

Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

## 2

### ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha x + \beta$ , με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:

$$f(0) = 5 \text{ και } f(1) = 3.$$

α) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = -2$  και  $\beta = 5$ .

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία, στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

(Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 8)

## 2 A

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι:

$$f(0) = 5 \Leftrightarrow a \cdot 0 + \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = 5 \quad (1)$$

Ακόμα:

$$\begin{aligned} f(1) = 3 &\Leftrightarrow a \cdot 1 + \beta = 3 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \\ a + 5 &= 3 \Leftrightarrow a = -2. \end{aligned}$$

Οπότε:  $\alpha = -2$  και  $\beta = 5$ .

β) Ο τύπος της  $f$  γίνεται:  $f(x) = -2x + 5$ .

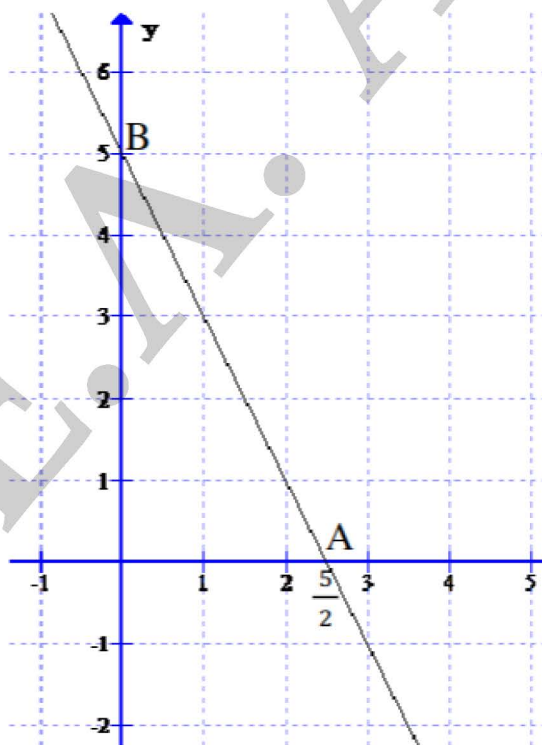
Για τις τετμημένες των σημείων τομής της  $C_f$  με τον άξονα  $x'x$  λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Οπότε η  $C_f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ .

Επίσης έχουμε:  $f(0) = 0 + 5 = 5$ , οπότε η  $C_f$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $B(0, 5)$ .

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από τα σημεία A και B, οπότε είναι:



## 4

### ΘΕΜΑ 4

Δίνονται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση  $C_f$  της συνάρτησης  $f$  δεν τέμνει τον άξονα  $x'x$ .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της  $C_f$  που βρίσκονται κάτω από την ευθεία  $y = 2x + 3$ .

(Μονάδες 10)

γ) Έστω  $M(x, y)$  σημείο της  $C_f$ . Αν για την τετμημένη  $x$  του σημείου  $M$  ισχύει:  $|2x - 1| < 3$ , τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία  $y = 2x + 3$ .

(Μονάδες 10)

## 4 A

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο  $x^2 + x + 1$  έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

οπότε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι ομόσημο του συντελεστή του  $x^2$ , δηλαδή του  $\alpha = 1 > 0$ .

Επομένως για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι:

$$x^2 + x + 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα  $x'x$  και άρα δεν τέμνει τον  $x'x$ .

β) Οι τετμημένες των σημείων της  $C_f$  που βρίσκονται κάτω από την ευθεία  $y = 2x + 3$  είναι οι λύσεις της ανίσωσης

$$\begin{aligned} f(x) < 2x + 3 &\Leftrightarrow \\ x^2 + x + 1 < 2x + 3 &\Leftrightarrow \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{aligned}$$

Το τριώνυμο  $x^2 - x - 2$  έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου  $x^2 - x - 2$  φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$           | $-\infty$ | $-1$    | $2$ | $+\infty$ |     |
|---------------|-----------|---------|-----|-----------|-----|
| $x^2 - x - 2$ | $+$       | $\circ$ | $-$ | $\circ$   | $+$ |

Συνεπώς  $x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 2)$ .

γ) Αφού  $|2x - 1| < 3$ , έχουμε ισοδύναμα ότι

$$\begin{aligned} |2x - 1| < 3 &\Leftrightarrow \\ -3 < 2x - 1 < 3 &\Leftrightarrow \\ -3 + 1 < 2x - 1 + 1 < 3 + 1 &\Leftrightarrow \\ -2 < 2x < 4 &\Leftrightarrow \\ -1 < x < 2 \end{aligned}$$

Αφού για την τετμημένη  $x$  του σημείου  $M$  ισχύει  $-1 < x < 2$  τότε, όπως δείξαμε στο ερώτημα β), το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία  $y = 2x + 3$ .

60 ΓΕ.Λ. ΑΘΗΝΩΝ

## 6

### ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τους άξονες.

(Μονάδες 7)

γ) Αν  $A$  και  $B$  είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα  $A$  και  $B$ .

(Μονάδες 8)

## 6 A

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται μόνο όταν:

$$9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

Άρα,  $A_f = (-3, 3)$ .

β) Η  $C_f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  μόνο όταν για κάποιο  $x \in A_f$  ισχύει  $f(x) = 0$ . Είναι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Επομένως η  $C_f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $A(-2, 0)$ .

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = \frac{0+2}{\sqrt{9-0}} = \frac{2}{3}$$

Άρα η  $C_f$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $B\left(0, \frac{2}{3}\right)$ .

γ) Έστω  $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta$  η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A, B είναι:

$$\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{2}{3} - 0}{0 - (-2)} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας γράφεται

$$(\varepsilon): y = \frac{1}{3}x + \beta$$

Επιπλέον η ευθεία διέρχεται από το σημείο  $A(-2, 0)$ , οπότε οι συντεταγμένες του A την επαληθεύουν. Έτσι, έχουμε:

$$0 = \frac{1}{3}(-2) + \beta \Leftrightarrow \beta - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{2}{3}$$

Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι  $(\varepsilon): y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ .

## 7

### ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = 4x + 2$  και  $g(x) = x^2 - 9$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .

α) βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$  με τον άξονα  $x'x$ .

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία  $(3, 0)$  και  $(-3, 0)$ .

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, g$  δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε συνάρτηση  $h$  της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το σημείο  $A(0, 3)$  και τέμνει τη γραφική παράσταση της  $g$  σε ένα σημείο του ημιάξονα  $Ox$ .

(Μονάδες 7)

## 7 A

### ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$  με τον άξονα  $x'x$  προσδιορίζονται από τις ρίζες της εξίσωσης  $g(x)=0$ . Είναι:

$$g(x)=0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ή } x = 3$$

Επομένως, τα ζητούμενα σημεία είναι τα  $M(-3, 0)$  και  $N(3, 0)$ .

β) Είναι:

$$f(3)=4 \cdot 3 + 2 = 14 \neq 0 \text{ και } f(-3)=4 \cdot (-3) + 2 = -10 \neq 0$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της  $f$  δεν τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία  $M(-3, 0)$  και  $N(3, 0)$ .

γ) Έστω ότι υπάρχει κοινό σημείο  $(x_0, 0)$  του άξονα  $x'x$  στο οποίο τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις  $C_f, C_g$  των  $f, g$ . Τότε ισχύει:

$$\begin{aligned} & (f(x_0)=0 \text{ και } g(x_0)=0) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_0 + 2 = 0 \\ x_0^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{1}{2} \\ x_0 = \pm 3 \end{cases} \end{aligned}$$

που είναι άτοπο. Άρα οι  $C_f, C_g$  δεν έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα  $x'x$ .

Έστω ότι οι  $C_f, C_g$  έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα  $y'y$ . Τότε έχουμε:

$$f(0)=g(0) \Leftrightarrow 2=-9$$

που είναι άτοπο. Άρα οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων  $f, g$  δεν έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα  $y'y$ .

δ) Η γραφική παράσταση της  $h$  είναι ευθεία, οπότε ο τύπος της είναι της μορφής  $h(x)=\alpha x + \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Η ευθεία διέρχεται από το σημείο  $A(0, 3)$ , οπότε έχουμε:

$$h(0)=3 \Leftrightarrow \alpha \cdot 0 + \beta = 3 \Leftrightarrow \beta = 3$$

Επομένως έχουμε  $h(x)=\alpha x + 3$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Επιπλέον, η γραφική παράσταση της  $h$  τέμνει την γραφική παράσταση της  $g$  σε σημείο του ημιάξονα  $Ox$  οπότε ισχύει:

$$h(3)=g(3) \Leftrightarrow 3\alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$$

Τελικά η συνάρτηση  $h$  έχει τύπο  $h(x)=-x+3$ .

**21**

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παράσταση  $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{1 - 2x + x^2}$ .

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

(Μονάδες 6)

Δίνεται επιπλέον  $1 \leq x \leq 3$ .

β) i. Να δείξετε ότι  $A=2$ .

(Μονάδες 4)

ii. Να λύσετε την εξίσωση  $|x - 3| - |x - 1| = 2$ .

(Μονάδες 5)

γ) i. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x)=3-x$  και  $g(x)=x-1$  για  $1 \leq x \leq 3$ .

(Μονάδες 6)

ii. Για ποιες τιμές του x είναι  $|f(x) - g(x)|=2$ .

(Μονάδες 4)

## 21 Α

ΛΥΣΗ

α)  $A = \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x-1)^2} = |x-3| + |x-1|.$

β) i. Από  $1 \leq x \leq 3$  έχουμε  $|x-3| = -x+3$  και  $|x-1| = x-1,$

τότε  $A = -x+3+x-1=2.$

ii.  $-x+3-x+1=2 \Leftrightarrow -2x+4=2 \Leftrightarrow x=1.$

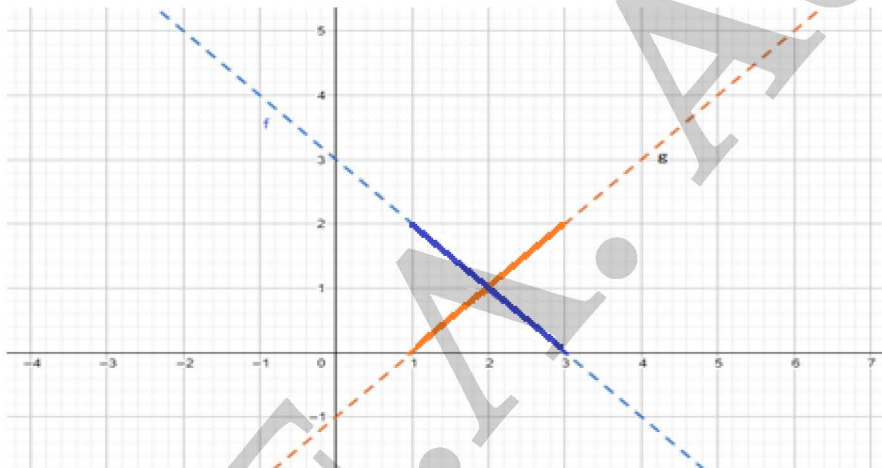
γ) i. Για την  $f(x)=3-x$  για  $1 \leq x \leq 3$  προκύπτει ο πίνακας τιμών:

| x | y |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 3 | 0 |

Ομοίως για την  $g(x)=x-1$  για  $1 \leq x \leq 3$  προκύπτει ο πίνακας τιμών:

| x | y |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 3 | 2 |

Επομένως, στο ίδιο σύστημα αξόνων, έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση:



ii. Από την γραφική παράσταση του ερωτήματος γ) i παρατηρούμε πως  $|f(x) - g(x)|=2$  έχουμε για  $x=1$  ή  $x=3.$

Θεωρούμε τα σημεία  $A(2, 1)$ ,  $B(-1, -5)$ ,  $\Gamma(27, 50)$  και την ευθεία  $\varepsilon: y = \lambda x - 3$ . Αν το σημείο  $A$  είναι πάνω στην ευθεία, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 2$ .

(Μονάδες 11)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο  $B$  είναι πάνω στην ευθεία. Κατόπιν να εξετάσετε αν και το σημείο  $\Gamma$  είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

(Μονάδες 14)

## 22 A

ΛΥΣΗ

α) Το σημείο A είναι πάνω στην ευθεία, οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της. Έτσι, έχουμε:  $2\lambda - 3 = 1$ , οπότε  $2\lambda = 4$ , άρα  $\lambda = 2$ .

β) Θα αποδείξουμε ότι οι συντεταγμένες του B επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας που είναι η  $\varepsilon$ :  $y = 2x - 3$ .

Με  $x = -1$  έχουμε:  $y = 2(-1) - 3 = -2 - 3 = -5$ , οπότε το σημείο B είναι πάνω στην ευθεία  $\varepsilon$ .

Εξετάζουμε αν το Γ είναι πάνω στην  $\varepsilon$ .

Με  $x = 27$  έχουμε:  $y = 2 \cdot 27 - 3 = 54 - 3 = 51 \neq 50$ , οπότε το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ευθεία  $\varepsilon$ .

Άρα το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ίδια ευθεία με τα A και B.