

Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

ΘΕΜΑ 3

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < \alpha^3 < \alpha$.

(Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}.$$

(Μονάδες 12)

6 A

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < 1 &\stackrel{\cdot \alpha^2 > 0}{\Leftrightarrow} \\ 0 < \alpha^3 < \alpha^2 &\quad (1) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < 1 &\stackrel{\cdot \alpha > 0}{\Leftrightarrow} \\ 0 < \alpha^2 < \alpha &\quad (2) \end{aligned}$$

Από (1) και (2) έχουμε $0 < \alpha^3 < \alpha$.

β) Από το δεδομένο και το α) ερώτημα έχουμε $0 < \alpha^3 < \alpha < 1$. Επιπλέον επειδή ο α είναι θετικός αριθμός, ομόσημος του 1 δηλαδή, έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} \alpha < 1 &\Leftrightarrow \\ \frac{1}{\alpha} &> 1. \end{aligned}$$

Τελικά $0 < \alpha^3 < \alpha < 1 < \frac{1}{\alpha}$.

ΘΕΜΑ 2

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα.

Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 12)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 13)

7 A

ΛΥΣΗ

α) Η περίμετρος ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι $\Pi = 2x + 2y$. Τότε:

$$4 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow 2 \cdot 4 \leq 2x \leq 2 \cdot 7 \Leftrightarrow 8 \leq 2x \leq 14 \quad (1) \quad \text{και}$$

$$2 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 \leq 2y \leq 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 4 \leq 2y \leq 6 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$8 + 4 \leq 2x + 2y \leq 14 + 6 \Leftrightarrow 12 \leq \Pi \leq 20.$$

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί η νέα περίμετρος θα είναι:

$$P = 2(x - 1) + 2 \cdot 3y = 2x + 6y - 2. \text{ Τότε:}$$

$$2 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow 6 \cdot 2 \leq 6y \leq 6 \cdot 3 \Leftrightarrow 12 \leq 6y \leq 18$$

$$\Leftrightarrow 12 - 2 \leq 6y - 2 \leq 18 - 2 \Leftrightarrow 10 \leq 6y - 2 \leq 16 \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (3) και βρίσκουμε:

$$8 + 10 \leq 2x + 6y - 2 \leq 14 + 16 \Leftrightarrow 18 \leq P \leq 30.$$

ΘΕΜΑ 2

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha - \beta$.

(Μονάδες 13)

8 Α

ΛΥΣΗ

α) Είναι $2 \leq \alpha \leq 4$ (1)

και

$$-4 \leq \beta \leq -3, \text{ οπότε}$$

$$-4 \cdot 2 \leq \beta \cdot 2 \leq -3 \cdot 2, \text{ και τελικά}$$

$$-8 \leq 2\beta \leq -6 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2), και έχουμε:

$$2 - 8 \leq \alpha + 2\beta \leq 4 - 6, \text{ οπότε τελικά}$$

$$-6 \leq \alpha + 2\beta \leq -2.$$

β) Επειδή δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη, η παράσταση $\alpha - \beta$ γράφεται $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Είναι $2 \leq \alpha \leq 4$ (1)

και

$-4 \leq \beta \leq -3$, οπότε πολ/ζουμε με (-1) τα μέλη της ανισότητας και αυτή αλλάζει φορά

$$-4 \cdot (-1) \geq \beta \cdot (-1) \geq -3 \cdot (-1),$$

$$4 \geq -\beta \geq 3 \text{ και τελικά}$$

$$3 \leq -\beta \leq 4 \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (3), και έχουμε:

$$2 + 3 \leq \alpha - \beta \leq 4 + 4, \text{ οπότε τελικά}$$

$$5 \leq \alpha - \beta \leq 8.$$