

Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = |x-1| + |y-3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$.

(Μονάδες 12)

β) $0 < A < 4$.

(Μονάδες 13)

1 Α

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$1 < x < 4 \Leftrightarrow 1 < x \text{ και } x < 4 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \text{ και } x - 4 < 0$$

$$\text{Άρα } |x - 1| = x - 1$$

Ισχύει ακόμα:

$$2 < y < 3 \Leftrightarrow 2 < y \text{ και } y < 3 \Leftrightarrow y - 2 > 0 \text{ και } y - 3 < 0$$

$$\text{Άρα } |y - 3| = -(y - 3) = 3 - y$$

Τότε:

$$A = |x - 1| + |y - 3| = x - 1 + 3 - y = x - y + 2$$

β) Είναι $1 < x < 4$ (1) και:

$$\begin{aligned} 2 < y < 3 &\Leftrightarrow -2 > -y > -3 \Leftrightarrow -3 < -y < -2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -3 + 2 < -y + 2 < -2 + 2 \Leftrightarrow -1 < -y + 2 < 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1), (2) και βρίσκουμε:

$$1 - 1 < x - y + 2 < 4 + 0 \Leftrightarrow 0 < x - y + 2 < 4$$

$$\text{Άρα } 0 < A < 4$$

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να δείξετε ότι $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$ (1).

(Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

2 Α

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2, \text{ οπότε}$$

$$\frac{|\alpha|}{|\beta|} + \frac{|\beta|}{|\alpha|} \geq 2, \text{ δηλαδή}$$

$$\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{|\alpha| \cdot |\beta|} \geq 2, \text{ οπότε}$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 \geq 2|\alpha| \cdot |\beta|, \text{ συνεπώς}$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha| \cdot |\beta| \geq 0 \text{ και τελικά}$$

$$(|\alpha| - |\beta|)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

β) Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $|\alpha| - |\beta| = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = |\beta|$, δηλαδή αν και μόνο αν $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$ (δηλαδή όταν οι αριθμοί α, β είναι ίσοι ή αντίθετοι).

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$.

(Μονάδες 15)

β) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $|\alpha| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$.

(Μονάδες 10)

3 Α

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2 \stackrel{\alpha < 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\alpha^2 + \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \geq -2\alpha, \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha^2 + 1 + 2\alpha \geq 0, \text{ οπότε}$$

$$(\alpha + 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$|\alpha| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2 \stackrel{\alpha < 0}{\Leftrightarrow}$$

$$-\alpha - \frac{1}{\alpha} \geq 2, \text{ οπότε}$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2, \text{ που από το α) ερώτημα ισχύει για κάθε } \alpha < 0.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία A , B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2 , 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x+2|$

(Μονάδες 4)

ii) $|x-7|$

(Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$$|x+2|+|x-7|.$$

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x+2| + |x-7|$ γεωμετρικά.

(Μονάδες 5)

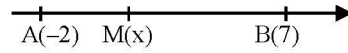
δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

(Μονάδες 7)

4 A

ΛΥΣΗ

α) Αφού $-2 < x < 7$ το σημείο M θα βρίσκεται μεταξύ των σημείων A και B όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



i) $|x+2| = d(x, -2) = (MA)$, δηλαδή εκφράζει την απόσταση του σημείου M από το σημείο A.

ii) $|x-7| = d(x, 7) = (MB)$, δηλαδή εκφράζει την απόσταση του σημείου M από το σημείο B.

β) Είναι $|x+2| + |x-7| = (MA) + (MB) = (AB)$.

γ) Είναι $A = |x+2| + |x-7| = (AB) = d(-2, 7) = |-2-7| = |-9| = 9$.

δ) Αφού $-2 < x < 7$ είναι: $x+2 > 0$ οπότε $|x+2| = x+2$ και

$$x-7 < 0 \text{ οπότε } |x-7| = -x+7.$$

Επομένως $A = |x+2| + |x-7| = x+2 - x+7 = 9$.

ΘΕΜΑ 2

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς τις απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$$

(Μονάδες 15)

5 Α

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι:

$$5 < x < 10 \Leftrightarrow (5 < x \text{ και } x < 10) \Leftrightarrow (0 < x - 5 \text{ και } x - 10 < 0)$$

Τότε:

$$|x - 5| = x - 5 \text{ και } |x - 10| = -(x - 10)$$

β) Είναι:

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10} = \frac{x-5}{x-5} + \frac{-(x-10)}{x-10} = 1 + (-1) = 0$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A = |3x - 6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$.

ii. για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$

(Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4.$$

(Μονάδες 13)

8 Α

ΛΥΣΗ

α)

i. Ισχύει ότι:

$$x \geq 2 \Leftrightarrow 3x \geq 3 \cdot 2 \Leftrightarrow 3x \geq 6 \Leftrightarrow 3x - 6 \geq 0.$$

$$\text{Άρα } |3x - 6| = 3x - 6.$$

Τότε:

$$A = |3x - 6| + 2 = 3x - 6 + 2 = 3x - 4.$$

ii. Ισχύει ότι:

$$x < 2 \Leftrightarrow 3x < 3 \cdot 2 \Leftrightarrow 3x < 6 \Leftrightarrow 3x - 6 < 0.$$

$$\text{Άρα } |3x - 6| = -(3x - 6) = 6 - 3x.$$

Τότε:

$$A = |3x - 6| + 2 = 6 - 3x + 2 = 8 - 3x.$$

β) Για κάθε $x \geq 2$ είναι $|3x - 6| = 3x - 6$. Τότε:

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = \frac{(3x)^2 - 4^2}{3x - 6 + 2} = \frac{(3x - 4)(3x + 4)}{3x - 4} = 3x + 4.$$

ΘΕΜΑ 2

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x .

(Μονάδες 13)

9 Α

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$d(2x, 3) = 3 - 2x \Leftrightarrow |2x - 3| = 3 - 2x \Leftrightarrow |2x - 3| = -(2x - 3) \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$|a| = -a \Leftrightarrow a \leq 0$$

Τότε από τη σχέση (1) ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$|2x - 3| = -(2x - 3) \Leftrightarrow 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

β) Επειδή ισχύει $x \leq \frac{3}{2}$ είναι $2x - 3 \leq 0$ και $3 - x > 0$. Τότε:

$$|2x - 3| = -(2x - 3) \text{ και } |3 - x| = 3 - x$$

Επομένως η παράσταση K γράφεται:

$$K = |2x - 3| - 2|3 - x| = -(2x - 3) - 2(3 - x) = 3 - 2x - 6 + 2x = -3$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει:

$$(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$$

α) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α και β .

(Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|.$$

(Μονάδες 12)

10 Α

ΛΥΣΗ

α) Αφού $(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$, οι $(\alpha - 1)$ και $(1 - \beta)$ είναι ομόσημοι, οπότε:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha - 1 > 0 \\ \text{και} \\ 1 - \beta > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha > 1 \\ \text{και} \\ \beta < 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \beta < 1 < \alpha$$

ή

$$\left. \begin{array}{l} \alpha - 1 < 0 \\ \text{και} \\ 1 - \beta < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha < 1 \\ \text{και} \\ \beta > 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \alpha < 1 < \beta$$

Σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των α και β .

β) Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

i. Αν $\beta < 1 < \alpha$, τότε:

$$0 < \alpha - 1 \Rightarrow |\alpha - 1| = \alpha - 1,$$

$$0 < 1 - \beta \Rightarrow |1 - \beta| = 1 - \beta \text{ και}$$

$$\beta - \alpha < 0 \Rightarrow |\beta - \alpha| = \alpha - \beta \text{ άρα,}$$

$$|\beta - \alpha| = 4 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 4.$$

$$\text{Οπότε: } K = |\alpha - 1| + |1 - \beta| = \alpha - 1 + 1 - \beta = \alpha - \beta = 4.$$

ii. Αν $\alpha < 1 < \beta$, τότε:

$$\alpha - 1 < 0 \Rightarrow |\alpha - 1| = 1 - \alpha,$$

$$1 - \beta < 0 \Rightarrow |1 - \beta| = \beta - 1 \text{ και}$$

$$\beta - \alpha > 0 \Rightarrow |\beta - \alpha| = \beta - \alpha \text{ άρα,}$$

$$|\beta - \alpha| = 4 \Leftrightarrow \beta - \alpha = 4.$$

$$\text{Οπότε: } K = |\alpha - 1| + |1 - \beta| = 1 - \alpha + \beta - 1 = \beta - \alpha = 4.$$