

Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

1

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x = \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις.

(Μονάδες 9)

β)

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μια και μοναδική λύση.

(Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) να ισούται με 4.

(Μονάδες 8)

1 A

ΛΥΣΗ

α) Για $\lambda = 0$, η εξίσωση γίνεται: $-1x = -1$.

Για $\lambda = 1$, η εξίσωση γίνεται: $0x = 0$.

Για $\lambda = 3$, η εξίσωση γίνεται: $2x = 8$.

β)

i. Η (1) έχει μια και μοναδική λύση αν και μόνο αν $\lambda - 1 \neq 0$, δηλαδή $\lambda \neq 1$.

ii. Για $\lambda \neq 1$, η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι: $x = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda - 1} = \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}{\lambda - 1} = \lambda + 1$. Η λύση

ισούται με 4, οπότε $\lambda + 1 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 3$. Άρα για $\lambda = 3$ η λύση της εξίσωσης ισούται με 4.

3

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$, με x πραγματικό αριθμό.

α) Να αποδείξετε ότι αν $2 \leq x < 3$, τότε $A + B = x - 1$.

(Μονάδες 16)

β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

3 Α

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$2 \leq x < 3 \Leftrightarrow x \geq 2 \text{ και } x < 3 \Leftrightarrow 2x \geq 4 \text{ και } x - 3 < 0 \Leftrightarrow 2x - 4 \geq 0 \text{ και } x - 3 < 0.$$

Τότε:

$$A = |2x - 4| = 2x - 4 \text{ και } B = |x - 3| = -(x - 3) = 3 - x.$$

Επομένως:

$$A + B = 2x - 4 + 3 - x = x - 1.$$

β) Είναι:

$$A + B = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3,$$

το οποίο είναι αδύνατο, διότι $x \in [2, 3)$.

Επομένως, δεν υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$.

4

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $kx + 3 = 2x$, με παράμετρο $k \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση για $k = 1$ και για $k = 3$.

(Μονάδες 13)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη για $k = 2$.

(Μονάδες 12)

4 Α

ΛΥΣΗ

α) Θα λύσουμε την εξίσωση $kx + 3 = 2x$ για $k = 1$, οπότε: $x + 3 = 2x \Leftrightarrow x = 3$.

Για $k = 3$ έχουμε $3x + 3 = 2x \Leftrightarrow x = -3$.

β) Για $k = 2$ η εξίσωση γίνεται $2x + 3 = 2x \Leftrightarrow 0x = 3$, που είναι αδύνατη.

5

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

(Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

5 A

α) Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$\begin{aligned}\lambda x &= x + \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \lambda x - x = \lambda^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1).\end{aligned}$$

β) Η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν:

$$\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$$

Η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \stackrel{\lambda \neq 1}{\Leftrightarrow} \frac{(\lambda - 1)x}{\lambda - 1} = \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}{\lambda - 1} \Leftrightarrow x = \lambda + 1.$$

γ) Η εξίσωση είναι ταυτότητα αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}\lambda - 1 &= 0 \text{ και } (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ \lambda &= 1 \text{ και } (1 - 1)(1 + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ \lambda &= 1.\end{aligned}$$

6

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Όταν $\alpha = 1$.

(Μονάδες 05)

ii) Όταν $\alpha = -3$.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

(Μονάδες 12)

6 A

α) i) Για $\alpha = 1$ η εξίσωση γράφεται: $(1+3)x = 1^2 - 9 \Leftrightarrow 4x = -8 \Leftrightarrow x = -2$.

ii) Για $\alpha = -3$ η εξίσωση γράφεται: $(-3+3)x = (-3)^2 - 9 \Leftrightarrow 0x = 0$, ταυτότητα.

β) Η εξίσωση έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν: $\alpha + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -3$.

Για την εύρεση της μοναδικής λύσης της εξίσωσης έχουμε:

$$(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9 \Leftrightarrow (\alpha + 3)x = (\alpha + 3)(\alpha - 3)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{(\alpha + 3)x}{\alpha + 3} = \frac{(\alpha + 3)(\alpha - 3)}{\alpha + 3} \\ &\Leftrightarrow x = \alpha - 3. \end{aligned}$$

7

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $K = |x + 1| + 2$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $K = \begin{cases} x + 3, & \text{αν } x \geq -1 \\ 1 - x, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$.

(Μονάδες 12)

β)

- i. Να λυθεί η εξίσωση $|x - 2| = 4$.
- ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης K αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

(Μονάδες 13)

7 A

Λύση

α) Για $x \geq -1$ είναι $x + 1 \geq 0$, οπότε $|x + 1| + 2 = x + 1 + 2 = x + 3$.

Για $x < -1$ είναι $x + 1 < 0$, οπότε $|x + 1| + 2 = -(x + 1) + 2 = -x - 1 + 2 = 1 - x$.

Άρα, τελικά $K = \begin{cases} x + 3, & \text{αν } x \geq -1 \\ 1 - x, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$.

β)

i. Είναι $|x - 2| = 4 \Leftrightarrow \{x - 2 = 4 \text{ ή } x - 2 = -4\} \Leftrightarrow \{x = 6 \text{ ή } x = -2\}$.

ii. Για $x = 6 > -1$ είναι $K = 6 + 3 = 9$.

Για $x = -2 < -1$ είναι $K = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3$.

8

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $A = \frac{x+1}{x}$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται.

(Μονάδες 8)

ii. Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

8 Α

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x}.$

β)

i. Πρέπει να βρούμε την τιμή του x για την οποία

$$A = 0, \text{ δηλαδή}$$

$$\frac{x+1}{x} = 0, \text{ που συμβαίνει όταν}$$

$$x+1=0, \text{ δηλαδή όταν}$$

$$x = -1.$$

ii. Για να πάρει η παράσταση A την τιμή 2 , πρέπει να ισχύουν ισοδύναμα:

$$\frac{x+1}{x} = 2 \Leftrightarrow$$

$$x+1 = 2x \Leftrightarrow$$

$$x = 1, \text{ που δεν είναι αποδεκτή τιμή για το } x.$$

Άρα η παράσταση A δεν μπορεί να πάρει την τιμή 2 .

1

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν ως ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 4)

ii. $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

γ) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A .

(Μονάδες 5)

ii. Με τη βοήθεια του β) ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

(Μονάδες 6)

1 Α

ΛΥΣΗ

α) Ισοδύναμα έχουμε

$$\text{i. } x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

$$\text{Ως ισότητα ισχύει αν και μόνο αν } x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{ii. } x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

$$\text{Ως ισότητα ισχύει αν και μόνο αν } x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

β) Για $x \neq \frac{1}{2}$ και $x \neq -\frac{1}{2}$, όπως δείξαμε στο α) ερώτημα, είναι $x^2 + x + 1 > \frac{3}{4}$ και

$x^2 - x + 1 > \frac{3}{4}$, οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}.$$

Επίσης, για $x = \frac{1}{2}$ είναι $x^2 + x + 1 > \frac{3}{4}$ και $x^2 - x + 1 = \frac{3}{4}$, οπότε με πολλαπλασιασμό

κατά μέλη έχουμε $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$.

Τέλος, για $x = -\frac{1}{2}$ είναι $x^2 + x + 1 = \frac{3}{4}$ και $x^2 - x + 1 > \frac{3}{4}$, οπότε με πολλαπλασιασμό

κατά μέλη έχουμε $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$.

Επομένως $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ)

i. Η παράσταση A ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή του x για την οποία ισχύει $x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

ii. Είναι

$$A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$.

Όπως δείξαμε στο β) είναι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε

$A > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$ και επομένως η παράσταση A δεν μπορεί να

πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

Εναλλακτικά, θα εξετάσουμε αν η εξίσωση $\frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1} = \frac{9}{16}$ έχει λύση στο

$\mathbb{R} - \{1, -1\}$. Είναι ισοδύναμα

$$\frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^6 - 1}{x^2 - 1} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x^2)^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)}{x^2 - 1} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow$$

$$16(x^4 + x^2 + 1) = 9 \Leftrightarrow$$

$$16x^4 + 16x^2 + 16 - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$16x^4 + 16x^2 + 7 = 0$$

και επειδή $16x^4 + 16x^2 + 7 \geq 7 > 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη και επομένως η

παράσταση A δεν μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.