

Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

1

ΘΕΜΑ 2

Μια γεωμετρική πρόοδος (α_n) έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 4$, λόγο $\lambda > 0$ και $\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 2$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 8)

1 A

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 4, \text{ οπότε}$$

$$\frac{\alpha_1 \cdot \lambda^2}{\alpha_1} = 4, \text{ δηλαδή}$$

$$\lambda^2 = 4 \text{ και τελικά}$$

$$\lambda = \pm 2.$$

Επειδή $\lambda > 0$, $\lambda = 2$.

β) Έχουμε

$$\alpha_{10} = \alpha_1 \cdot \lambda^9 = 4 \cdot 2^9 = 4 \cdot 512 = 2048.$$

γ) Έχουμε

$$S_{10} = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^{10} - 1}{\lambda - 1} = 4 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 4 \cdot 1023 = 4092.$$

3

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_n) με θετικό λόγο λ , για την οποία ισχύει: $\alpha_3 = 1$ και $\alpha_5 = 4$.

α) Να βρείτε τον λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι ο n -οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_n = 2^{n-3}$.

(Μονάδες 12)

3 A

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\begin{cases} \alpha_3 = 1 \\ \alpha_5 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \cdot \lambda^2 = 1 \\ \alpha_1 \cdot \lambda^4 = 4 \end{cases} \stackrel{(\cdot)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda^2 = 4 \\ \alpha_1 \cdot \lambda^2 = 1 \end{cases} \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda = 2 \\ \alpha_1 = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

β) Ο ν -οστός όρος μιας γεωμετρικής προόδου είναι: $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$, οπότε

$$\alpha_\nu = \frac{1}{4} \cdot 2^{\nu-1} = \frac{1}{2^2} \cdot 2^{\nu-1} = \frac{2^{\nu-1}}{2^2} = 2^{\nu-3}.$$

5

ΘΕΜΑ 4

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες υπάρχουν 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

(Μονάδες 6)

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_n το πλήθος των βακτηρίων n ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($n \leq 5$).

i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_n) είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

(Μονάδες 6)

ii. Να εκφράσετε το πλήθος β_n των βακτηρίων συναρτήσει του n .

(Μονάδες 6)

iii. Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

(Μονάδες 7)

5 A

ΛΥΣΗ

Το πλήθος των βακτηρίων, στο τέλος κάθε ώρας, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου

(α_v) με πρώτο όρο $\alpha_1 = 102400$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$.

α) ο v -στός όρος της προόδου δίνεται από τον τύπο $\alpha_v = \alpha_1 \lambda^{v-1}$ και είναι:

$$\alpha_v = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{v-1}$$

Μετά από 6 ώρες ο αριθμός των βακτηρίων θα είναι:

$$\alpha_6 = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 102400 \cdot \frac{1}{32} = 3200$$

β) i. Μετά την ξαφνική επιδείνωση του οργανισμού ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Άρα η ακολουθία (β_v) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda = 3$ και πρώτο όρο $\beta_1 = 3200 \cdot 3 = 9600$.

ii. Είναι:

$$\beta_v = \beta_1 \lambda^{v-1} = 9600 \cdot 3^{v-1}, v \leq 5$$

iii. Ο αριθμός των βακτηρίων που θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης θα είναι:

$$\beta_3 = 9600 \cdot 3^{3-1} = 9600 \cdot 3^2 = 86.400.$$

6

ΘΕΜΑ 2

α) Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

(Μονάδες 9)

β) Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x, x, 2$ να είναι διαδοχικοί αριθμοί αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 7)

6 A

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί αριθμοί αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}x &= \frac{4-x+2}{2} \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 2x = 6-x \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2\end{aligned}$$

β) Οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί αριθμοί γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}x^2 &= (4-x) \cdot 2 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow x^2 = 8-2x \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \quad (1)\end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{-2+6}{2} = 2 \\ \frac{-2-6}{2} = -4 \end{cases}$$

γ) Από τα ερωτήματα α) και β) βρίσκουμε $x = 2$.

7

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: x , $2x+1$, $5x+4$, με την σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i. $x = 1$

ii. $x = -1$

(Μονάδες 12)

7 A

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί x , $2x+1$, $5x+4$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}(2x+1)^2 &= x \cdot (5x+4) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 &= 5x^2 + 4x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x = -1 \text{ ή } x = 1)\end{aligned}$$

β)

i. Για $x = 1$ οι δοσμένοι αριθμοί γράφονται:

1, 3, 9

Ο λόγος λ είναι $\lambda = \frac{3}{1} = 3$.

ii. Για $x = -1$ οι δοσμένοι αριθμοί γράφονται:

-1, -1, -1

Ο λόγος λ είναι $\lambda = \frac{-1}{-1} = 1$.

8

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x , οι αριθμοί $x + 4$, $2 - x$, $6 - x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Αν $x = 5$ και ο $6 - x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε:

i. το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 6)

ii. τον πρώτο όρο a_1 της προόδου.

(Μονάδες 6)

8 Α

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί $x + 4$, $2 - x$, $6 - x$, είναι με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}(2 - x)^2 &= (6 - x) \cdot (x + 4) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4 - 4x + x^2 &= 6x + 24 - x^2 - 4x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 20 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 &= 0 \quad (1)\end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{3+7}{2} = 5 \\ \frac{3-7}{2} = -2 \end{cases}$$

β) Για $x = 5$:

$$\alpha_4 = 6 - x = 1, \quad \alpha_3 = 2 - x = -3 \text{ και } \alpha_2 = x + 4 = 9$$

i. Ο λόγος είναι $\lambda = \frac{\alpha_4}{\alpha_3} = -\frac{1}{3}$

ii. Είναι:

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \alpha_1 \lambda^{2-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9 &= \alpha_1 \left(-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_1 &= -27\end{aligned}$$