

Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$.

(Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\sqrt{2}, 1, \sqrt[3]{2}$$

(Μονάδες 12)

1 Α

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$A - B = (\sqrt{2})^6 - (\sqrt[3]{2})^6 = \left[(\sqrt{2})^2 \right]^3 - \left[(\sqrt[3]{2})^3 \right]^2 = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$$

β) Ισχύει ότι:

$$1 < 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow 1 < \sqrt[3]{2} \quad (1)$$

Και

$$A - B = 4 > 0 \Leftrightarrow A > B \Leftrightarrow (\sqrt{2})^6 > (\sqrt[3]{2})^6 \Leftrightarrow \sqrt{2} > \sqrt[3]{2} \quad (2)$$

Από τις ανισώσεις (1), (2) βρίσκουμε:

$$1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Μονάδες 12)

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

(Μονάδες 13)

7 Α

Λύση

α) Ισχύει ότι:

$$K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3} = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2} - \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} = \frac{|x+2|}{x+2} - \frac{|x-3|}{x-3}.$$

Η παράσταση K έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} x+2 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 3 \end{cases}.$$

Οπότε πρέπει $x \neq -2, 3$.

β) Ισχύει ότι: $-2 < x < 3$, οπότε $x+2 > 0$ και $x-3 < 0$.

Άρα $|x+2| = x+2$ και $|x-3| = -(x-3)$.

Οπότε $K = \frac{|x+2|}{x+2} - \frac{|x-3|}{x-3} = \frac{x+2}{x+2} - \frac{-(x-3)}{x-3} = 1+1=2$, που είναι ανεξάρτητη του x .

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $2 < \sqrt{5}$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$.

(Μονάδες 8)

9 Α

ΛΥΣΗ

α) Καθώς είναι $2 = \sqrt{4}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\sqrt{4} < \sqrt{5}$, το οποίο όμως είναι αληθές αφού $4 < 5$.

β) Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του τετραγώνου διαφοράς, παίρνουμε

$$(2 - \sqrt{5})^2 = 2^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 + (\sqrt{5})^2 = 5 - 4\sqrt{5} + 4 = 9 - 4\sqrt{5}.$$

γ) Με χρήση των ερωτημάτων α) και β) έχουμε:

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2, \text{ αφού } 2 < \sqrt{5} \Leftrightarrow 2 - \sqrt{5} < 0.$$

ΘΕΜΑ 2

Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

(Μονάδες 13)

10 Α

α) Είναι:

$$A \cdot B = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1.$$

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\Pi &= A^2 + B^2 \\ &= (2 - \sqrt{3})^2 + (2 + \sqrt{3})^2 \\ &= 2^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + 2^2 + 2 \cdot 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\ &= 4 + 3 + 4 + 3 = 14.\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2

Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[5]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$.

(Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A , B .

(Μονάδες 10)

11 Α

α) Είναι:

$$\begin{aligned} A \cdot B \cdot \Gamma &= \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{5} = \\ &= 5^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3} \cdot 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt{3} \cdot 5^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} \\ &= \sqrt{3} \cdot 5^{\frac{2}{6}} = \sqrt{3} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}. \end{aligned}$$

β) Είναι:

$$A = \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25} \text{ και } B = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}.$$

Ισχύει ότι:

$$25 < 27 \Leftrightarrow \sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{27} \Leftrightarrow A < B.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

(Μονάδες 07)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;

(Μονάδες 08)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$.

(Μονάδες 10)

12 Α

α) Η παράσταση Α ορίζεται για εκείνες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x που ισχύει:

$$(x - 2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

β) Η παράσταση Β ορίζεται για εκείνες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x που ισχύει:

$$(2 - x)^3 \geq 0 \Leftrightarrow 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq 2.$$

γ) Για κάθε $x \leq 2$, είναι:

$$A = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = -(x-2) = 2-x \text{ και } B = \sqrt[3]{(2-x)^3} = 2-x.$$

Άρα $A = B$.

α) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα $(2 + \sqrt{5})^2$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9 - 4\sqrt{5}$ και $9 + 4\sqrt{5}$

(Μονάδες 13)

13 Α

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$(2 - \sqrt{5})^2 = 4 - 4\sqrt{5} + \sqrt{5}^2 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = 9 - 4\sqrt{5}$$

Ομοίως έχουμε:

$$(2 + \sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + \sqrt{5}^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$$

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$$

αφού ο αριθμός $2 - \sqrt{5}$ είναι αρνητικός οπότε $|2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$.

Επίσης, $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} = |2 + \sqrt{5}| = 2 + \sqrt{5}$, αφού ο αριθμός $2 + \sqrt{5}$ είναι θετικός, οπότε

$$|2 + \sqrt{5}| = 2 + \sqrt{5}.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ και $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - \beta^2$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $A = 4\sqrt{2}$ και $B = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 10)

14 Α

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $A = \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = (1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2}) \cdot (1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2}$.

β) Έχουμε $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2} = |\alpha| - |\beta| = (1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1) = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 = 2$.

γ) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2} \stackrel{\alpha, \beta}{\Leftrightarrow}$$

$$\sqrt{A} > B \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{4\sqrt{2}} > 2 \Leftrightarrow$$

$$4\sqrt{2} > 4 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2} > 1 \Leftrightarrow$$

$$2 > 1, \text{ που ισχύει.}$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ και $(1 - \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}.$$

(Μονάδες 12)

15 Α

Λύση

α) Έχουμε ότι:

$$(2 + \sqrt{5})^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$$

και

$$(1 - \sqrt{5})^2 = 1^2 - 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 1 - 2\sqrt{5} + 5 = 6 - 2\sqrt{5}$$

β) Από το ερώτημα α) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} &= \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} = \\ &= |2 + \sqrt{5}| + |1 - \sqrt{5}|. \end{aligned}$$

Αλλά $1 < 5 \Rightarrow 1 < \sqrt{5} \Rightarrow 1 - \sqrt{5} < 0$. Οπότε, $|1 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 1$.

Άρα,

$$|2 + \sqrt{5}| + |1 - \sqrt{5}| = 2 + \sqrt{5} + \sqrt{5} - 1 = 1 + 2\sqrt{5}.$$