

Φύλλο εργασίας 10

Μάθημα : Μαθηματικά Προσανατολισμού

Κεφάλαιο : Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

- Ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και συμβολίζουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, τον πραγματικό αριθμό $|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos \phi$. Δηλαδή

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos \phi$$

- Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

Θέμα 1° Αν $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\phi = \frac{2\pi}{3}$ να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

Λύση $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} =$

Θέμα 2° Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{\alpha}^2 = \dots\dots\dots$$

$$\vec{i}^2 = \dots\dots\dots$$

$$\vec{j}^2 = \dots\dots\dots$$

Θέμα 3° Συμπληρώστε τα ☐ δίπλα στις παρακάτω παραστάσεις με Δ αν παριστάνουν διάνυσμα και με Α αν παριστάνουν αριθμό

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \quad \square, \quad (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} \quad \square, \quad (\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}) \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \quad \square, \quad |\vec{\alpha}| \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \quad \square, \quad \vec{\alpha}^2 \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \quad \square,$$

$$\frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}}{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} \quad \square, \quad \vec{\alpha} \cdot (|\vec{\beta}| \cdot \vec{\gamma}) \quad \square, \quad \alpha \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \quad \square, \quad (\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}) \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \quad \square,$$

Θέμα 4° Συμπληρώστε τα ☐ δίπλα στις παρακάτω παραστάσεις με Μ αν εκφράζουν μέτρο και με Α αν εκφράζουν απόλυτο

$$|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \quad \square, \quad |(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}| \quad \square, \quad |(\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}) \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})| \quad \square, \quad ||\vec{\alpha}| \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})| \quad \square, \quad |\vec{\alpha}^2 \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})| \quad \square,$$

Θέμα 5° Συμπληρώστε τα ☐ δίπλα στις παρακάτω παραστάσεις με Δ αν παριστάνουν διάνυσμα, με Α αν παριστάνουν αριθμό και με Χ αν δεν έχουν νόημα και να αναφέρεται υπό ποιες προϋποθέσεις ορίζονται.

$$\frac{\vec{\alpha}}{\vec{\beta}} \quad \square, \quad \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}}{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} \quad \square, \quad \frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}) \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})}{\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}} \quad \square, \quad \frac{\vec{\alpha}^2 \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})}{\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}} \quad \square, \quad \frac{\vec{\alpha}}{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} \quad \square$$

$$\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\beta}|} \quad \square, \quad \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}} \quad \square, \quad \frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \cdot \vec{\delta}}{\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}} \quad \square, \quad \frac{\vec{\alpha}^2 \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})}{|\vec{\alpha}| \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})} \quad \square, \quad \frac{\vec{\alpha}^2}{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} \quad \square$$

- Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$. Είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \dots\dots\dots$

Θέμα 6° Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, -2)$, $\vec{\beta} = (-4, 3)$ Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

Λύση $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \dots\dots\dots$

Θέμα 7° Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (9, \kappa)$, $\vec{\beta} = (\kappa, 1)$ Να βρείτε την τιμή του κ ώστε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

Λύση $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow$

- Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου, τότε $\text{syn}(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}}) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$.

Θέμα 8° Αν $\vec{\alpha} = (1, -2)$ και $\vec{\beta} = (-3, 1)$ να βρείτε τη γωνία $(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}})$

Λύση $\text{syn}(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}}) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ οπότε $(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}}) = \dots\dots\dots$

- $\lambda \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = \lambda (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}), \lambda \in \mathbf{R}$
- $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ (Επιμεριστική Ιδιότητα)
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$ όπου $\lambda_1 = \lambda_{\vec{\alpha}}$ και $\lambda_2 = \lambda_{\vec{\beta}}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \nparallel \mathbf{y}'\mathbf{y}$

Απόδειξη Πράγματι, αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ και $\vec{\gamma} = (x_3, y_3)$, τότε έχουμε:

• $(\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} =$

$\vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) =$

• $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) =$

• $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow$

Θέμα 9° Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ ή Λ

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$ ☐, $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ ☐, $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}) \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot (\vec{\delta} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ ☐, $|\vec{\alpha}| \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = (|\vec{\alpha}| \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ ☐

$\vec{\alpha}^2 \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ ☐, $\frac{\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})}{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}}{\vec{\beta}}$ ☐, $\frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}) \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})}{\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}} = \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$ ☐, $\frac{\vec{\alpha}^2 \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})}{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} = \frac{\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})}{\vec{\beta}}$ ☐

$|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ ☐, $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2$ ☐, $\vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}^3$ ☐, $\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}} = \frac{\vec{\alpha}}{\vec{\gamma}}$ ☐, $(|\vec{\alpha}| \cdot \vec{\beta})^2 = |\vec{\alpha}|^2 \cdot \vec{\beta}^2$ ☐

$[(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}] \cdot \vec{\delta} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot (\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta})$ ☐, $\vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2 \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$ ☐, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$ ή $\vec{\gamma} = \vec{0}$ ☐