

ΘΕΜΑ 4.8

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\vec{AB} = (\lambda, \lambda + 1)$, $\vec{A\Gamma} = (3\lambda, \lambda - 1)$ και το σημείο M είναι το μέσο της $B\Gamma$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

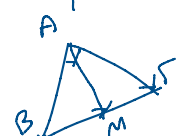
α) Να αποδείξετε ότι $\vec{AM} = (2\lambda, \lambda)$

β) Δίνεται επιπλέον ότι η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$.

i. Να υπολογίσετε το λ .

ii. Αν $\lambda = \frac{1}{2}$ και $A(2, \frac{3}{2})$ να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

α) M μέσο $B\Gamma \Rightarrow \vec{AM} = \frac{\vec{AB} + \vec{A\Gamma}}{2} = \frac{(\lambda, \lambda+1) + (3\lambda, \lambda-1)}{2} = \frac{(4\lambda, 2\lambda)}{2} = (2\lambda, \lambda)$



$\Rightarrow \boxed{\vec{AM} = (2\lambda, \lambda)}$

β) i) $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ \Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{A\Gamma} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = 0 \Rightarrow \lambda \cdot 3\lambda + (\lambda+1)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow 3\lambda^2 + \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow 4\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}$

ii) $\lambda = \frac{1}{2}$, $A(2, \frac{3}{2})$ Έστω C ο γεωμετρικός τόπος $\Rightarrow$ Αφού $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ \Rightarrow B\Gamma$ διαμέτρο του $C \Rightarrow M$ κέντρο του C

για $\lambda = \frac{1}{2}$: $\vec{AM} = (1, \frac{1}{2}) \Rightarrow \begin{cases} x_M - x_A = 1 \\ y_M - y_A = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M - 2 = 1 \Rightarrow x_M = 3 \\ y_M - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y_M = 2 \end{cases} \Rightarrow M(3, 2)$

και $\rho = (AM) = \sqrt{(2-3)^2 + (\frac{3}{2}-2)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Τελικά : $C : (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = \rho^2 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \frac{5}{4}$

ΘΕΜΑ 2.11

Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(3,0), E'(-3,0)$ και διέρχεται από το σημείο

$M(4, \frac{12}{5})$.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος του μεγάλου άξονα είναι 10.

β) Να βρείτε την εξίσωση της C .

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(4, \frac{12}{5})$.

Δίνεται ότι $\sqrt{1369} = 37$

α) εστίες $E(3,0), E'(-3,0) \Rightarrow$ κέντρο $(0,0)$
εστίες $ε = 3$
_____ $\sqrt{\quad}$

a) Ellipse $L(4,0)$ | Ellipse über x
 $E'(-3,0)$ | $a=3$

$$2a = (ME) + (ME') = \sqrt{(4-3)^2 + \left(\frac{12}{5}-0\right)^2} + \sqrt{(4+3)^2 + \left(\frac{12}{5}-0\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{144}{25}} + \sqrt{49 + \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{169}{25}} + \sqrt{\frac{1369}{25}} = \frac{13}{5} + \frac{37}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

β) $a=5$

$c=3$

$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{16} = 4$

G: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

δ) E: $\frac{x \cdot 1}{a^2} + \frac{y \cdot 1}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x \cdot 4}{25} + \frac{y \cdot \frac{12}{5}}{16} = 1$