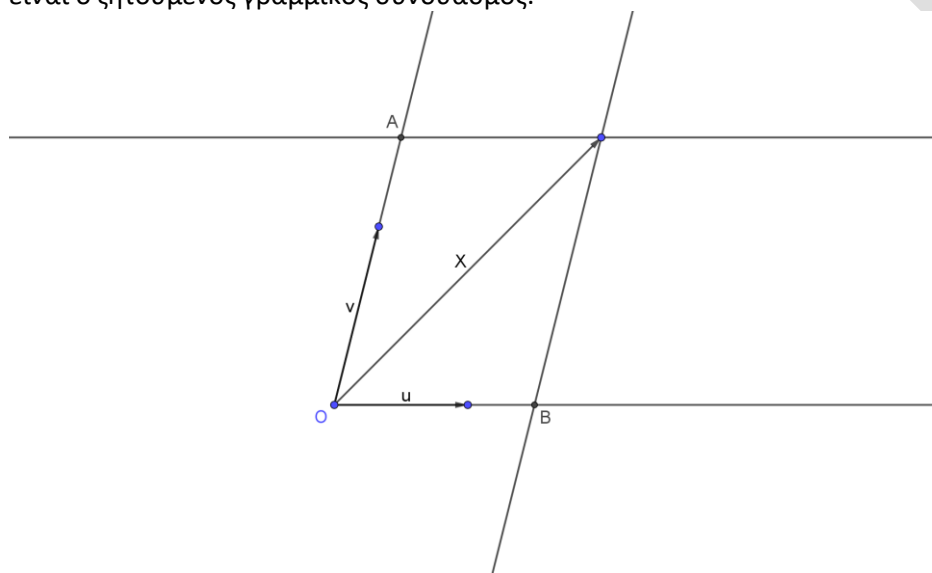


## Φύλλο εργασίας 6

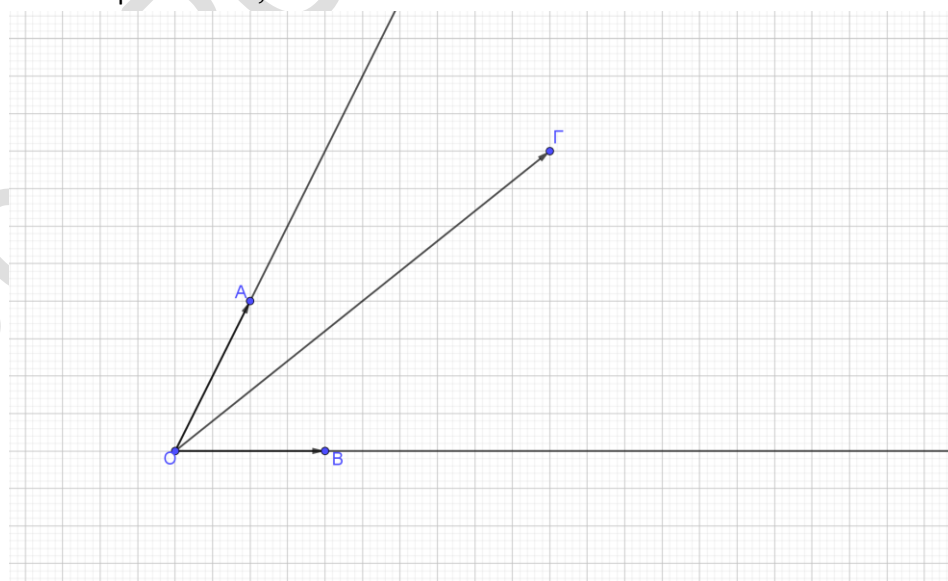
Μάθημα : **Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου**Κεφάλαιο : **Ανάλυση σε συνιστώσες**

Κάθε διάνυσμα  $\vec{x}$  μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός δύο μη συγγραμμικών διανυσμάτων  $\vec{u}, \vec{v}$  ή όπως λέμε να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες κατά τη διεύθυνση των  $\vec{u}, \vec{v}$  με την εξής διαδικασία :

Γράφουμε τα διανύσματα  $\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}$  με κοινή αρχή  $O$  και από το πέρας του  $\vec{x}$  φέρνουμε ευθείες παράλληλες προς τα  $\vec{u}, \vec{v}$  που τέμνουν τους φορείς των  $\vec{v}, \vec{u}$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα. Τα διανύσματα  $\vec{OA}, \vec{OB}$  είναι οι ζητούμενες συνιστώσες και επειδή είναι παράλληλα στα  $\vec{u}, \vec{v}$  είναι  $\vec{OA} = \kappa \cdot \vec{v}, \vec{OB} = \lambda \cdot \vec{u}$ , οπότε  $\vec{x} = \vec{OA} + \vec{OB} = \kappa \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{u}$  που είναι ο ζητούμενος γραμμικός συνδυασμός.

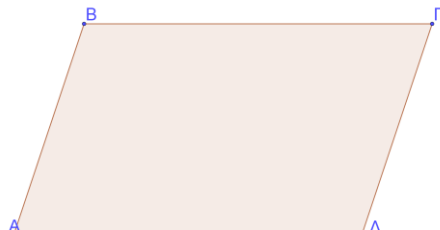


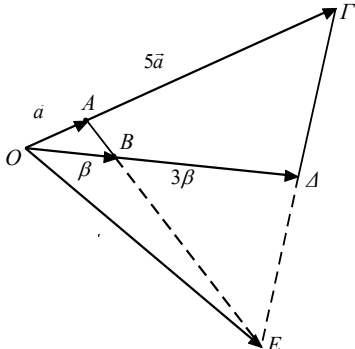
**Θέμα 1ο** Με βάση το παρακάτω σχήμα να γράψετε το διάνυσμα  $\vec{OG}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{OA}, \vec{OB}$



|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Αν <math>\vec{\alpha}, \vec{\beta}</math> είναι δύο μη συγγραμμικά διανύσματα (δηλαδή όχι παράλληλα) και ισχύει ότι <math>\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0}</math>, <math>\kappa, \lambda \in \mathbb{R}</math>, τότε <math>\kappa = \lambda = 0</math>.</p> <p><b>Απόδειξη</b></p> <p>Αν <math>\kappa \neq 0</math> τότε από τη δοσμένη σχέση έχουμε <math>\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow \kappa\vec{\alpha} = -\lambda\vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} = -\frac{\lambda}{\kappa}\vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}</math> πράγμα άτοπο αφού <math>\vec{\alpha}, \vec{\beta}</math> είναι μη συγγραμμικά.</p> <p>Συνεπώς <math>\kappa = 0</math> οπότε πάλι από τη δοσμένη σχέση έχουμε <math>\lambda\vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0</math> ή <math>\vec{\beta} = \vec{0}</math></p> <p>Αν όμως ίσχυε ότι <math>\vec{\beta} = \vec{0}</math> τότε θα ήταν <math>\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}</math>, δεδομένου ότι το μηδενικό διάνυσμα θεωρείται παράλληλο σε κάθε διάνυσμα, πράγμα πάλι άτοπο. Συνεπώς πρέπει <math>\lambda = 0</math> οπότε τελικά <math>\kappa = \lambda = 0</math>.</p> | <p>Κάθε διάνυσμα <math>\vec{x}</math> γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός δύο μη συγγραμμικών διανυσμάτων <math>\vec{u}, \vec{v}</math> <b>Απόδειξη</b></p> <p>Περιγράψαμε παραπάνω τη διαδικασία κατά την οποία το διάνυσμα <math>\vec{x}</math> γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των μη συγγραμμικών διανυσμάτων <math>\vec{u}, \vec{v}</math>. Θα δείξουμε τώρα ότι ο γραμμικός αυτός συνδυασμός είναι μοναδικός. Έστω λοιπόν ότι <math>\vec{x} = \kappa \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{u}</math> και <math>\vec{x} = \kappa' \cdot \vec{v} + \lambda' \cdot \vec{u}</math>. Τότε <math>\kappa \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{u} = \kappa' \cdot \vec{v} + \lambda' \cdot \vec{u} \Rightarrow \kappa \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{u} - \kappa' \cdot \vec{v} - \lambda' \cdot \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow (\kappa - \kappa') \cdot \vec{v} + (\lambda - \lambda') \cdot \vec{u} = \vec{0}</math></p> <p>Και επειδή <math>\vec{u}, \vec{v}</math> μη συγγραμμικά θα πρέπει <math>\kappa - \kappa' = 0</math> και <math>\lambda - \lambda' = 0</math> δηλαδή <math>\kappa = \kappa'</math> και <math>\lambda = \lambda'</math>.</p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                                                                    |                                                                               |                                                                                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Θέμα 2ο</b> Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο μη συγγραμμικά διανύσματα να βρείτε τους αριθμούς $\kappa, \lambda$ στις διπλανές ισότητες | $(\kappa - 2) \cdot \vec{\alpha} + (\lambda - 3) \cdot \vec{\beta} = \vec{0}$ | $(\kappa + 2) \cdot \vec{\alpha} + (\lambda + 3) \cdot \vec{\beta} = 2 \cdot \vec{\alpha} - 5 \cdot \vec{\beta}$ |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Θέμα 3ο</b> Δίνεται παραλληλόγραμμο <math>AB\Gamma\Delta</math> . Να προσδιοριστούν οι <math>\chi, \psi \in \mathbb{R}</math> ώστε να ισχύει η σχέση <math>\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{A\Delta} = \chi\overrightarrow{A\Gamma} + \psi\overrightarrow{B\Delta}</math></p> |  |
| <p><b>Υπόδειξη :</b> Επιλέγουμε δύο μη συγγραμμικά διανύσματα και εκφράζουμε όλα τα διανύσματα της δοσμένης σχέσης ως γραμμικό συνδυασμό αυτών.</p>                                                                                                                                       |                                                                                       |
| <p><b>Λύση</b></p>                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                       |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Θέμα 4ο</b> Τα σημεία <math>A, B, \Gamma</math> και <math>\Delta</math> ενός επιπέδου έχουν διανύσματα θέσεως <math>\vec{\alpha}, \vec{\beta}, 5\vec{\alpha}</math> και <math>3\vec{\beta}</math> αντιστοίχως, όπου τα διανύσματα <math>\vec{\alpha}</math> και <math>\vec{\beta}</math> είναι μη συγγραμμικά. Να βρείτε το διάνυσμα θέσεως <math>\vec{r}</math> του σημείου τομής των ευθειών <math>AB</math> και <math>\Gamma\Delta</math>.</p> <p><b>Λύση</b></p> |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|