Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

1

ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2-5x+6

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$

i. Να βρείτε τι πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης

(Μονάδες 05)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$

)Μονάδες 08)

1 Α

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει $\alpha = 1, \beta = -5, \gamma = 6$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Τότε:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

β)

i. Πρέπει:

$$x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$x - 2 \neq 0 \; \kappa\alpha\iota \; x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \; \kappa\alpha\iota \; x \neq 3$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = R - \{2,3\}$.

ii. Ο τύπος της συνάρτησης f γράφεται

$$f(x = \frac{x-2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x-2}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3}$$

2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\frac{1}{x}, x\neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{5}{2}$.

(Μονάδες 15)

2 A

ΛΥΣΗ

α) Ισχύουν:

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+2=\frac{1}{2}+\frac{4}{2}=\frac{5}{2}.$

$f(1)=1+\frac{1}{1}=1+1=2.$

$f(2)=2+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$

Οπότε:

$A=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)=\frac{5}{2}+2-\frac{5}{2}=2.$

β) Ισχύει ότι:

$$f(x)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow$$
$$\frac{x^2+1}{x}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2(x^2+1)=5x\Leftrightarrow$$
$$2x^2+2=5x\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0$$

Το τριώνυμο $2x^2-5x+2$ έχει $\alpha=2, \beta=-5, \gamma=2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2=25-16=9>0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm 3}{4}=\begin{cases}\frac{5+3}{4} & =2\\ \frac{5-3}{4} & =\frac{1}{2}\end{cases}$$

3

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-16x}{x-4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει ότι $f(x)=x^2+4x$.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=32$.

(Μονάδες 10)

3 A

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει: $x-4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 4$.

Ο τύπος της συνάρτησης f μετά τις σχετικές παραγοντοποιήσεις και απλοποιήσεις γίνεται:

$$f(x)=\frac{x^3-16x}{x-4}=\frac{x(x^2-16)}{x-4}=\frac{x(x-4)(x+4)}{x-4}=x(x+4)=x^2+4x.$$

β) Είναι:

$$f(x)=32 \Leftrightarrow x^2+4x=32 \Leftrightarrow x^2+4x-32=0$$

Το τριώνυμο $x^2+4x-32$ έχει $\alpha=1$, $\beta=\ 4$, $\gamma=-32$ και διακρίνουσα:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4^2-4\cdot 1\cdot(-32)=16+128=144>0$.

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-4\pm\sqrt{144}}{2\cdot 1}=\frac{-4\pm 12}{2}=\begin{cases}\dfrac{-4+12}{2} & =4\\ \dfrac{-4-12}{2} & =-8\end{cases}$$

Επειδή η f ορίζεται στο $A=\mathbb{R}-\{4\}$, δεκτή είναι μόνο η τιμή $x=-8$.

4

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \begin{cases} 8 - x, & \text{αν } x < 0 \\ 2x + 5, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-5) = f(4)$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$,ώστε $f(x) = 9$.

(Μονάδες 12)

4 A

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$f(-5) = 8 - (-5) = 8 + 5 = 13 \text{ και}$$
$$f(4) = 2 \cdot 4 + 5 = 8 + 5 = 13.$$

Άρα $f(-5) = f(4)$.

β) Για $x < 0$ είναι:

$$f(x) = 9 \Leftrightarrow 8 - x = 9 \Leftrightarrow$$
$$-x = 1 \Leftrightarrow x = -1.$$

Για $x \geq 0$ είναι:

$$f(x) = 9 \Leftrightarrow 2x + 5 = 9 \Leftrightarrow$$
$$2x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

5

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι: $f(2)+f(4)=0$.

(Μονάδες 10)

5 A

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - x - 6$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+5}{2} = 3 \\ \dfrac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

Πρέπει:

$$x^2 - x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq -2 \ \kappa\alpha\iota \ x \neq 3)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathrm{A} = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$.

β) Είναι:

$$f(2) = \frac{2+2}{2^2 - 2 - 6} = \frac{4}{4 - 2 - 6} = \frac{4}{-4} = -1 \text{ και}$$

$$f(4) = \frac{4+2}{4^2 - 4 - 6} = \frac{6}{16 - 4 - 6} = \frac{6}{6} = 1$$

Άρα:

$$f(2) + f(4) = -1 + 1 = 0$$

6

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=x^2-4x+\alpha \text{ και } g(x)=\alpha x-5, \text{ με } \alpha\in\mathbb{R}.$$

α) Αν ισχύει $f(2)=g(2)$, να βρείτε την τιμή του α.

(Μονάδες 7)

β) Για $\alpha=1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=g(x)$.

(Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$.

(Μονάδες 5 + 5 = 10)

6 Α

ΛΥΣΗ

α) Αφού $f(2)=g(2)$ έχουμε ισοδύναμα

$$\begin{aligned}&f(2)=g(2)\Leftrightarrow\\&2^2-4\cdot 2+\alpha=\alpha\cdot 2-5\Leftrightarrow\\&4-8+\alpha=2\alpha-5\Leftrightarrow\\&\alpha-2\alpha=-4+8-5\Leftrightarrow\\&-\alpha=-1\Leftrightarrow\\&\alpha=1\end{aligned}$$

β) Για $\alpha=1$ έχουμε $f(x)=x^2-4x+1$ και $g(x)=x-5$.

i) Η εξίσωση: $f(x)=g(x)$ γίνεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned}&x^2-4x+1=x-5\Leftrightarrow\\&x^2-4x+1-x+5=0\Leftrightarrow\\&x^2-5x+6=0\end{aligned}$$

Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1>0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{5+1}{2}=\dfrac{6}{2}=3\\ x_2=\dfrac{5-1}{2}=\dfrac{4}{2}=2\end{cases}$$

ii) Η ανίσωση: $f(x)\geq g(x)$ γίνεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned}&x^2-4x+1\geq x-5\Leftrightarrow\\&x^2-4x+1-x+5\geq 0\Leftrightarrow\\&x^2-5x+6\geq 0\end{aligned}$$

Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει ρίζες τις $x_1=3$ και $x_2=2$ και το πρόσημο του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		+	0	-	0	+	

Από τον παραπάνω πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2-5x+6\geq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$$

Από τη ιδιότητα $|\alpha|=\alpha\Leftrightarrow\alpha\geq 0$ έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
&\left| f(x)-g(x) \right| = f(x)-g(x) \Leftrightarrow \\
&f(x)-g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \\
&x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)
\end{aligned}
$$