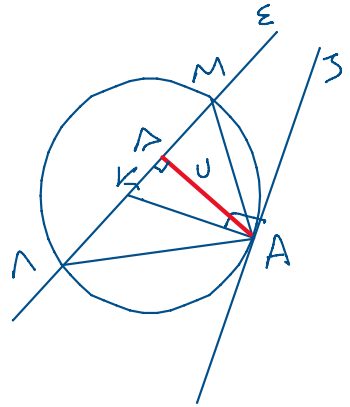


ΘΕΜΑ 4.3

Το κέντρο ενός κύκλου (c) βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και είναι σημείο της ευθείας (ε): $y=2x-1$. Ο κύκλος (c) έχει ακτίνα $\rho=3\sqrt{2}$ και η ευθεία (ζ): $x+y-2=0$ εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο Α.



α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου (c) είναι $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 18$.

β) Να αποδείξετε ότι:

- Η εξίσωση της ευθείας KA είναι $x-y+2=0$.
- Είναι $A(0,2)$.

γ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΛΜ, όπου Μ και Λ είναι τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τον κύκλο (c).

α) Έστω $K(x_0, y_0)$. $K \in \epsilon$ τεταρτημόριο $\Rightarrow x_0 > 0, y_0 > 0$

$$K \in (\epsilon) \Rightarrow \boxed{y_0 = 2x_0 - 1} \quad (1)$$

$$d(K, \zeta) = \rho \Rightarrow \frac{|x_0 + y_0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2} \Rightarrow |x_0 + y_0 - 2| = 6 \Rightarrow$$

$$x_0 + y_0 - 2 = 6 \quad \text{ή} \quad x_0 + y_0 - 2 = -6$$

$$\boxed{x_0 + y_0 = 8} \quad (2) \quad \begin{matrix} x_0 + y_0 = -4 \\ \text{Αντίρ. αφού} \\ x_0 > 0, y_0 > 0 \end{matrix}$$

$$(2) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x_0 + 2x_0 - 1 = 8 \Rightarrow 3x_0 = 9 \Rightarrow \boxed{x_0 = 3}$$

$$\text{και (1)} \Rightarrow \boxed{y_0 = 5}$$

$$\text{Άρα } K(3, 5) \text{ και } C: (x-3)^2 + (y-5)^2 = 18$$

$$\beta) i) KA \perp \zeta \Rightarrow \lambda_{KA} \cdot \lambda_{\zeta} = -1 \Rightarrow \lambda_{KA} \cdot (-1) = -1 \Rightarrow \lambda_{KA} = 1$$

$$KA: y - y_K = \lambda_{KA} (x - x_K) \rightarrow y - 5 = 1 \cdot (x - 3) \Rightarrow \boxed{y = x + 2}$$

ii) Α το σημείο τομής των KA, ζ οπότε οι συν/τες του Α είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x + x + 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases} \quad A(0, 2)$$

$$\gamma) \text{ Εμβαδόν } \triangle ALM = \frac{1}{2} \cdot LM \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = 9\sqrt{2}$$

$$\delta) |AM| = \frac{AM \cdot AD}{2} = \frac{6\sqrt{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{10}}{5} \text{ z.p.}$$

$$AM = 2p = 6\sqrt{2}$$

$$AD = d(A, \varepsilon) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\varepsilon: 2x - y - 1 = 0$$

ΘΕΜΑ 2.18

Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της C .

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(5, \frac{9}{4})$.

$$\alpha) \begin{array}{l} C: \text{υπερβολή} \\ E(5,0) \\ E(-5,0) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{εστίες στον κ'x'} \\ \text{κέντρο } (0,0) \\ c=5 \end{array}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

$$A \in C \Rightarrow |(AF) - (AF')| = 2a \Rightarrow |4 - 9| = 2a \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$\beta) b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 16} = 3, \quad C: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\gamma) \varepsilon_M: \frac{x \cdot 5}{16} - \frac{y \cdot \frac{9}{4}}{9} = 1 \Rightarrow \frac{5x}{16} - \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow \boxed{5x - 4y = 16}$$