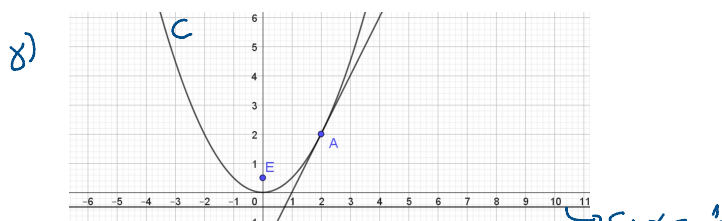
α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.

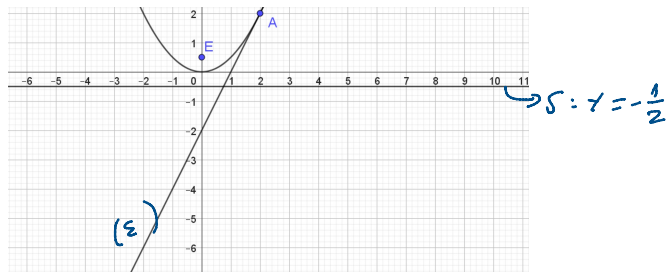
β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο $A(2,2)$.

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή (1), την εστία, τη διευθετούσα και την εφαπτομένη της παραβολής.

$$\alpha) \begin{array}{l} c) \Rightarrow x^2 = 2y \\ 2p = 2 \\ p = 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} E\left(0, \frac{p}{2}\right) \\ E\left(0, \frac{1}{2}\right) \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \delta: y = -\frac{p}{2} \\ \delta: y = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\beta) (\epsilon): x x_1 = p(y + y_1) \Rightarrow x \cdot 2 = 1(y + 2) \Rightarrow 2x = y + 2 \Rightarrow y = 2x - 2$$





ΘΕΜΑ 2.3

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 8x$.

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $(\frac{1}{8}, 1)$ είναι

παράλληλη στην ευθεία $\epsilon: 8x - 2y + 3 = 0$.

$$\alpha) \begin{array}{l} 2p = 8 \\ p = 4 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} E(\frac{p}{2}, 0) \\ E(2, 0) \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \delta: \gamma = -\frac{p}{2} \\ \delta: \gamma = -2 \end{array}$$

$$\beta) (u): \gamma \cdot \gamma_1 = p(x + x_1) \Rightarrow \gamma \cdot 1 = 4(x + \frac{1}{8}) \Rightarrow \gamma = 4x + \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{l} 2u = 4 \\ 2\epsilon = -\frac{A}{B} = -\frac{8}{-2} = 4 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow 2u = 2\epsilon \Rightarrow u \parallel \epsilon \\ \text{και } (\frac{1}{8}, 1) \notin (\epsilon) \end{array} \right.$$

ΘΕΜΑ 2.4

Δίνεται το σημείο $E(2,0)$, η ευθεία $\delta_1: x = -2$ και τυχαίο σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου.
 $x+2=0$

α) i. Να βρείτε την απόσταση (ME) του σημείου $M(x,y)$ από το $E(2,0)$ ως συνάρτηση των x,y .

ii. Να βρείτε την απόσταση $d(M,\delta)$ του σημείου M από την ευθεία δ ως συνάρτηση των x,y .

β) Αν ισχύει $(ME) = d(M,\delta)$ να δείξετε ότι το σημείο M ανήκει στην παραβολή $y^2 = 8x$.

$$\alpha) \text{ i) } (ME) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2}$$

$$\text{ii) } d(M,\delta) = \frac{|x+2|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x+2|$$

$$\beta) (ME) = d(M,\delta) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2} = |x+2| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2} = |x+2|^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow y^2 = 8x$$

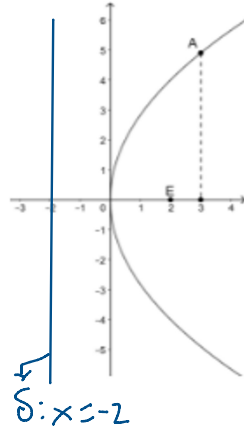
παραβολή με
εστία $E(2,0)$

ΘΕΜΑ 2.5

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x' , κορυφή $O(0,0)$ και εστία $E(2,0)$, όπως στο παρακάτω σχήμα. Το σημείο A της παραβολής έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy .

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και ότι $A(3, 2\sqrt{6})$.
β) Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα (δ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της.

- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της παραβολής στο σημείο A .



$$C: y^2 = 2px$$

$$E(2,0) \Rightarrow \frac{p}{2} = 2 \Rightarrow$$

$$\boxed{p=4}$$

$$C: y^2 = 8x$$

$$\gamma \text{ το } x=3 \text{ έχω } y^2 = 24$$

$$\underline{y > 0} \Rightarrow y = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$A(3, 2\sqrt{6})$$

$$\beta) \delta: x = -\frac{p}{2} \Rightarrow x = -2$$

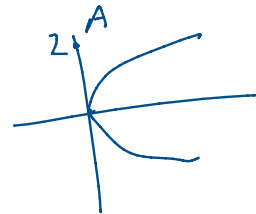
$$\epsilon) \epsilon_A: y \cdot 2\sqrt{6} = 4(x+3)$$

ΘΕΜΑ 2.7

Δίνεται η παραβολή (C) που έχει εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

- α) Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της E και την εξίσωση της ευθείας της διευθετούσας δ .
β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(0, 2)$ και εφάπτονται στην παραβολή που περιγράφει η εξίσωση (1).

$$\alpha) \begin{array}{l|l|l} 2p=4 & E(\frac{p}{2}, 0) & \delta: x = -\frac{p}{2} \\ p=2 & E(1, 0) & \delta: x = -1 \end{array}$$



$$\beta) \text{ Έστω } M(x_1, y_1) \text{ το σημείο επαφής}$$

$$(E): yy_1 = 2(x+x_1)$$

$$A \in (E) \Rightarrow 2y_1 = 2(0+x_1) \Rightarrow \boxed{y_1 = x_1} \quad (1)$$

$$M \in C \Rightarrow y_1^2 = 4x_1 \xrightarrow{(1)} x_1^2 = 4x_1 \Rightarrow x_1 \geq 0$$

$$y_1 = 0$$

$$(\epsilon_1): x = 0$$

$$y \neq y'$$

$$\vee \quad x_1 = 4$$

$$y_1 = 4$$

$$(\epsilon_2): 4y = 2(x+4)$$