Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

2

ΘΕΜΑ 4

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.

(Μονάδες 05)

β) Να βρείτε τον γενικό όρο της προόδου.

(Μονάδες 04)

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

(Μονάδες 05)

δ) Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i. Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

(Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.

(Μονάδες 06)

2 Α

ΛΥΣΗ

α) Επειδή το πλήθος των καθισμάτων της κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων ω, οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) με $\alpha_1 = 16$ και διαφορά ω.

Είναι:

$$\alpha_7 = 28 \Leftrightarrow \alpha_1 + (7-1)\omega = 28 \Leftrightarrow$$
$$16 + 6\omega = 28 \Leftrightarrow 6\omega = 12 \Leftrightarrow \omega = 2$$

Άρα $\alpha_1 = 16$ και $\omega = 2$.

β) Έχουμε:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu = 16 + (\nu-1)\cdot 2 \Leftrightarrow$$
$$\alpha_\nu = 16 + 2\nu - 2 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2\nu + 14 \ \ \mu\varepsilon\ 1 \le \nu \le 20$$

γ) Το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου είναι:

$$S_{20} = \frac{20}{2}\left[2\alpha_1 + (20-1)\omega\right] \Leftrightarrow$$
$$S_{20} = 10(2\cdot 16 + 19\cdot 2) \Leftrightarrow$$
$$S_{20} = 10(32+38) \Leftrightarrow$$
$$S_{20} = 10\cdot 70 \Leftrightarrow$$
$$S_{20} = 700$$

δ) Ο αριθμός των κενών καθισμάτων σε κάθε σειρά είναι αριθμητική πρόοδος (β_ν) με $\beta_1 = 6$ και $\omega = 3$. Ο ν-οστός όρος που εκφράζει το πλήθος των κενών καθισμάτων είναι:

$$\beta_\nu = \beta_1 + (\nu-1)\omega \Leftrightarrow$$
$$\beta_\nu = 6 + (\nu-1)\cdot 3 \Leftrightarrow$$
$$\beta_\nu = 6 + 3\nu - 3 \Leftrightarrow$$
$$\beta_\nu = 3\nu + 3$$

Άρα $\beta_\nu = 3\nu + 3$ με $1 \le \nu \le 11$ (διότι τα κενά καθίσματα δε μπορεί να είναι περισσότερα από τα καθίσματα της κάθε σειράς, δηλαδή πρέπει $\beta_\nu \le \alpha_\nu \Leftrightarrow \nu \le 11$)

i. Όλα τα καθίσματα θα είναι κενά της ν-οστής σειράς, όταν:

$$\beta_\nu = \alpha_\nu \Leftrightarrow$$
$$3\nu + 3 = 2\nu + 14 \Leftrightarrow$$
$$\nu = 11$$

Άρα από την $11^η$ σειρά μέχρι την $20^η$, όλα τα καθίσματα είναι κενά.

ii. Το πλήθος των κενών καθισμάτων στις 10 πρώτες σειρές είναι:

$$S'_{10} = \frac{10}{2}\left[2\beta_1 + (10-1)\omega\right] \Leftrightarrow$$
$$S'_{10} = 5(2\cdot 6 + 9\cdot 3) \Leftrightarrow$$
$$S'_{10} = 5\cdot 39 \Leftrightarrow$$
$$S'_{10} = 195$$

Το πλήθος των καθισμάτων στις πρώτες 10 σειρές είναι:

$$S_{10} = \frac{10}{2}\left[2\alpha_1 + (10-1)\omega\right] \Leftrightarrow$$
$$S_{10} = 5(2\cdot 16 + 9\cdot 2) \Leftrightarrow$$
$$S_{10} = 5\cdot 50 \Leftrightarrow$$
$$S_{10} = 250$$

Ο αριθμός των θεατών που κάθονται στις πρώτες 10 θέσεις είναι:

$$S_{10} - S'_{10} = 250 - 195 = 55$$

Αυτός είναι και ο συνολικός αριθμός θεατών, αφού από την 11$^{\eta}$ σειρά και μετά όλα τα καθίσματα είναι κενά.

3

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1, 2, 3, \ldots, \nu$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσοι από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους έχουν άθροισμα 45

(Μονάδες 13)

3 A

ΛΥΣΗ

α) Η ακολουθία των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1,2,3,\ldots,\nu$ είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$, $\omega = 1$ και $\alpha_\nu = \nu$. Άρα το άθροισμα των ν πρώτων όρων αυτής, είναι:

$S_\nu = \frac{\nu}{2}\cdot(\alpha_1 + \alpha_\nu)$, δηλαδή $S_\nu = \frac{\nu}{2}\cdot(1+\nu)$.

β) Ψάχνουμε το πλήθος ν των όρων που έχουν άθροισμα 45 , δηλαδή το ν ώστε $S_\nu = 45$,

δηλαδή $\frac{\nu}{2}\cdot(1+\nu) = 45$, οπότε $\nu\cdot(\nu+1) = 90$. Οι δυο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί που έχουν γινόμενο ίσο με 90 είναι οι αριθμοί 9 και 10 (δηλαδή $\nu = 9$ και $\nu+1 = 10$). Άρα το άθροισμα των 9 πρώτων φυσικών αριθμών είναι ίσο με 45 .

4

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον α_{20}.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 8)

4 A

Λύση

α) Είναι:

$$\begin{aligned}&\alpha_{10}-\alpha_6=24\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow \alpha_1+(10-1)\omega-\left[\alpha_1+(6-1)\omega\right]=24\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow \alpha_1+9\omega-\alpha_1-5\omega=24\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow 4\omega=24\Leftrightarrow\omega=6\end{aligned}$$

β) Έχουμε:

$$\alpha_{20}=\alpha_1+(20-1)\omega=19+19\cdot 6=19+114=133$$

γ) Ισχύει ότι:

$$S_{20}=\frac{20}{2}(\alpha_1+\alpha_{20})=10(19+133)=10\cdot 152=1520$$

6

ΘΕΜΑ 4

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα του σταδίου.

(Μονάδες 5)

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την $7^η$ μέχρι και την $14^η$ σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

(Μονάδες 10)

6 Α

ΛΥΣΗ

Επειδή κάθε σειρά καθισμάτων έχει 2 καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη, ο αριθμός των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = 12$ και $\omega = 2$.

α) Η μεσαία σειρά έχει:

$$\alpha_{13} = \alpha_1 + 12\omega = 12 + 12 \cdot 2 = 36 \text{ καθίσματα}$$

και η τελευταία σειρά έχει:

$$\alpha_{25} = \alpha_1 + 24\omega = 12 + 24 \cdot 2 = 60 \text{ καθίσματα.}$$

β) Η χωρητικότητα του σταδίου είναι:

$$S_{25} = \frac{25}{2}(\alpha_1 + \alpha_{25}) = \frac{25}{2}(12 + 60) = \frac{25}{2} \cdot 72 = \frac{1800}{2} = 900 \text{ καθίσματα.}$$

γ) Το πλήθος των μαθητών του Λυκείου είναι:

$$S = S_{14} - S_6 = \frac{14}{2}(2\alpha_1 + 13\omega) - \frac{6}{2}(2\alpha_1 + 5\omega)$$

$$= 7(2 \cdot 12 + 13 \cdot 2) - 3(2 \cdot 12 + 5 \cdot 2) = 7 \cdot 50 - 3 \cdot 34 = 350 - 102 = 248$$

10

ΘΕΜΑ 2

Οι αριθμοί $\mathrm{A}=1$, $\mathrm{B}=x+4$, $\Gamma=x+8$, είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να βρείτε την τιμή του x.

(Μονάδες 10)

β) Αν $x=1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν).

i. να υπολογίσετε τη διαφορά ω.

(Μονάδες 7)

ii. να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 8)

10 A

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$\mathrm{B}=\frac{\mathrm{A}+\Gamma}{2}\Leftrightarrow x+4=\frac{1+x+8}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(x+4)=9+x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x+8=x+9\Leftrightarrow x=1$$

β)

i. Για $x=1$ είναι $\mathrm{A}=1$, $\mathrm{B}=5$ και $\Gamma=9$. Τότε:

$$\omega=\mathrm{B}-\mathrm{A}=5-1=4$$

ii. Είναι:

$$\alpha_{20}=\alpha_1+(20-1)\omega\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_{20}=1+19\cdot 4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_{20}=1+76\Leftrightarrow \alpha_{20}=77$$

11

ΘΕΜΑ 2

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς.

(Μονάδες 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

(Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

(Μονάδες 8)

11 A

Λύση

α) Από τα δεδομένα της άσκησης είναι $\alpha_1 = 120$ και $\omega = 20$. Τότε:

$$\begin{aligned} &\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha_\nu = 120 + (\nu - 1)20 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha_\nu = 100 + 20\nu \end{aligned}$$

β) Η τελευταία σειρά έχει:

$$\begin{aligned} &\alpha_{10} = 100 + 20 \cdot 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha_{10} = 100 + 200 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha_{10} = 300 \;\; \kappa\alpha\theta\acute{\iota}\sigma\mu\alpha\tau\alpha \end{aligned}$$

γ) Το γυμναστήριο έχει συνολικά:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(\alpha_1 + \alpha_{10}) = 5(120 + 300) = 5 \cdot 420 = 2100 \; \kappa\alpha\theta\acute{\iota}\sigma\mu\alpha\tau\alpha$$

12

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\beta x+(\beta^2-4)$, (1) με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1=\beta-2$ και $x_2=\beta+2$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)

12 A

Λύση

α) Το τριώνυμο $x^2-2\beta x+\beta^2-4$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2\beta)^2-4\cdot 1\cdot(\beta^2-4)=4\beta^2-4\beta^2+16=16>0.$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2\beta\pm 4}{2}$, οπότε έχουμε:

$x_1=\beta+2, x_2=\beta-2.$

Σημείωση: Μία εναλλακτική λύση είναι η εξής:

Η $x_1=\beta+2$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$(\beta+2)^2-2\beta(\beta+2)+\beta^2-4=\beta^2+4\beta+4-2\beta^2-4\beta+\beta^2-4=0.$$

Ομοίως η $x_2=\beta-2$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$(\beta-2)^2-2\beta(\beta-2)+\beta^2-4=\beta^2-4\beta+4-2\beta^2+4\beta+\beta^2-4=0.$$

Συνεπώς, η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις x_1, x_2, με $x_1\neq x_2$.

β) Οι αριθμοί β-2 , β, β+2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, διότι ισχύουν:

β-(β-2) = 2 και (β+2) – β = 2 , δηλαδή διαφέρον κατά σταθερό αριθμό ω = 2 .