

Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

1

ΘΕΜΑ 2

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1| < 2$,

α) Να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $K = \frac{|x+3|+|x-1|}{4}$, είναι αριθμός ανεξάρτητος του

x .

(Μονάδες 13)

1 Α

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned}|x+1| < 2 &\Leftrightarrow -2 < x+1 < 2 \Leftrightarrow \\ -2-1 < x+1-1 < 2-1 &\Leftrightarrow -3 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-3, 1)\end{aligned}$$

β) Από το ερώτημα α) ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}-3 < x < 1 &\Leftrightarrow -3 < x \text{ και } x < 1 \Leftrightarrow \\ x+3 > 0 \text{ και } x-1 < 0\end{aligned}$$

Άρα:

$$|x+3| = x+3 \text{ και } |x-1| = -(x-1) = 1-x$$

Τότε:

$$K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4} = \frac{x+3+1-x}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x - 4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 12)

β) Αν $x = 4$, να αποδείξετε ότι $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$.

(Μονάδες 13)

2 Α

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$$x^2 + 4 \geq 0 \text{ και } x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ και } x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 4 \Leftrightarrow x \in [4, +\infty)$$

β) Για $x = 4$ είναι:

$$A = \sqrt{4^2 + 4} - \sqrt{4 - 4} = \sqrt{16 + 4} - \sqrt{0} = \sqrt{20}.$$

Τότε:

$$\begin{aligned} A^2 - A &= (\sqrt{20})^2 - \sqrt{20} = 20 - \sqrt{20} = 20 - \sqrt{4 \cdot 5} = \\ &= 20 - \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 20 - 2 \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot (10 - \sqrt{5}). \end{aligned}$$

3

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για $x = 5$, να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$

(Μονάδες 12)

3 Α

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$$x-4 \geq 0 \text{ και } 6-x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4 \text{ και } -x \geq -6 \Leftrightarrow x \geq 4 \text{ και } x \leq 6 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow x \in [4, 6]$$

β) Για $x = 5$ είναι:

$$A = \sqrt{5-4} + \sqrt{6-5} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 1+1=2, \text{ επομένως}$$

$$A^2 + A - 6 = 2^2 + 2 - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$$

4

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}) \cdot (\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

(Μονάδες 13)

4 Α

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να ισχύει

$$x-4 \geq \text{και } x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4 \text{ και } x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq 4 \Leftrightarrow x \in [4, +\infty)$$

β) Είναι

$$A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}) \cdot (\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}) = (\sqrt{x-4})^2 - (\sqrt{x+1})^2 = x-4 - (x+1) = x-4-x-1 = -5$$

Επομένως πράγματι η παράσταση Α είναι σταθερή, ανεξάρτητη του x.

5

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i. $|1 - 2x| < 5$ (Μονάδες 9)

ii. $|1 - 2x| \geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 7)

5 A

ΛΥΣΗ

α)

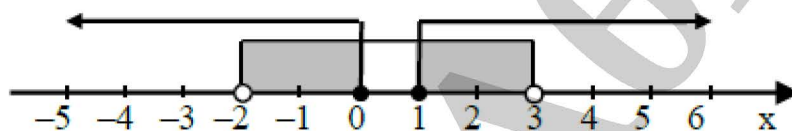
i. Είναι:

$$\begin{aligned} |1-2x| < 5 &\Leftrightarrow -5 < 1-2x < 5 \Leftrightarrow -5-1 < 1-2x-1 < 5-1 \Leftrightarrow \\ -6 < -2x < 4 &\Leftrightarrow \frac{-6}{-2} > \frac{-2x}{-2} > \frac{4}{-2} \Leftrightarrow 3 > x > -2 \Leftrightarrow -2 < x < 3 \end{aligned}$$

ii. Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} |1-2x| \geq 1 &\Leftrightarrow 1-2x \leq -1 \text{ ή } 1-2x \geq 1 \Leftrightarrow -2x \leq -2 \text{ ή } -2x \geq 0 \Leftrightarrow \\ \frac{-2x}{-2} \geq \frac{-2}{-2} \text{ ή } \frac{-2x}{-2} \leq \frac{0}{-2} &\Leftrightarrow x \geq 1 \text{ ή } x \leq 0 \end{aligned}$$

Οι λύσεις των παραπάνω ανισώσεων παριστάνονται στον πίνακα των πραγματικών αριθμών με το παρακάτω σχήμα:



β) Από τις λύσεις των δύο ανισώσεων και από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι οι κοινές τους λύσεις είναι:

$$-2 < x \leq 0 \text{ ή } 1 \leq x < 3 \Leftrightarrow x \in (-2, 0] \cup [1, 3)$$

Επομένως οι ακέραιες αντίστοιχα κοινές λύσεις είναι:

$$x = -1, x = 0, x = 1, x = 2$$

16

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| - |x-2|$.

α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$

(Μονάδες 13)

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

16 Α

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι:

$$1 < x < 2 \Leftrightarrow (1 < x \text{ και } x < 2) \Leftrightarrow (0 < x-1 \text{ και } x-2 < 0)$$

Τότε:

$$|x-1| = x-1 \text{ και } |x-2| = -(x-2) = 2-x$$

Άρα:

$$A = |x-1| - |x-2| = x-1 - (2-x) = x-1-2+x = 2x-3.$$

β) Για $x < 1$ είναι:

$$|x-1| = -(x-1) = 1-x \text{ και } |x-2| = -(x-2) = 2-x$$

Επομένως:

$$A = |x-1| - |x-2| = 1-x - (2-x) = 1-x-2+x = -1, \text{ σταθερή.}$$

17

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει: $|y - 2| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1,3)$

(Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y-1| + |y-3|}{2}$

(Μονάδες 13)

17 A

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned}|y - 2| < 1 &\Leftrightarrow -1 < y - 2 < 1 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow -1 + 2 < y - 2 + 2 < 1 + 2 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 1 < y < 3 \Leftrightarrow y \in (1, 3)\end{aligned}$$

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}1 < y < 3 &\Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (1 < y \text{ και } y < 3) \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (0 < y - 1 \text{ και } y - 3 < 0)\end{aligned}$$

Άρα:

$$|y - 1| = y - 1 \text{ και } |y - 3| = -(y - 3) = 3 - y$$

Τότε:

$$K = \frac{|y - 1| + |y - 3|}{2} = \frac{y - 1 + 3 - y}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

20

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0, \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες;

(Μονάδες 6)

γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$.

(Μονάδες 9)

20 Α

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα

$$\begin{aligned}\Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = \\ &= 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2 \geq 0, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Επειδή $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες.

β) Η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}\Delta &> 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - 2\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

γ) Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(1 - 2\lambda)^2}}{2} = \frac{1 \pm (1 - 2\lambda)}{2} = \begin{cases} \frac{1 + 1 - 2\lambda}{2} = 1 - \lambda \\ \frac{1 - 1 + 2\lambda}{2} = \lambda \end{cases}$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}0 &< d(x_1, x_2) < 2 \Leftrightarrow \\ 0 &< |x_1 - x_2| < 2 \Leftrightarrow \\ 0 &< |1 - \lambda - \lambda| < 2 \Leftrightarrow \\ 0 &< |1 - 2\lambda| < 2 \Leftrightarrow\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned}0 &< |1 - 2\lambda| \Leftrightarrow \\ 1 - 2\lambda &\neq 0 \Leftrightarrow \\ 2\lambda &\neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \lambda &\neq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}|1 - 2\lambda| &< 2 \Leftrightarrow \\ -2 &< 1 - 2\lambda < 2 \Leftrightarrow \\ -3 &< -2\lambda < 1 \Leftrightarrow \\ -\frac{1}{2} &< \lambda < \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Οπότε, τελικά

$$\lambda \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$