

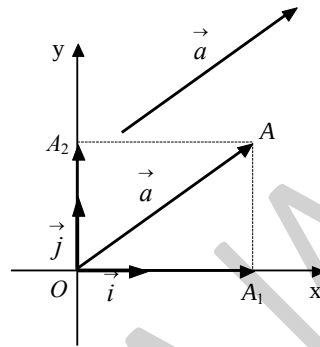
Φύλλο εργασίας 7

Μάθημα : Μαθηματικά Προσανατολισμού

Κεφάλαιο : Συντεταγμένες στο επίπεδο

• Καρτεσιανό Επίπεδο

Πάνω σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή O και μοναδιαία διανύσματα τα $\vec{i}$ και $\vec{j}$. Λέμε τότε ότι έχουμε ένα **ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** ή απλούστερα ένα **σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** ή ακόμα ένα **καρτεσιανό επίπεδο** και το συμβολίζουμε με Oxy .



• Συντεταγμένες διανύσματος

Κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{i}, \vec{j}$ δηλαδή στη μορφή $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$. Τα διανύσματα $x \cdot \vec{i}, y \cdot \vec{j}$ λέγονται συνιστώσες του $\vec{a}$. Ο x λέγεται τετμημένη του $\vec{a}$ και ο y τεταγμένη του $\vec{a}$ ενώ και οι δυο μαζί λέγονται συντεταγμένες του $\vec{a}$. Συμβολίζουμε $\vec{a} = (x, y)$.

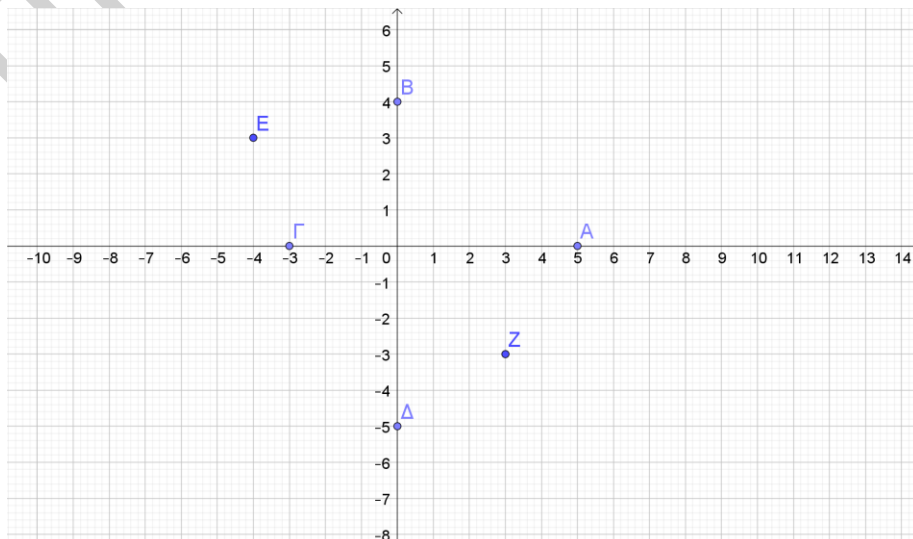
Θέμα 1ο Να βρείτε τις συν/νες του $\vec{a}$ στις παρακάτω περιπτώσεις

$$\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} \Rightarrow \vec{a} = (\dots, \dots), \quad \vec{a} = 2 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} \Rightarrow \vec{a} = (\dots, \dots)$$

$$\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} \Rightarrow \vec{a} = (\dots, \dots), \quad \vec{a} = -3 \cdot \vec{j} \Rightarrow \vec{a} = (\dots, \dots)$$

$$\vec{a} = \vec{OA}, \text{ όπου } A(-2, 3) \Rightarrow \vec{a} = (\dots, \dots)$$

Θέμα 2ο Με βάση το παρακάτω σχήμα να εκφράσετε ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{i}, \vec{j}$ τα διανύσματα θέσης των σημείων A, B, Γ, Δ, E, Z και των $\vec{AE}, \vec{BZ}, \vec{\Gamma\Delta}, \vec{AB}, \vec{Z\Delta}$



- Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συν/νες τους είναι ίσες και αντίθετα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συν/νες τους είναι αντίθετες, δηλαδή αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε

$$\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \dots = \dots \text{ και } \dots = \dots$$

$$\vec{\alpha} = -\vec{\beta} \Leftrightarrow \dots = \dots \text{ και } \dots = \dots$$

$$\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \dots = \dots \text{ και } \dots = \dots$$

Θέμα 3ο Δίνονται τα $\vec{\alpha} = (\kappa - 2, \lambda - 1)$ και $\vec{\beta} = (2, -3)$. Να βρείτε τα κ, λ στις παρακάτω περιπτώσεις

$$\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \dots = \dots \text{ και } \dots = \dots$$

$$\vec{\alpha} = -\vec{\beta} \Leftrightarrow \dots = \dots \text{ και } \dots = \dots$$

$$\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \dots = \dots \text{ και } \dots = \dots$$

- Συντεταγμένες γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων**

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (\dots, \dots)$$

$$\lambda \cdot \vec{\alpha} = (\dots, \dots)$$

$$\lambda \cdot \vec{\alpha} + \mu \cdot \vec{\beta} = (\dots, \dots)$$

Θέμα 4ο Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-3, 4)$ και $\vec{\beta} = (2, -1)$.

A) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων :

$$3\vec{\alpha}, -2\vec{\beta}, \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} - \vec{\beta}, 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$$

$$3\vec{\alpha} =$$

$$-2\vec{\beta} =$$

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} =$$

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} =$$

$$3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} =$$

B) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (-3, 5)$ ως γραμμικός συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

Λύση

- Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τότε
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (\dots, \dots) - (\dots, \dots) = (\dots, \dots)$

Θέμα 5ο Να βρείτε τις συν/νες του $\overrightarrow{AB}$ στις παρακάτω περιπτώσεις

ι) $A(2, 3)$ και $B(4, -1)$ ιι) $A(-2, 3)$ και $B(-5, 3)$
 $\overrightarrow{AB} = (\dots, \dots) = (\dots, \dots)$, $\overrightarrow{AB} = (\dots, \dots) = (\dots, \dots)$

- Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ και M το μέσο του AB τότε

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} = \frac{(\dots, \dots) + (\dots, \dots)}{2} = (\dots, \dots) \text{ οπότε}$$

$M(\dots, \dots)$

Θέμα 6ο

1. Αν $A(3, 5)$ και $B(7, -2)$ να βρείτε τις συν/νες του μέσου M του AB

Λύση $M(\dots, \dots)$

2. Να βρείτε τις συν/νες του συμμετρικού του σημείου $A(1, 2)$ ως προς το $O(3, 5)$

Λύση

Έστω $A'(x, y)$ το συμμετρικό του A ως προς το O . Τότε

- Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$ τότε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Θέμα 7ο Αν $\vec{\alpha} = (-3, 4)$ και $\vec{\beta} = (2, -3)$ να βρείτε τα

$|\vec{\alpha}|$, $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$, $|-2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}|$

Λύση

Θέμα 8ο Αν $\vec{\alpha} = (8, 4 - |\vec{\alpha}|)$ να βρείτε το $|\vec{\alpha}|$

Λύση

- Αν $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ τότε $(AB) = |\overline{AB}| = \sqrt{(\dots - \dots)^2 + (\dots - \dots)^2}$

Θέμα 9ο Αν $A(2,3)$ και $B(5,-1)$ να βρείτε την απόσταση των A και B

Λύση $(AB) = \sqrt{(\dots - \dots)^2 + (\dots - \dots)^2} =$

- Αν $A(x, y)$ τότε $d(A, xx') = |y|$, $d(A, yy') = |x|$

Θέμα 10ο Αν $A(-2,-3)$ να βρείτε τις αποστάσεις του A από τους άξονες xx' και yy'

Λύση $d(A, xx') = | \quad | =$, $d(A, yy') = | \quad | =$

- Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$ τότε $\vec{\alpha} // xx' \Leftrightarrow y = 0$, $\vec{\alpha} // yy' \Leftrightarrow x = 0$

Θέμα 11ο Αν $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 2\lambda, \lambda^2 - 4)$ να βρείτε το λ στις παρακάτω περιπτώσεις

- i) $\vec{\alpha} = \vec{0}$, ii) $\vec{\alpha} // xx'$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, iii) $\vec{\alpha} // yy'$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$

Λύση

• Συμμετρικά σημεία

- Το συμμετρικό του $A(\alpha, \beta)$ ως προς xx' είναι το $A_x(\alpha, -\beta)$.
- Το συμμετρικό του $A(\alpha, \beta)$ ως προς yy' είναι το $A_y(-\alpha, \beta)$.
- Το συμμετρικό του $A(\alpha, \beta)$ ως προς O είναι το $A_o(-\alpha, -\beta)$.
- Το συμμετρικό του $A(\alpha, \beta)$ ως προς τη διχοτόμο της $1^{η}$ και $3^{η}$ γωνίας δηλαδή της ευθείας $\psi = \chi$ είναι το $A'(\beta, \alpha)$.
- Το συμμετρικό του $A(\alpha, \beta)$ ως προς τη διχοτόμο της $2^{η}$ και $4^{η}$ γωνίας δηλαδή της ευθείας $\psi = -\chi$ είναι το $A'(-\beta, -\alpha)$.

Θέμα 12ο Δίνεται το σημείο $M(-3, 4)$

Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου M ως προς

- τον άξονα xx'
- τον άξονα yy'
- την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων
- τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{xOy}$
- τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{xOy'}$