

Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

1

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2: x - 2y = -2$.

α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο M.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon_3: 3x + y = 8$ διέρχεται από το M.

(Μονάδες 12)

1 A

ΛΥΣΗ

α) Για να προσδιορίσουμε αλγεβρικά το κοινό σημείο Μ των ευθειών $\varepsilon_1: 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2: x - 2y = -2$, θα λύσουμε το σύστημα (επιλέγουμε τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών):

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 6 \\ x - 2y = -2 \end{array} \right\} \xLeftrightarrow{(+2)} \left. \begin{array}{l} 4x + 2y = 12 \\ x - 2y = -2 \end{array} \right\} \xLeftrightarrow{(-)} \left. \begin{array}{l} 5x = 10 \\ x - 2y = -2 \end{array} \right\} \xLeftrightarrow{(-)} \left. \begin{array}{l} x = 2 \\ 2 - 2y = -2 \end{array} \right\} \xLeftrightarrow{(+)} \left. \begin{array}{l} x = 2 \\ -2y = -4 \end{array} \right\} \xLeftrightarrow{(-)} \left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \end{array} \right\}.$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M(2,2)$.

β) Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου M επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας $\varepsilon_3: 3x + y = 8$, αφού $3 \cdot 2 + 2 = 8$. Άρα η ευθεία (ε_3) διέρχεται από το $M(2, 2)$.

2

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 5x - y = 5 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$.

(Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες $(\varepsilon_1): 5x - y = 5$ και $(\varepsilon_2): -5x + y = 2$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 13)

2 A

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\begin{cases} 5x - y = 5 \\ -5x + y = 2 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} 0x + 0y = 7 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$, επομένως το σύστημα είναι αδύνατο.

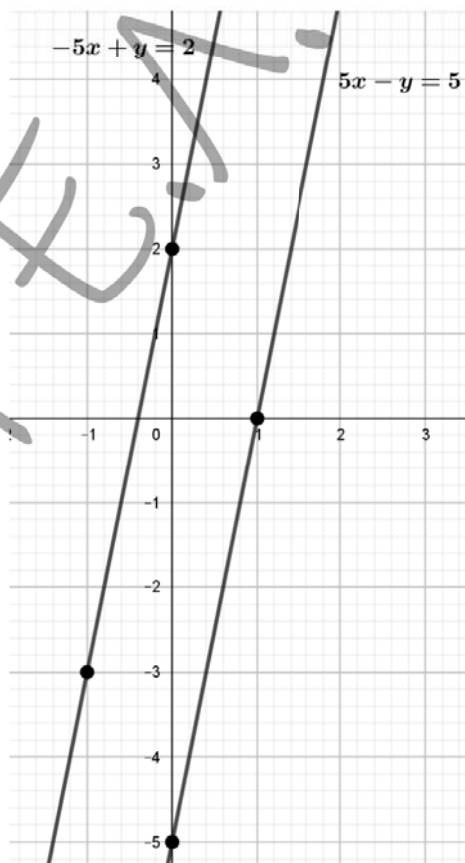
β) Για την ευθεία (ε_1): $5x - y = 5$ έχουμε

x	0	1
y	-5	0

Για την ευθεία (ε_2): $-5x + y = 2$ έχουμε

x	0	-1
y	2	-3

Οι δύο ευθείες είναι παράλληλες, δηλαδή δεν έχουν κοινό σημείο, που γραφικά εκφράζει ότι το σύστημα του α) ερωτήματος είναι αδύνατο.



3

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + ky = 8 \end{cases}$ με αγνώστους x, y και k παράμετρος.

α) Να λύσετε το σύστημα όταν $k = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε το σύστημα όταν $k = 1$.

(Μονάδες 13)

3 Α

ΛΥΣΗ

α) Για $k = 2$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases}$ και διαιρώντας κάθε όρο της δεύτερης

εξίσωσης με το 2 παίρνουμε $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$ οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

β) Για $k = 1$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + y = 8 \end{cases}$ και πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο της

δεύτερης εξίσωσης με το -1 παίρνουμε $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ -6x - y = -8 \end{cases}$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε την εξίσωση $-3x = 3 \Leftrightarrow x = -1$.

Τότε από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $3(-1) + y = 11$, οπότε $-3 + y = 11 \Leftrightarrow y = 14$.

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x, y) = (-1, 14)$

4

ΘΕΜΑ 2

Ο Κώστας καταθέτει σε μια τράπεζα 15 χαρτονομίσματα των 20 € και 50 €. Συμβολίζουμε με x και y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 20 € και 50 € αντίστοιχα.

α)

i. Δίνονται οι εξισώσεις:

1. $y = 15 - x$

2. $y - x = 15$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την σχέση των x και y

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ii. Η συνολική αξία των χρημάτων είναι 480 €.

Δίνονται, ακόμα, οι εξισώσεις:

3. $50y - 20x = 480$

4. $20x + 50y = 480$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την συνολική αξία των χρημάτων σε σχέση με τα x και y . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

β) Επιλύοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων που επιλέξατε στα ερωτήματα αi) και αii) να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 20 € και 50 € κατάθεσε ο Κώστας.

(Μονάδες 11)

4 Α

ΛΥΣΗ

α)

i. Όλα τα χαρτονομίσματα είναι 15, οπότε το άθροισμα των x και y είναι 15, δηλαδή σωστή είναι η εξίσωση 1. $y = 15 - x \Leftrightarrow y + x = 15$.

ii. Τα x χαρτονομίσματα των 20 € έχουν αξία $20x$ €. Αντίστοιχα τα y χαρτονομίσματα των 50 € έχουν αξία $50y$ €. Η συνολική αξία είναι 480 €, οπότε σωστή είναι η εξίσωση

4. $20x + 50y = 480$.

β) Επιλύουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y = 15 - x \\ 20x + 50y = 480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - x \\ 20x + 50(15 - x) = 480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - x \\ -30x = 480 - 750 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - x \\ x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 9 \end{cases}.$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση $x = 9$ είναι τα χαρτονομίσματα των 20 € και $y = 6$ τα χαρτονομίσματα των 50 €.

5

ΘΕΜΑ 2

Σε μια συνεστιάση μεταξύ συγγενών παρευρίσκονται οι γονείς με τα παιδιά τους. Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς. Κάθε γονιός πλήρωσε 12€ και κάθε παιδί τα μισά. Ο συνολικός λογαριασμός ήταν 300€.

α) Αν x το πλήθος των γονιών και y το πλήθος των παιδιών, να διαλέξετε από τις παρακάτω επιλογές, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του παραπάνω προβλήματος.

A. $\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x - y = 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$

Γ. $\begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$

Δ. $\begin{cases} y = x + 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$

(Μονάδες 10)

β) Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο α) ερώτημα να βρείτε πόσοι γονείς και πόσα παιδιά υπήρχαν στο τραπέζι.

(Μονάδες 15)

5 A

ΛΥΣΗ

α) Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς, τότε η εξίσωση που προκύπτει είναι $y = x + 5$ (1).

Επίσης, το ποσό που πλήρωσαν οι γονείς είναι $12x$ και το ποσό που πλήρωσαν τα παιδιά είναι $6y$.

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι: $12x + 6y = 300$ (2)

Το σύστημα των δύο εξισώσεων είναι το Γ, δηλαδή $\begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$

β) Λύνουμε το σύστημα Γ των δύο εξισώσεων (1) και (2) του πρώτου ερωτήματος.

Με αντικατάσταση της (1) στην (2) προκύπτει

$12x + 6(x + 5) = 300 \Leftrightarrow 12x + 6x + 30 = 300 \Leftrightarrow 18x = 270 \Leftrightarrow x = 15$ και το y προκύπτει αν στην (1) αντικαταστήσουμε το x , δηλαδή $y = 15 + 5 = 20$.

Άρα, οι γονείς ήταν 15 και τα παιδιά 20.

6

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το ζεύγος $(0, 4)$ δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1): 3x + 2y = 8$ και $(\varepsilon_2): 2x - y = 3$.

(Μονάδες 7)

6 Α

ΛΥΣΗ

α) Το ζεύγος $(0,4)$ επαληθεύει μόνο την εξίσωση $3x+2y=8$ και όχι την εξίσωση $2x-y=3$, οπότε δεν αποτελεί λύση του συστήματος.

β) Από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος έχουμε $2x-y=3 \Leftrightarrow -y=-2x+3 \Leftrightarrow y=2x-3$ και με αντικατάσταση στην εξίσωση $3x+2y=8$ έχουμε:

$$3x+2(2x-3)=8 \Leftrightarrow 3x+4x-6=8 \Leftrightarrow 7x=14 \Leftrightarrow x=2.$$

Για $x=2$ στην εξίσωση $2x-y=3$ έχουμε $y=1$.

Συνεπώς η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(2,1)$.

γ) Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 2x-y=3 \end{cases}, \text{ δηλαδή το ζεύγος } (2,1).$$