

ΘΕΜΑ 4.1

Δίνεται η εξίσωση $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2(x+3)$: (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2, -2)$ και ακτίνα $\rho = 3$.

β) Να δείξετε ότι η αρχή O των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) η οποία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία A και B ώστε η αρχή των αξόνων να είναι το μέσο της χορδής AB .

δ) Αν η ευθεία (ϵ) του προηγούμενου ερωτήματος έχει εξίσωση $y = x$ τότε να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου KAB .

$$\alpha) x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 2x + 6$$

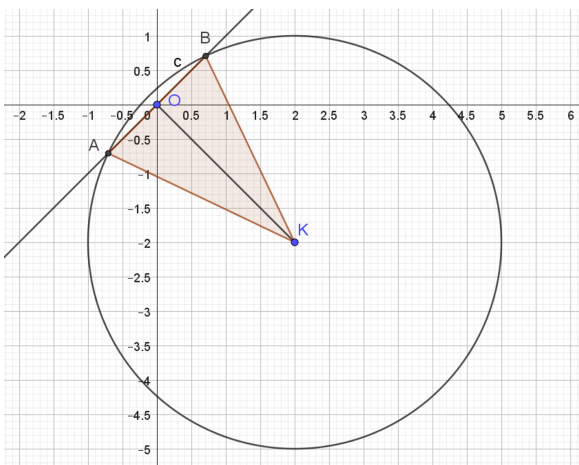
$$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$$

$$A = -4, B = 4, \Gamma = -1$$

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16 + 16 + 4 = 36 > 0 \rightarrow \text{υπόζει παρίσταται κύκλος } (C) \text{ με κέντρο } K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \rightarrow K(2, -2)$$

$$\text{και ακτίνα } \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{36}}{2} = 3$$

$$\beta) (OK) = \sqrt{(2-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{8} < 3 \Rightarrow (OK) < \rho \Rightarrow O \text{ εσωτερικό του } (C).$$



$$\gamma) KO \text{ αποσπνρα} \Rightarrow KO \perp AB \Rightarrow$$

$$\lambda_{KO} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow \frac{0-2}{0+2} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow$$

$$-1 \cdot \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow \lambda_{AB} = 1$$

$$AB: y - y_0 = \lambda_{AB}(x - x_0) \Rightarrow \boxed{y = x}$$

$$\delta) KO = \sqrt{8}, KB = \rho = 3$$

$$\text{π.θ. στο } \triangle KOB: OB^2 = 3^2 - \sqrt{8}^2 = 1 \Rightarrow OB = 1$$

$$\text{οπότε } AB = 2.$$

$$(KAB) = \frac{AB \cdot KO}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{8}}{2} = \sqrt{8} \text{ ε.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4.2

Δίνεται ο κύκλος (c) με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$ και το σημείο $A(3,1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου και να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου.

ΘΕΜΑ 4.2

Δίνεται ο κύκλος (c) με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$ και το σημείο $A(3,1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου και να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου.

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που εφάπτονται στον κύκλο (c) και διέρχονται από το σημείο A έχουν εξισώσεις $(\varepsilon_1): 2x - y = 5$ και $(\varepsilon_2): x + 2y = 5$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{BAG}$, όπου B και Γ είναι αντίστοιχα τα σημεία επαφής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) με τον κύκλο.

$$\alpha) C: x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$$

$$(OA) = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10} > \sqrt{5} \Rightarrow (OA) > \rho \Rightarrow A \text{ εξωτερικό του } C.$$

β) Αν' το $A(3,1)$ διέρχονται οι ευθείες της μορφής

$$(\varepsilon): y-1 = \lambda(x-3) \quad \text{και η } (j) \quad x=3$$

$$2x - y + 1 - 3\lambda = 0$$

$$d(O, j) = 3 \neq \rho \Rightarrow \text{η } (j) \text{ δεν εφαπτάται τον } C$$

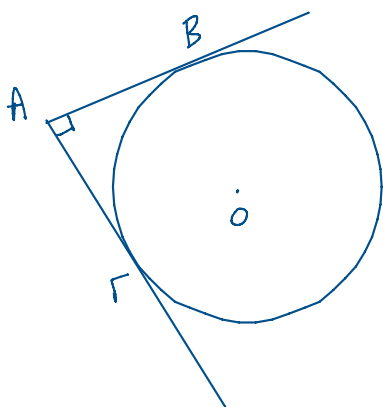
$$d(O, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 - 0 + 1 - 3\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |1 - 3\lambda| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{\lambda^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow |1 - 3\lambda|^2 = (\sqrt{5} \cdot \sqrt{\lambda^2 + 1})^2 \Leftrightarrow 1 - 6\lambda + 9\lambda^2 = 5\lambda^2 + 5 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 6\lambda - 4 = 0$$

$$\Delta = 100, \lambda = \frac{6 \pm 10}{8} = \frac{1}{2} \text{ ή } -\frac{1}{2}$$

$$\text{για } \lambda = 2 \rightarrow (\varepsilon_1): \boxed{2x - y - 5 = 0}$$

$$\text{για } \lambda = \frac{1}{2} \rightarrow (\varepsilon_2): \boxed{-\frac{1}{2}x + y + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x - 2y - 5 = 0}$$



$$\lambda_{AB} \lambda_{AG} = -1 \Rightarrow AB \perp AG$$

Η διχοτόμος της $\widehat{BAG}$ είναι η ΑΔ.

$$\lambda_{OA} = \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$$

$$OA: y - y_0 = \lambda_{OA}(x - x_0) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{3}x}$$

