

Θέμα 1°

Εάν $2\vec{AA} + 3\vec{BA} + 2\vec{MB} = \vec{AK} + \vec{AM} + \vec{BK}$, να αποδείξετε ότι $\vec{KL} \updownarrow \vec{ML}$.

Επιλέγω ως σημείο αναφοράς το κοινό άκρο των $\vec{KL}, \vec{ML}$.
 Διπλασιάζω το Λ.

$$\begin{aligned} -2\vec{LA} - 3\vec{LB} + 2(\vec{LB} - \vec{LM}) &= \vec{LK} - \vec{LA} + \vec{LM} - \vec{LA} + \vec{LK} - \vec{LB} \Rightarrow \\ -2\vec{LA} - 3\vec{LB} + 2\vec{LB} - 2\vec{LM} &= \vec{LK} - \vec{LA} + \vec{LM} - \vec{LA} + \vec{LK} - \vec{LB} \\ -2\vec{LM} &= 2\vec{LK} + \vec{LM} \Rightarrow -3\vec{LM} = 2\vec{LK} \Rightarrow \\ 3\vec{ML} &= -2\vec{KL} \Rightarrow \vec{KL} = -\frac{3}{2}\vec{ML} \Rightarrow \vec{KL} \updownarrow \vec{ML} \end{aligned}$$

Θέμα 2°

Αν για τα σημεία A, B, K, Λ, M ισχύει $\vec{KB} + \vec{ML} - 3\vec{LA} - \vec{AB} - 2\vec{AM} = \vec{0}$ να δείξετε ότι K, Λ, M συνευθειακά και να εξηγήσετε ποιο από αυτά είναι μεταξύ των άλλων δύο.

Επιλέγω ως σημείο αναφοράς ένα εκ των K, Λ, M.
 Με σημείο αναφοράς το K έχω

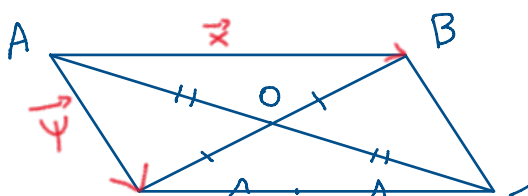
$$\begin{aligned} \vec{KB} + \vec{KL} - \vec{KM} - 3(\vec{KA} - \vec{KL}) - (\vec{KB} - \vec{KA}) - 2(\vec{KM} - \vec{KA}) &= \vec{0} \\ \vec{KB} + \vec{KL} - \vec{KM} - 3\vec{KA} + 3\vec{KL} - \vec{KB} + \vec{KA} - 2\vec{KM} + 2\vec{KA} &= \vec{0} \\ 4\vec{KL} - 3\vec{KM} &= \vec{0} \Rightarrow \vec{KL} = \frac{3}{4}\vec{KM} \Rightarrow \vec{KL} \parallel \vec{KM} \text{ οπότε} \end{aligned}$$

K, Λ, M συνευθειακά
 Αφού $\vec{KL} = \frac{3}{4}\vec{KM} \Rightarrow \begin{cases} \vec{KL} \uparrow \vec{KM} \\ |\vec{KL}| < |\vec{KM}| \end{cases}$ οπότε το Λ είναι μεταξύ των K, M

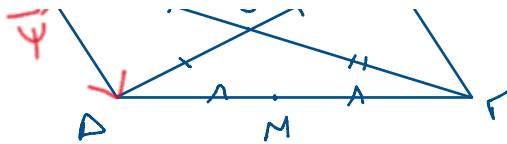


Θέμα 3°

Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με κέντρο O, M το μέσο της ΓΔ και έστω ότι $\vec{AB} = \vec{x}, \vec{AD} = \vec{y}$. Να εκφράσετε ως γραμμικό συνδυασμό (αποκλειστικά) των $\vec{x}, \vec{y}$ τα παρακάτω διανύσματα: $\vec{GD}, \vec{BG}, \vec{AG}, \vec{AB}, \vec{AO}, \vec{BM}, \vec{GM}, \vec{OM}$



$$\begin{aligned} \vec{GD} &= \vec{BA} = -\vec{AB} = -\vec{x} \\ \vec{BG} &= \vec{AD} = \vec{y} \\ \vec{AG} &= \vec{BG} - \vec{BA} = \vec{y} - (-\vec{x}) = \vec{x} + \vec{y} \end{aligned}$$



$$\vec{A\Gamma} = \vec{B\Gamma} - \vec{B\Delta} = \vec{\psi} - (-\vec{x}) = \vec{x} + \vec{\psi}$$

$$\vec{\Delta B} = \vec{\Delta A} + \vec{AB} = -\vec{\psi} + \vec{x} = \vec{x} - \vec{\psi}$$

$$\vec{AO} = \frac{1}{2} \vec{A\Gamma} = \frac{1}{2} (\vec{x} + \vec{\psi}) = \frac{1}{2} \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{\psi}$$

$$\vec{BM} = \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma M} = \vec{\psi} + \frac{1}{2} \vec{\Gamma\Delta} = \vec{\psi} - \frac{1}{2} \vec{x}$$

$$\vec{\Gamma M} = \frac{1}{2} \vec{\Gamma\Delta} = -\frac{1}{2} \vec{x}$$

$$\vec{OM} = \vec{O\Gamma} + \vec{\Gamma M} = \frac{1}{2} (\vec{x} + \vec{\psi}) - \frac{1}{2} \vec{x} = \frac{1}{2} \vec{\psi}$$

Θέμα 4ο

Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ABΓΔ και έστω $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AD} = \vec{\beta}$. Τα σημεία E και Z είναι τέτοια ώστε $\vec{AE} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{AB}$ και $\vec{AZ} = \frac{1}{3} \cdot \vec{AD}$.

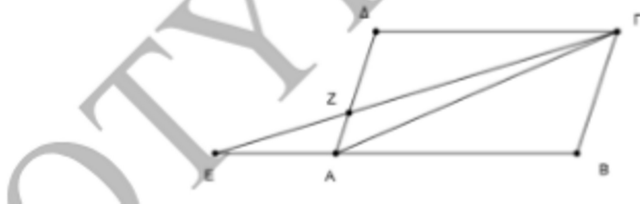
α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{EZ} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} + \frac{1}{3} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{Z\Gamma} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3} \cdot \vec{\beta}$.

β) Να αποδείξετε ότι: $\vec{Z\Gamma} = 2\vec{EZ}$.

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία Z, E και Γ είναι συνευθειακά.

Σκέψη

Τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν κοινή αρχή το A, οπότε επιλέγω σημείο αναφοράς το A



$$\alpha) \vec{EZ} = \vec{AZ} - \vec{AE} = \frac{1}{3} \vec{AD} + \frac{1}{2} \vec{AB} = \frac{1}{3} \vec{\beta} + \frac{1}{2} \vec{\alpha} = \frac{1}{2} \vec{\alpha} + \frac{1}{3} \vec{\beta} \quad (1)$$

$$\vec{Z\Gamma} = \vec{A\Gamma} - \vec{AZ} = \vec{AD} + \vec{D\Gamma} - \frac{1}{3} \vec{AD} = \vec{\beta} + \vec{\alpha} - \frac{1}{3} \vec{\beta} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3} \vec{\beta} \quad (2)$$

$$\beta) \text{ Από } (1) \Rightarrow \vec{Z\Gamma} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3} \vec{\beta} = 2 \left(\frac{1}{2} \vec{\alpha} + \frac{1}{3} \vec{\beta} \right) \stackrel{(1)}{=} 2\vec{EZ}$$

$$\delta) \text{ Αφού } \vec{Z\Gamma} = 2\vec{EZ} \Rightarrow \vec{Z\Gamma} \parallel \vec{EZ} \Rightarrow Z, \Gamma, E \text{ συνευθειακά}$$

ΘΕΜΑ 5ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ, E σημεία εσωτερικά των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\overrightarrow{AB} = \kappa \cdot \overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \cdot \overrightarrow{AE}$, όπου κ και λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, τότε:

- Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
- Αν $\kappa = \lambda$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} \parallel \overrightarrow{\Delta E}$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}| = \kappa |\overrightarrow{\Delta E}|$.
- Αν $\kappa = \lambda = 2$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ και να διατυπώσετε λεκτικά ποιο γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί.

$$\alpha) \quad \overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{A\Gamma} - \frac{1}{\kappa} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{\lambda} \vec{\beta} - \frac{1}{\kappa} \vec{\alpha}$$

$$\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$$

$$\beta) \quad \text{Αν } \kappa = \lambda \quad \text{τότε} \quad \overrightarrow{\Delta E} = \frac{1}{\kappa} \vec{\beta} - \frac{1}{\kappa} \vec{\alpha} = \frac{1}{\kappa} (\vec{\beta} - \vec{\alpha}) = \frac{1}{\kappa} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{B\Gamma} = \kappa \overrightarrow{\Delta E} \Rightarrow B\Gamma \parallel \Delta E \quad \text{και} \quad |\overrightarrow{B\Gamma}| = \kappa \cdot |\overrightarrow{\Delta E}| \xrightarrow{\kappa=2} |\overrightarrow{B\Gamma}| = 2 \cdot |\overrightarrow{\Delta E}|$$

$$\gamma) \quad \text{Αν } \kappa = \lambda = 2 \quad \text{τότε} \quad \overrightarrow{B\Gamma} = 2 \overrightarrow{\Delta E} \Rightarrow B\Gamma \parallel \Delta E, |\overrightarrow{B\Gamma}| = 2 |\overrightarrow{\Delta E}|$$

που σημαίνει ότι το τμήμα που ενώνει τα μέσα 2 πλευρών είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά και ίση με το μισό της.