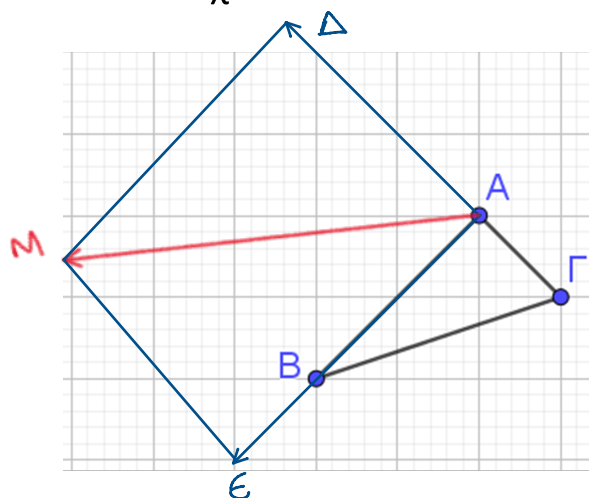


Θέμα 4ο Στο παρακάτω σχήμα να προσδιορίσετε σημείο M του επιπέδου για το οποίο ισχύει $4\vec{MA} + 3\vec{MB} = 5\vec{MG}$ (1)



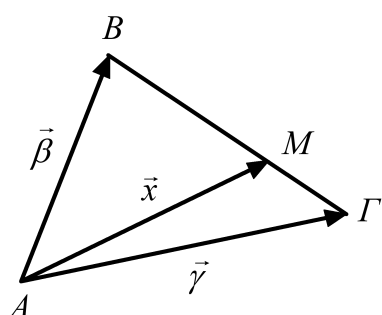
Επιλέγω ως σημείο αναφοράς το A και η (1) γίνεται:

$$\begin{aligned} -4\vec{AM} + 3(\vec{AB} - \vec{AM}) &= 5(\vec{AG} - \vec{AM}) \Rightarrow \\ -4\vec{AM} + 3\vec{AB} - 3\vec{AM} &= 5\vec{AG} - 5\vec{AM} \Rightarrow \\ -4\vec{AM} - 3\vec{AM} + 5\vec{AM} &= -3\vec{AB} + 5\vec{AG} \Rightarrow \\ -2\vec{AM} &= -3\vec{AB} + 5\vec{AG} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{AM} &= \frac{3}{2}\vec{AB} - \frac{5}{2}\vec{AG} \\ \vec{AM} &= \vec{AD} + \vec{AE} \quad \text{όπου } \vec{AD} = \frac{3}{2}\vec{AB} \\ \vec{AE} &= -\frac{5}{2}\vec{AG} \end{aligned}$$

→ σχο. 562.26

3. Αν στο διπλανό σχήμα είναι $(BM)=2(M\Gamma)$, να αποδείξετε ότι $\vec{x} = \frac{1}{3}(\vec{\beta} + 2\vec{\gamma})$.



$$\begin{aligned} (BM) &= 2(M\Gamma) \Rightarrow |\vec{BM}| = 2|\vec{M\Gamma}| \Rightarrow \vec{BM} = 2\vec{M\Gamma} \Rightarrow \\ \text{Αν' το σχήμα} &\Rightarrow \vec{BM} \parallel \vec{M\Gamma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{AM} - \vec{AB} &= 2(\vec{AG} - \vec{AM}) \Rightarrow \vec{x} - \vec{\beta} = 2\vec{\gamma} - 2\vec{x} \Rightarrow \\ \vec{x} + 2\vec{x} &= \vec{\beta} + 2\vec{\gamma} \Rightarrow 3\vec{x} = \vec{\beta} + 2\vec{\gamma} \Rightarrow \\ \vec{x} &= \frac{1}{3}\vec{\beta} + \frac{2}{3}\vec{\gamma} \end{aligned}$$

8) σχο. 563.29

Δίνονται τα σημεία A, B και Γ. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο M το

διάνυσμα $3\vec{MA} - 5\vec{MB} + 2\vec{MG}$ είναι σταθερό.

δηλαδή ν.δ.ο. είναι ανεξάρτητο του M

1ος τρόπος / επιλέγω ως σημείο αναφοράς ένα από τα σταθερά (ή A ή B ή Γ)

$$\begin{aligned} 3\vec{MA} - 5\vec{MB} + 2\vec{MG} &= -3\vec{AM} - 5(\vec{AB} - \vec{AM}) + 2(\vec{AG} - \vec{AM}) = \\ -3\vec{AM} - 5\vec{AB} + 5\vec{AM} + 2\vec{AG} - 2\vec{AM} &= -5\vec{AB} + 2\vec{AG} \quad \text{σταθερό} \end{aligned}$$

2ος τρόπος /

$$\begin{aligned} 3\vec{MA} - 5\vec{MB} + 2\vec{MG} &= 3\vec{MA} - 3\vec{MB} - 2\vec{MB} + 2\vec{MG} = \\ = 3(\vec{MA} - \vec{MB}) - 2(\vec{MB} - \vec{MG}) &= 3\vec{BA} - 2\vec{GB} \quad \text{που είναι σταθερό} \end{aligned}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα, με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}, \lambda \in \mathbf{R}$.

Απόδειξη

- Αν δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, όπου $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, συνδέονται με τη σχέση $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$, τότε τα διανύσματα αυτά είναι παράλληλα.
- Ισχύει όμως και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε υπάρχει μοναδικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.

Πράγματι, αν θέσουμε $\kappa = \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$, τότε $|\vec{\alpha}| = \kappa |\vec{\beta}|$. Συνεπώς:

- Αν $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = \kappa \vec{\beta}$.
- Αν $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = -\kappa \vec{\beta}$.
- Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} = 0 \cdot \vec{\beta}$.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση υπάρχει λ και μάλιστα μοναδικός, τέτοιος, ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.

Σχόλιο Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ τότε

- $\vec{\alpha} \nearrow \nearrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}, \lambda \geq 0$
- $\vec{\alpha} \nearrow \searrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}, \lambda \leq 0$

Θέμα 1ο (άσκηση 12 Ά ομάδας σχολικού)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν $\vec{AD} = \kappa \vec{AB} + \lambda \vec{AI}$ και $\vec{AE} = \lambda \vec{AB} + \kappa \vec{AI}$, να αποδείξετε ότι

$\vec{DE} // \vec{BG}$.

Αφού $AB\Gamma$ τρίγωνο $\rightarrow B, \Gamma$ διαφορετικά $\Rightarrow \vec{BG} \neq \vec{0}$

A.v.S.o. $\vec{DE} = \mu \cdot \vec{BG}$

$$\vec{DE} = \vec{AE} - \vec{AD} = \lambda \vec{AB} + \kappa \vec{AI} - \kappa \vec{AB} - \lambda \vec{AI} = \lambda (\vec{AB} - \vec{AI}) + \kappa (\vec{AI} - \vec{AB}) =$$
$$= \lambda \cdot \vec{GB} + \kappa \cdot \vec{BG} = \kappa \vec{BG} - \lambda \vec{BG} = (\kappa - \lambda) \vec{BG}$$

Αρα $\vec{DE} = (\kappa - \lambda) \vec{BG}$ δηλαδή $\vec{DE} = \mu \cdot \vec{BG}$ οπου $\mu = \kappa - \lambda$