

Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σημείο $A(-2, 8)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας περιττής και γνησίως μονότονης συνάρτησης f .

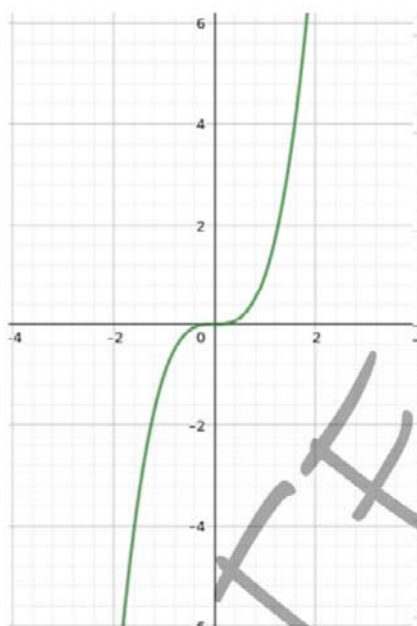
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός ακόμα σημείου, το οποίο να ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

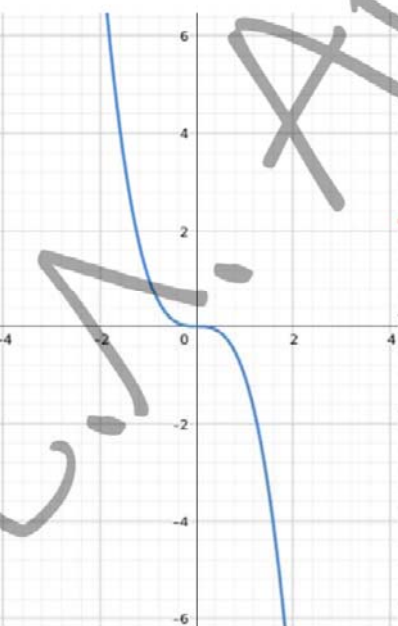
β) Να βρείτε αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 9)

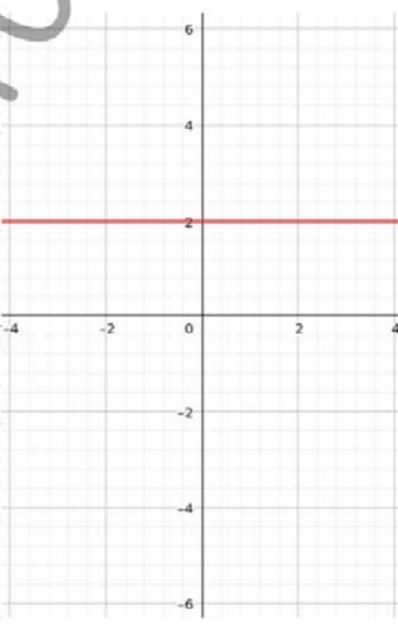
γ) Αν μία από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στη συνάρτηση f να αιτιολογήσετε ποια μπορεί να είναι:



Γραφική παράσταση (α)



Γραφική παράσταση (β)



Γραφική παράσταση (γ)

(Μονάδες 8)

1 Α

Λύση

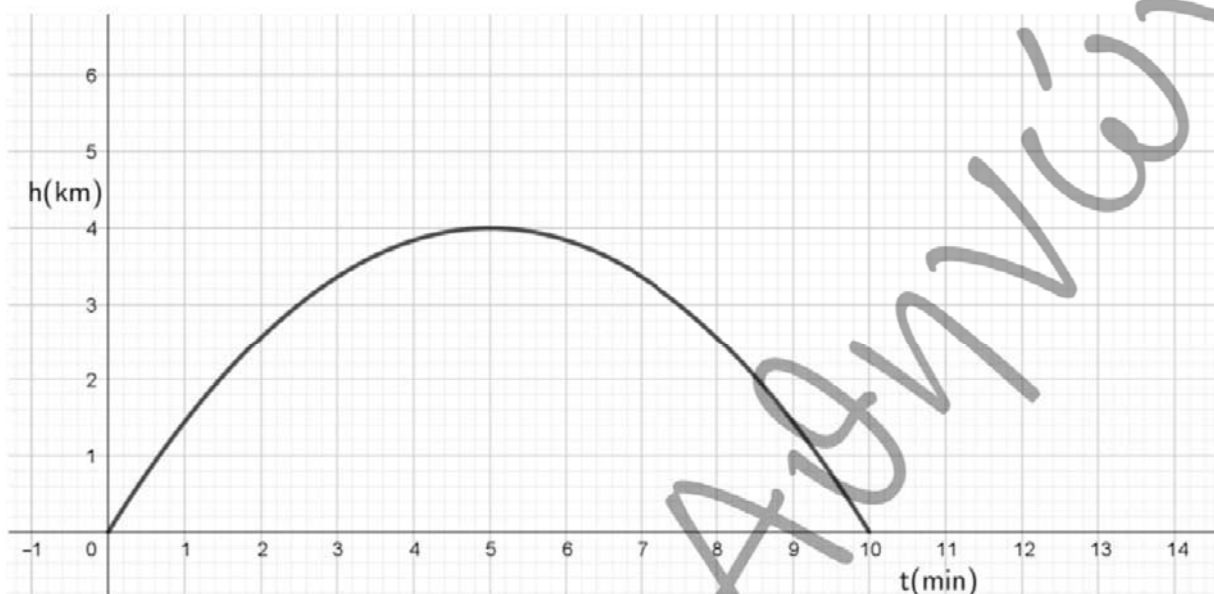
α) Εφόσον η συνάρτηση f είναι περιττή θα έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων και ένα ακόμα σημείο που θα ανήκει στη γραφική της παράσταση θα είναι το συμμετρικό του Α ως προς την αρχή των αξόνων, δηλαδή το $A'(2, -8)$.

β) Εφόσον η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη και τα σημεία A', A ανήκουν σε αυτήν θα ισχύει $x_{A'} = 2 > -2 = x_A$ και $y_{A'} = f(x_{A'}) = -8 < 8 = f(x_A) = y_A$, δηλαδή ισχύει ότι $x_{A'} > x_A \Rightarrow f(x_{A'}) < f(x_A)$ και η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, άρα θα είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Η γραφική παράσταση (α) είναι γνησίως αύξουσα και η (γ) είναι σταθερή. Μόνο η (β) αντιστοιχεί σε γνησίως φθίνουσα και περιττή. Άρα η γραφική παράσταση (β) μπορεί να είναι της συνάρτησης f .

ΘΕΜΑ 2

Προκειμένου να ελεγχθεί μηχανισμός εκτόξευσης πυραύλων δημιουργήσαμε το παρακάτω σχήμα στο οποίο φαίνεται η απόσταση του πυραύλου από το έδαφος σε συνάρτηση με τον χρόνο.



α) Να βρείτε:

i. Τον συνολικό χρόνο κίνησης του πυραύλου.

(Μονάδες 5)

ii. Το μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό.

(Μονάδες 6)

β) Σε επανάληψη του ελέγχου η εκτόξευση πραγματοποιείται από ύψος 1 km .

i. Να μεταφέρεται στην κόλλα σας την αποτύπωση της πρώτης εκτόξευσης και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την δεύτερη.

(Μονάδες 7)

ii. Το νέο μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό.

(Μονάδες 7)

2 Α

ΛΥΣΗ

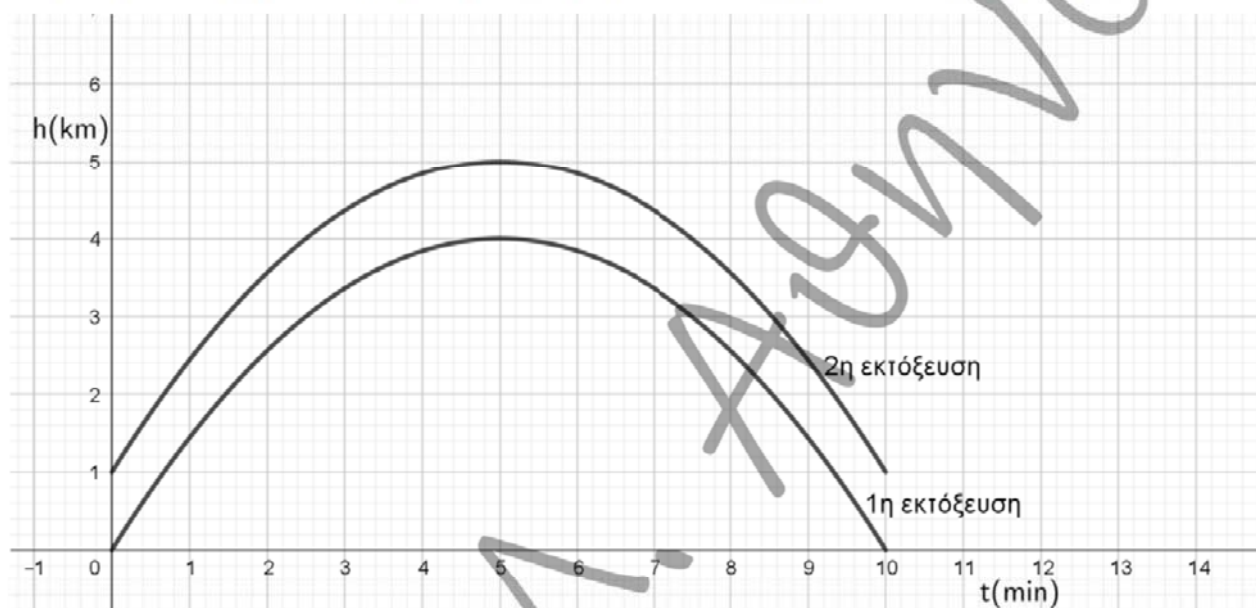
α) Σύμφωνα με το σχήμα:

i. Ο συνολικός χρόνος κίνησης είναι 10 min .

ii. Το μέγιστο ύψος που ανεβαίνει το μετεωρολογικό όργανο είναι 4 km και συνέβη όταν $t = 5 \text{ min}$.

β)

i. Η αποτύπωση της δεύτερης προκύπτει με μεταφορά προς τα πάνω της πρώτης κατά 1.

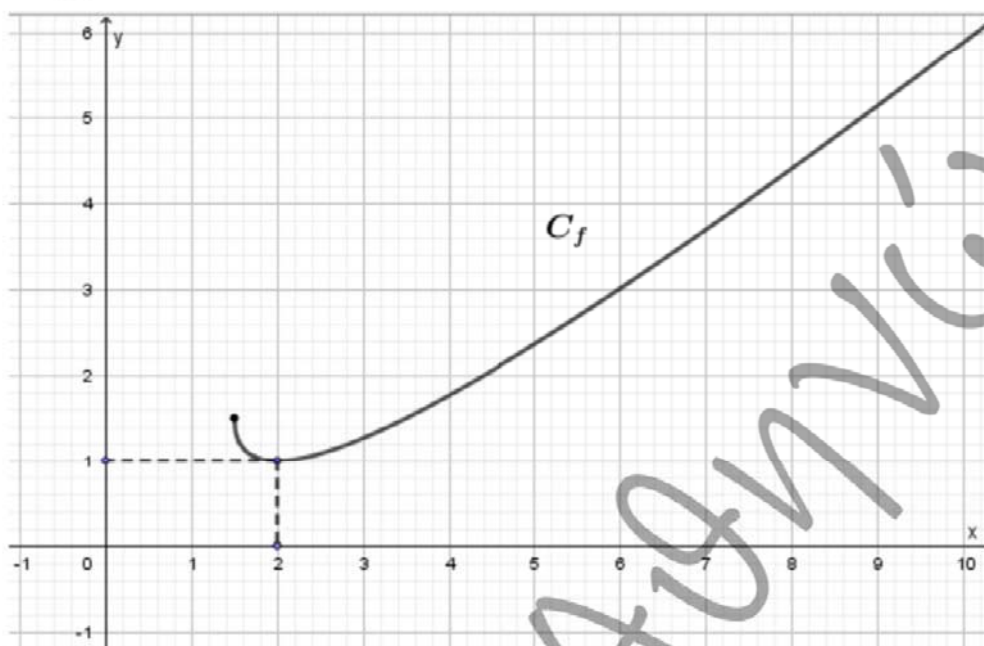


ii. Το μέγιστο ύψος που ανεβαίνει το μετεωρολογικό όργανο είναι 5 km και συνέβη επίσης όταν $t = 5 \text{ min}$.

3

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \sqrt{2x - 3}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης, καθώς και τη θέση αυτού.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι

I. γνησίως φθίνουσα

(Μονάδες 5)

II. γνησίως αύξουσα

(Μονάδες 5)

3 Α

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει και αρκεί $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$.

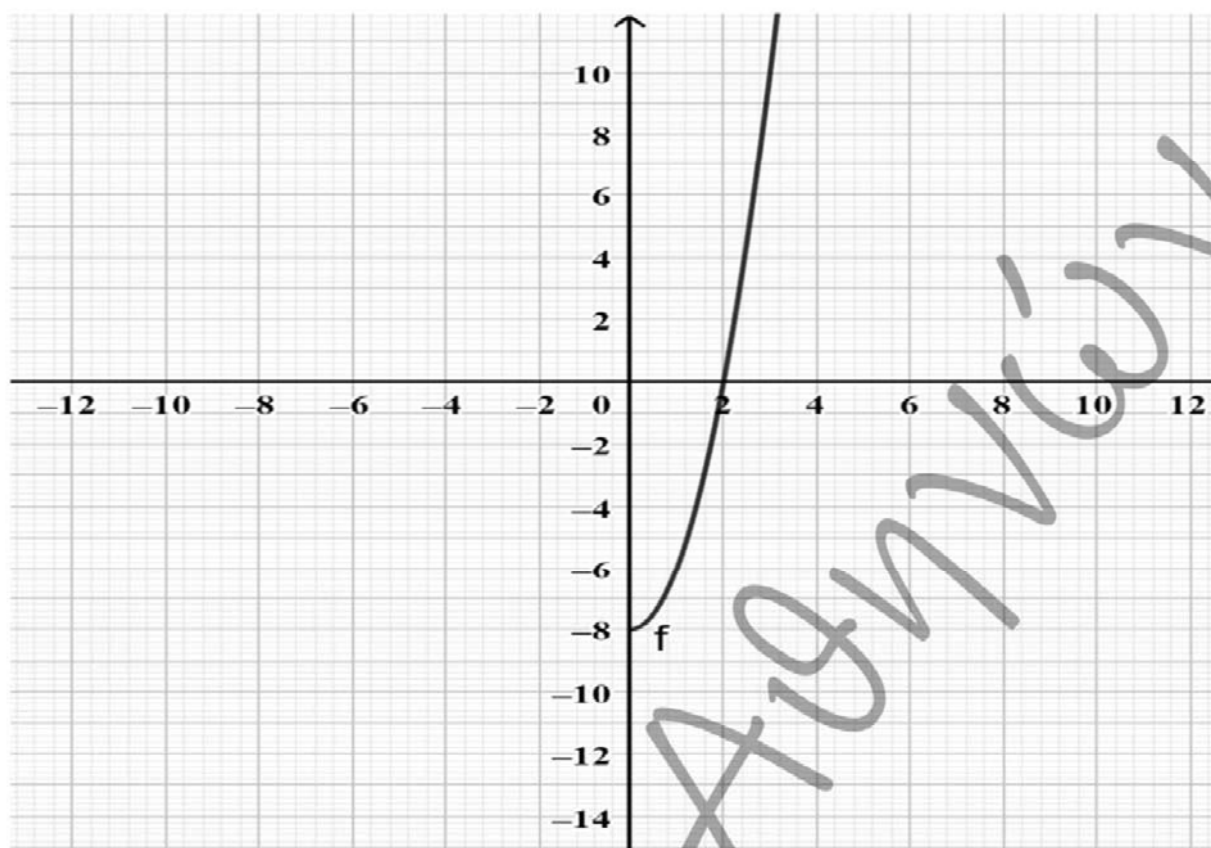
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

β) Από την γραφική παράσταση προκύπτει ότι:

Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι ίση με 1 και παρουσιάζεται όταν $x = 2$.

γ) Από την γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση f :

- I. είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$,
- II. είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$.



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται ένα τμήμα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να μεταφέρεται το σχήμα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση με το κομμάτι της καμπύλης που λείπει. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε:

i. Τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

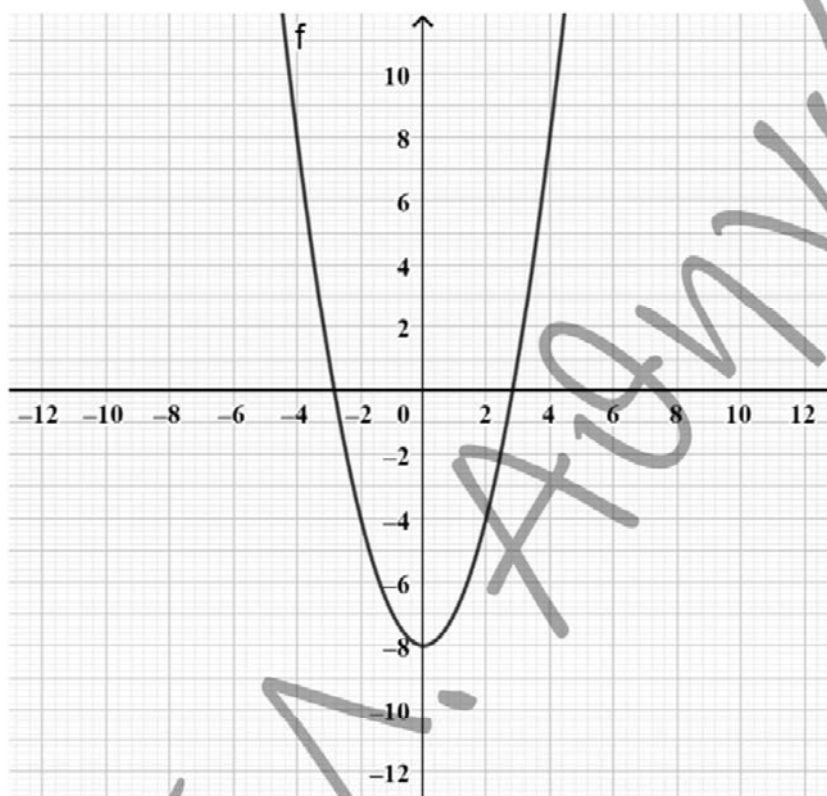
ii. Το είδος του ακροτάτου και τη θέση που το παρουσιάζει.

(Μονάδες 7)

4 Α

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση είναι άρτια για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως, έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Το κομμάτι της συνάρτησης που λείπει είναι το συμμετρικό ως προς τον άξονα $y'y$. Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει η παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης f



β)

i. Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι

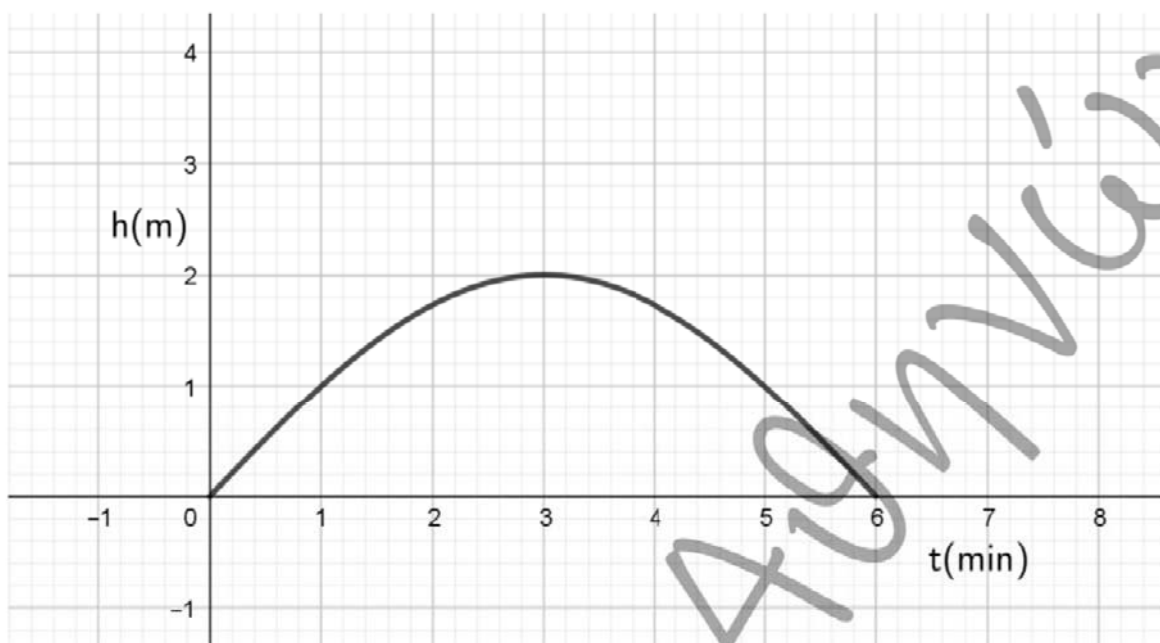
- για $x \in (-\infty, 0]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα ενώ
- για $x \in [0, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f βλέπουμε ότι έχει ελάχιστη τιμή το -8 για $x=0$.

5

ΘΕΜΑ 2

Αντικείμενο κινείται κατακόρυφα. Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά το ύψος h του αντικειμένου από το έδαφος για κάθε χρονική στιγμή t . Να βρείτε:



α) Ποιες χρονικές στιγμές το αντικείμενο απέχει $1m$ από το έδαφος.

(Μονάδες 5)

β) Ποια είναι η μέγιστη απόσταση του αντικειμένου από το έδαφος και ποια χρονική στιγμή την επιτυγχάνει.

(Μονάδες 10)

γ) Ποιο χρονικό διάστημα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος.

(Μονάδες 10)

5 A

ΛΥΣΗ

α) Το αντικείμενο απέχει από το έδαφος $1m$ όταν το σημείο της γραφικής παράστασης έχει τεταγμένη 1, δηλαδή τις χρονικές στιγμές $1min$ και $5min$.

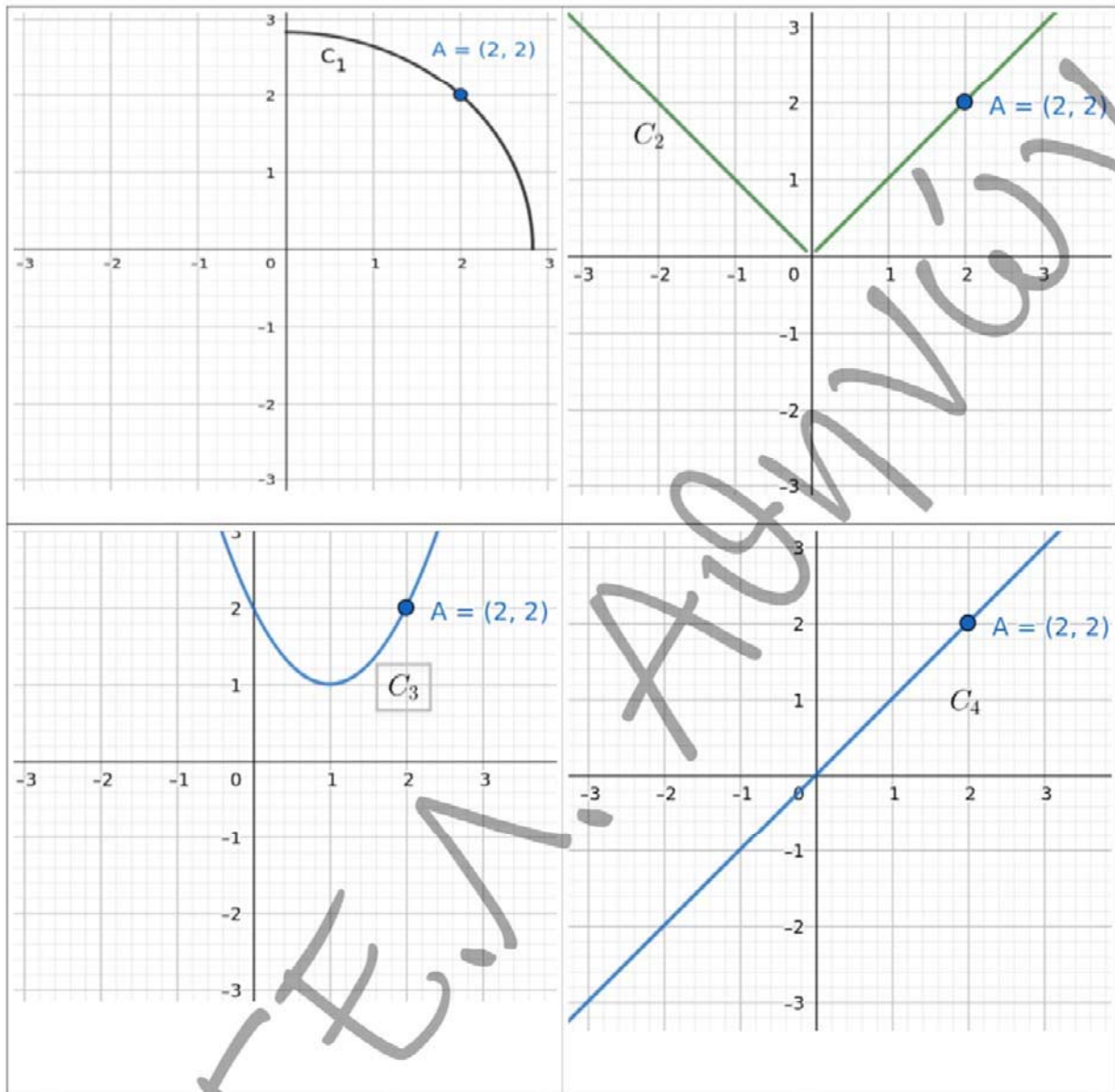
β) Σύμφωνα με το σχήμα η μέγιστη απομάκρυνση είναι $2m$. Σε αυτή την θέση το κινητό βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = 3min$.

γ) Σύμφωνα με το σχήμα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος το χρονικό διάστημα $[0,3]$.

6

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα παρακάτω σχήματα:



α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3, C_4 αναπαριστούν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, ποιες όχι και γιατί. Δίνεται ότι τουλάχιστον μία είναι άρτια και τουλάχιστον μία είναι περιττή.

(Μονάδες 12)

β) Για τις συναρτήσεις C_2, C_4 να βρείτε την τεταγμένη του σημείου τους $B(-2, k)$, αιτιολογώντας την τιμή που βρήκατε από την ιδιότητα συμμετρίας καθεμίας συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

6 A

ΛΥΣΗ

α) Η C_1 δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης άρτιας ή περιττής, αφού ορίζεται μόνο για θετικούς αριθμούς.

Η C_2 θα μπορούσε να αποτελεί γραφική παράσταση μίας άρτιας συνάρτησης, αφού φαίνεται να έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

Η C_3 δεν μπορεί να είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση, αφού δεν μπορεί να είναι συμμετρική ούτε ως προς τον άξονα $y'y$, ούτε ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Η C_4 θα μπορούσε να αποτελεί γραφική παράσταση μίας περιττής συνάρτησης, αφού φαίνεται να έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Επομένως, εφόσον δίνεται ότι υπάρχουν μία άρτια και μία περιττή συνάρτηση, συμπεραίνουμε ότι η C_2 είναι η άρτια και C_4 είναι η περιττή.

β) Αν η C_2 είναι άρτια, τότε $f(-2)=f(2)=2$, άρα $k=2$.

Αν η C_4 είναι περιττή, τότε $f(-2)=-f(2)=-2$, άρα $k=-2$.

7

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

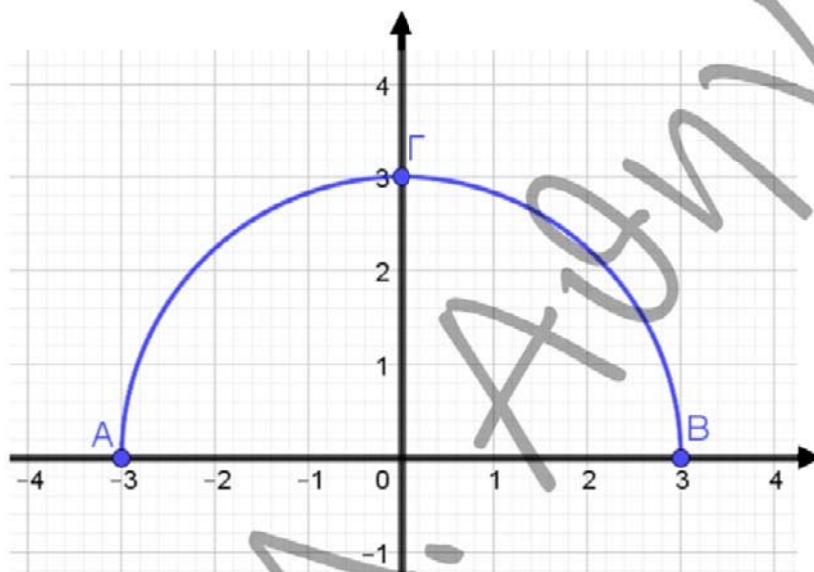
(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f και τις θέσεις των ακροτάτων.

(Μονάδες 10)



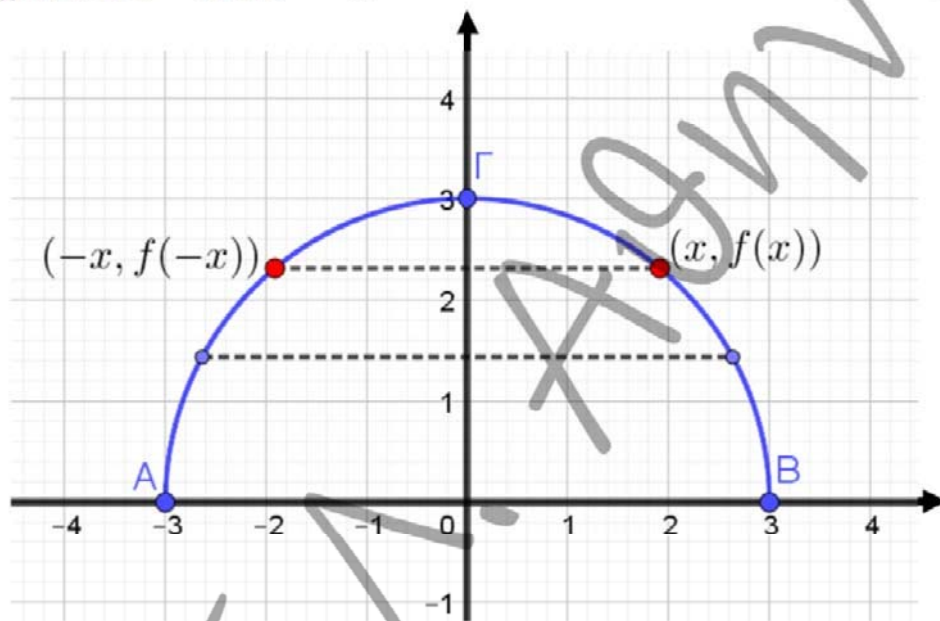
7 A

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης έχουν τετμημένες x από -3 έως 3 . Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $\Delta = [-3, 3]$.

β) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$, που σημαίνει ότι τα σημεία $(x, f(x))$ και $(-x, f(-x))$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Από το σχήμα έχουμε ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$, άρα η συνάρτηση είναι άρτια.

γ) Παρατηρούμε ότι η τιμή $3 = f(0)$ είναι η μέγιστη τιμή της f και η θέση μεγίστου είναι η $x = 0$. Ακόμα, η ελάχιστη τιμή της f είναι ο αριθμός $0 = f(3) = f(-3)$ και υπάρχουν δύο θέσεις ελαχίστου, οι $x = 3$ και $x = -3$.



8

ΘΕΜΑ 2

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[-4,4]$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

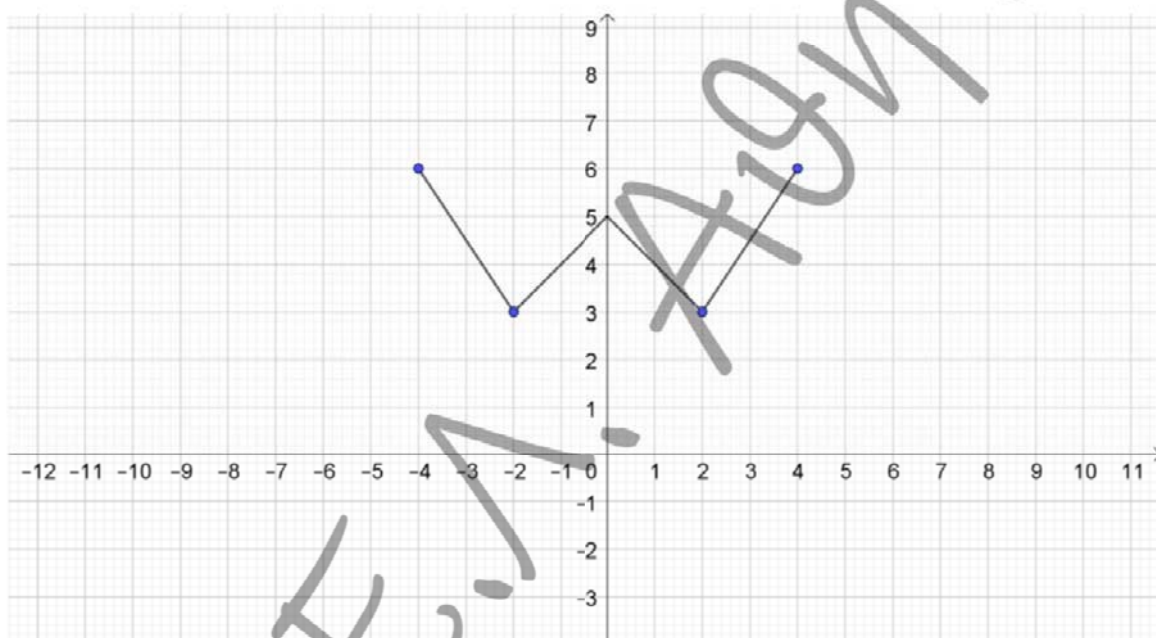
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και για ποιες τιμές του x τις παρουσιάζει.

(Μονάδες 9)



8 Α

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει άξονα συμμετρίας τον yy' , που σημαίνει ότι είναι άρτια.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2, 0]$ και στο $[2, 4]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-4, -2]$ και στο $[0, 2]$.

γ) Η f παρουσιάζει ελάχιστο το 3 και οι θέσεις ελαχίστου είναι το -2 και το 2.

9

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(-1) = 2$ και $f(1) = 0$.

Να αιτιολογήσετε (αλγεβρικά ή γραφικά)

α) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι άρτια .

(Μονάδες 8)

β) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι περιττή.

(Μονάδες 8)

γ) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 9)

9 Α

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f(-1) \neq f(1)$ οπότε η f δεν είναι άρτια.

β) Επίσης $f(-1) \neq -f(1)$ οπότε η f δεν είναι περιττή.

γ) Είναι $f(1) < f(-1)$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα, αφού αν ήταν, θα έπρεπε $f(-1) < f(1)$, που δεν ισχύει.

60 T.E.A. Αθηνών

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1), B(3,3)$.

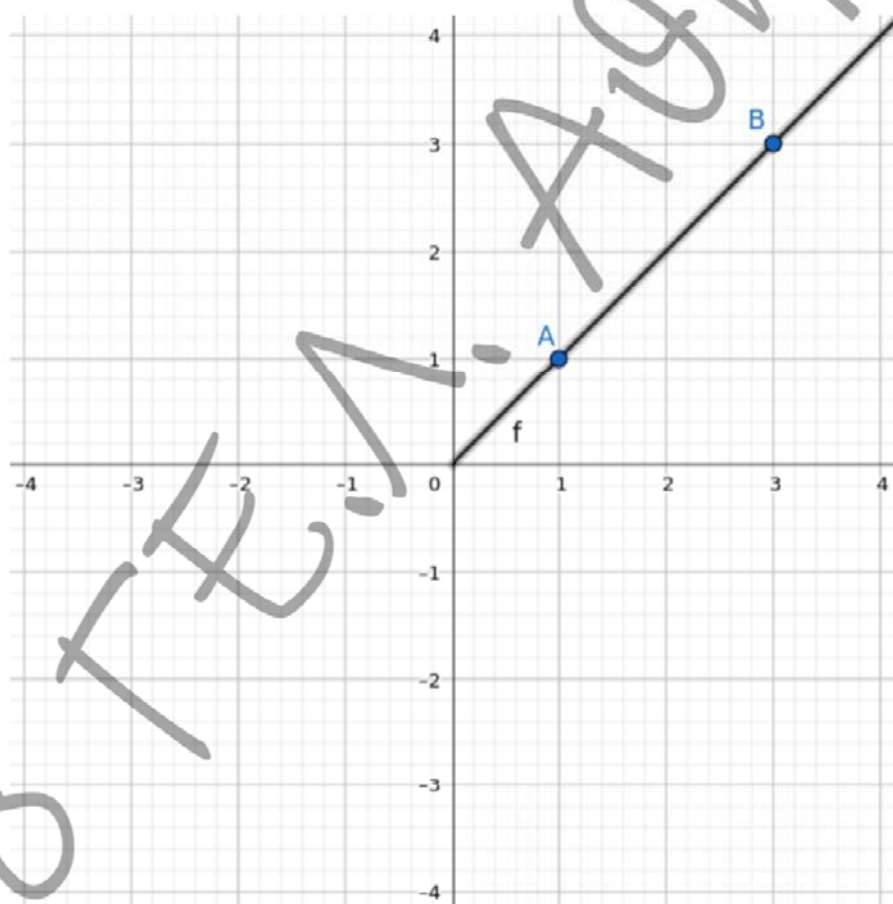
α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις επόμενες ιδιότητες θα μπορούσε και ποιες δε θα μπορούσε να έχει μία συνάρτηση f , που ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα A και B .

i) είναι σταθερή συνάρτηση

ii) είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

Μονάδες 12

β) Να συμπληρώσετε την παρακάτω γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f , η οποία διέρχεται από τα A, B και είναι περιττή.



Μονάδες 13

10 Α

ΛΥΣΗ

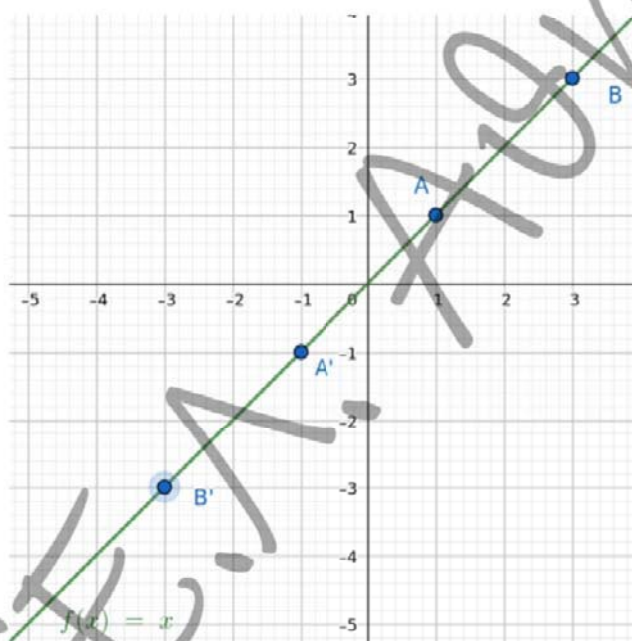
α) Η συνάρτηση δε θα μπορούσε να είναι σταθερή, αφού $f(1)=1 \neq 3=f(3)$.

Η συνάρτηση δε θα μπορούσε να είναι γνησίως φθίνουσα, αφού $1 < 3$ ενώ $f(1)=1 < 3=f(3)$.

β) Εφόσον η συνάρτηση θέλουμε να είναι περιττή και να διέρχεται από τα A,B θα διέρχεται και από τα σημεία $A'(-1, -1), B'(-3, -3)$.

Επίσης, θα είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

Μία τέτοια συνάρτηση είναι η $f(x)=x$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



11

ΘΕΜΑ 2

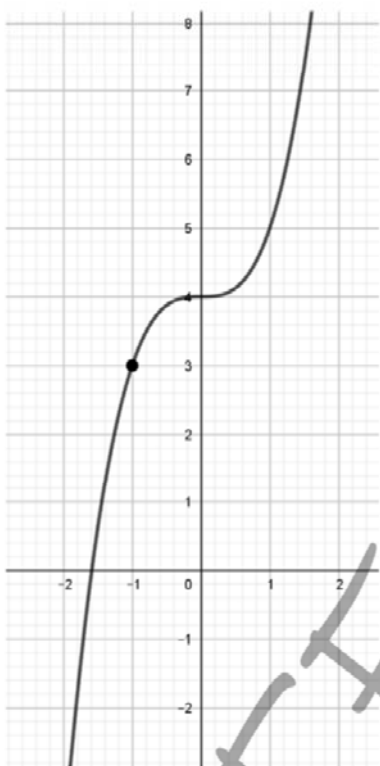
Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1,3)$.

α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο $B(2,5)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

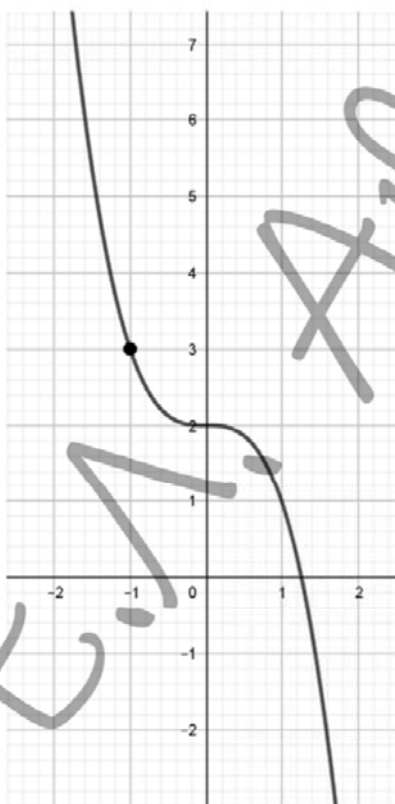
(Μονάδες 13)

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

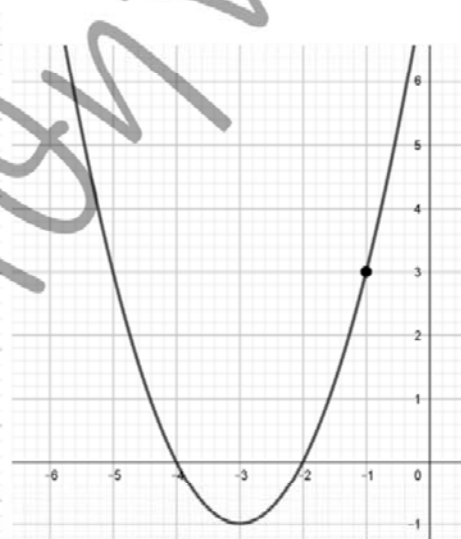
i.



ii.



iii.



(Μονάδες 12)

11 Α

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(-1,3)$ και δεν θα μπορούσε να διέρχεται και από το σημείο $B(2,5)$, διότι η f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, είναι όμως γνησίως φθίνουσα και θα έπρεπε να ισχύει $-1 < 2 \Rightarrow f(-1) > f(2)$. Όμως $f(-1) = 3$ και $f(2) = 5$.

β) Η γραφική παράσταση της f θα μπορούσε να είναι η ii. διότι ενώ όλες διέρχονται από το σημείο $(-1,3)$, η ii. είναι γραφική παράσταση γνησίως φθίνουσας συνάρτησης.

12

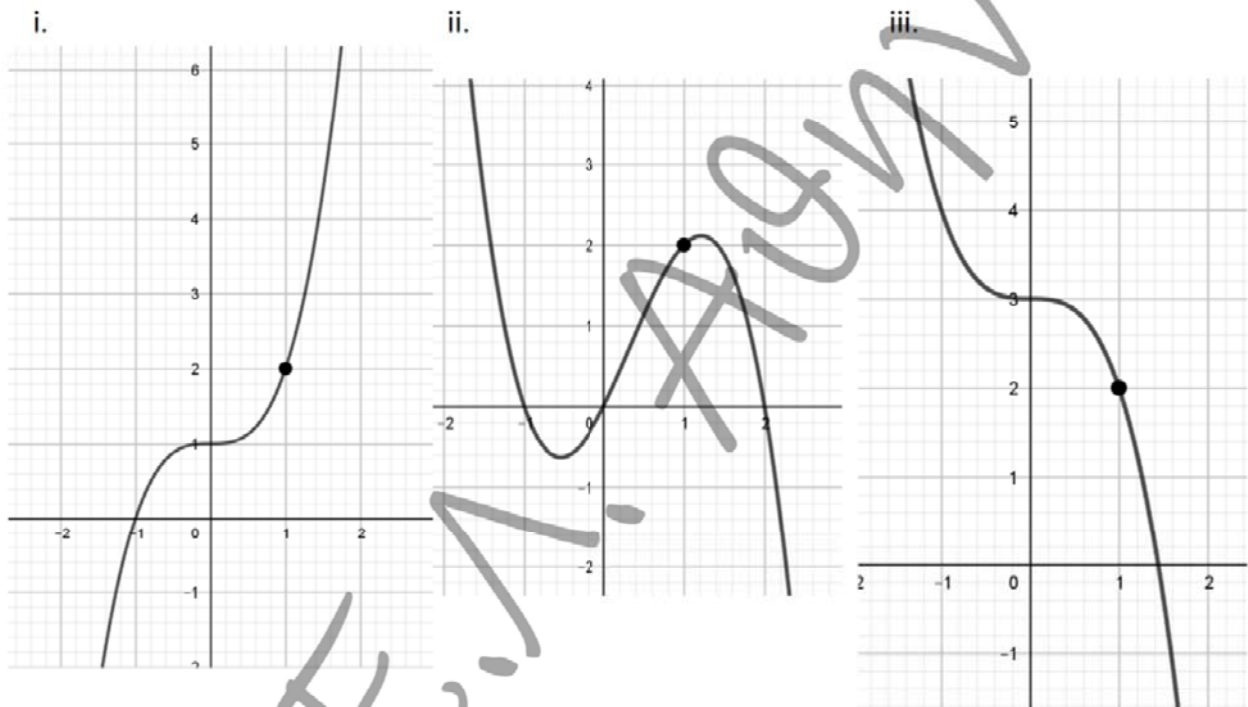
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο $B(2,9)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 12)

12 Α

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(1,2)$ και θα μπορούσε να διέρχεται και από το σημείο $B(2,9)$, διότι η f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $1 < 2 \Rightarrow f(1) < f(2)$, αφού $f(1) = 2$ και $f(2) = 9$.

β) Η γραφική παράσταση της f θα μπορούσε να είναι η i , διότι ενώ όλες διέρχονται από το σημείο $(1,2)$, η i είναι γραφική παράσταση γνησίως αύξουσας συνάρτησης.

13

ΘΕΜΑ 2

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 6)$ είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4, 2)$.

α) Να βρείτε την τιμή του α .

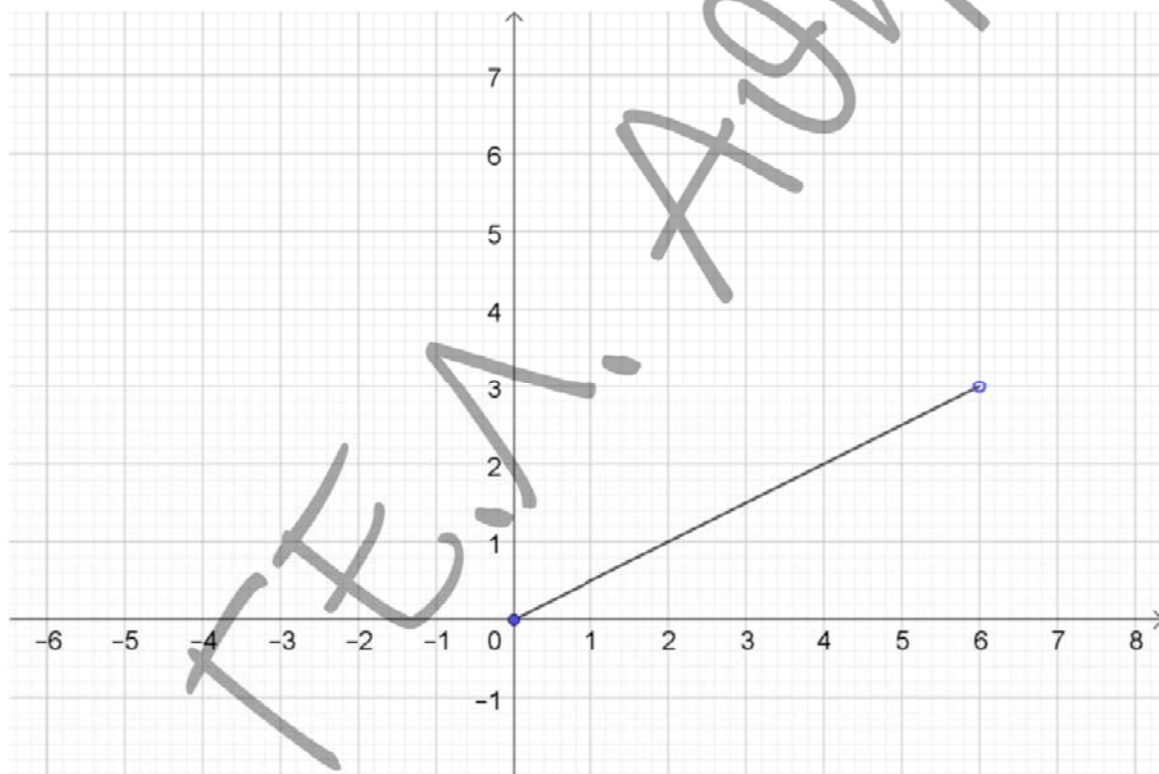
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $f(-4)$.

(Μονάδες 8)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 6)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 10)



13 Α

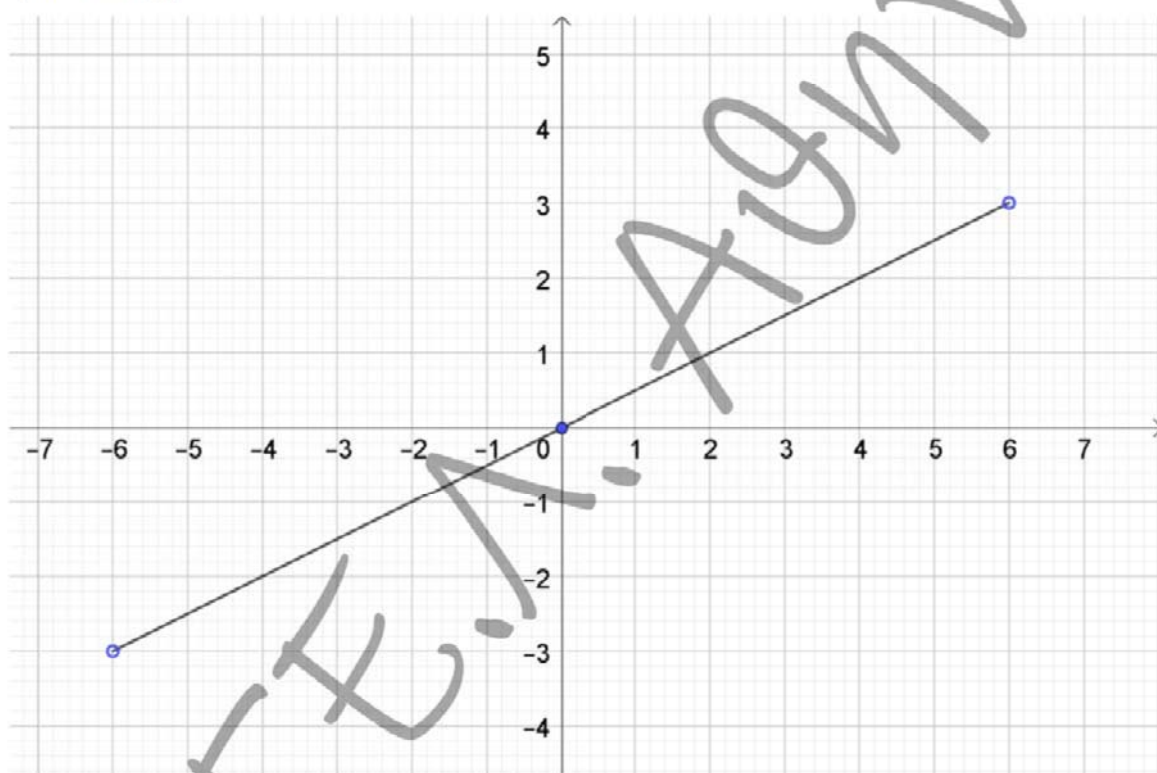
ΛΥΣΗ

α) Αφού η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 6)$ είναι περιττή, θα πρέπει για κάθε $x \in (\alpha, 6)$ και $-x \in (\alpha, 6)$. Αυτό ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = -6$.

β) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(4, 2)$, οπότε $f(4) = 2$.

Αφού η συνάρτηση f είναι περιττή, θα πρέπει για κάθε $x \in (-6, 6)$ να ισχύει $f(-x) = -f(x)$. Συνεπώς $f(-4) = -f(4) = -2$.

γ) Αφού η συνάρτηση f είναι περιττή, η γραφική της παράσταση θα έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο $O(0, 0)$. Η γραφική της παράσταση στο $(-6, 6)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



14

ΘΕΜΑ 2

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 3)$ είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$.

α) Να βρείτε την τιμή του α .

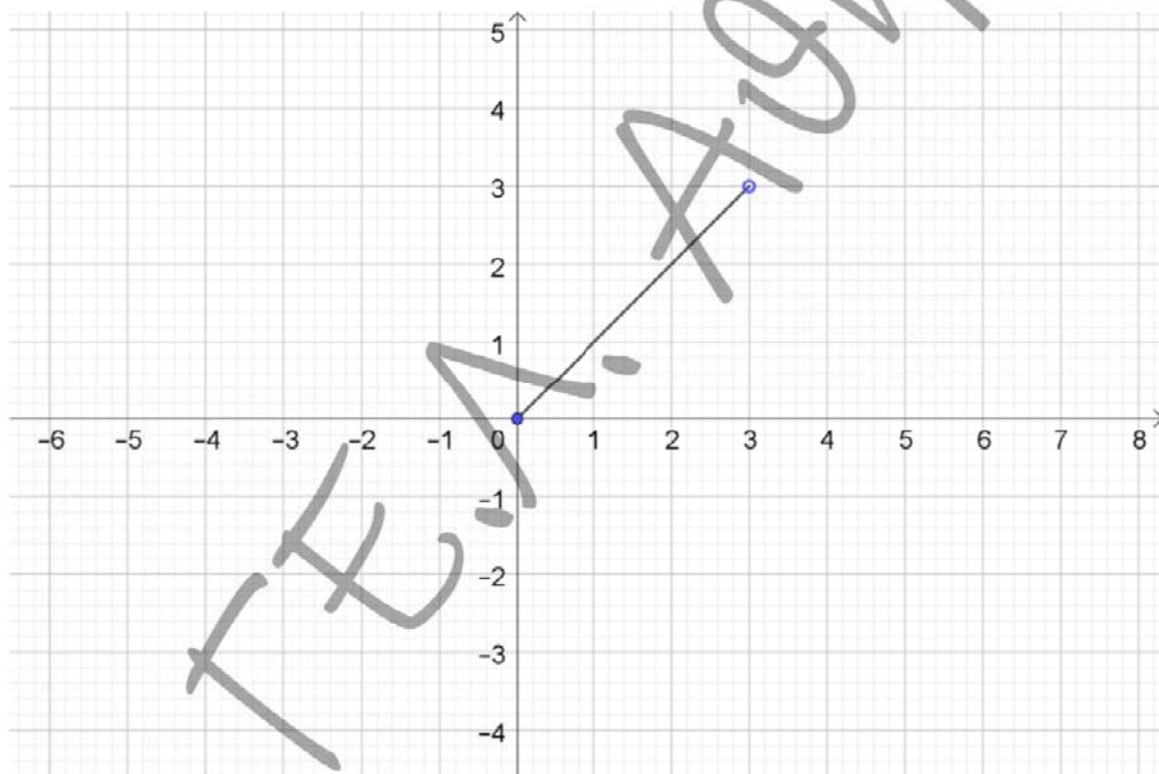
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $f(-2)$.

(Μονάδες 8)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 3)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 10)



14 Α

ΛΥΣΗ

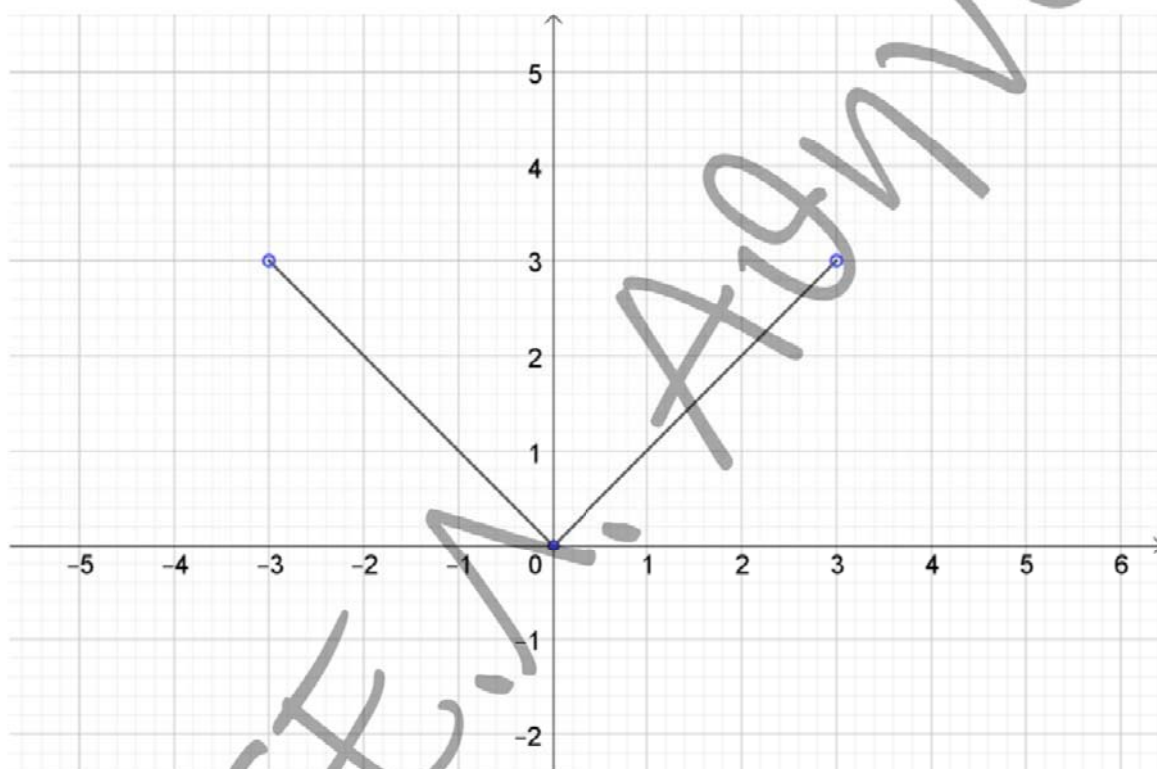
α) Αφού η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 3)$ είναι άρτια, θα πρέπει για κάθε $x \in (\alpha, 3)$ και $-x \in (\alpha, 3)$. Αυτό ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = -3$.

β) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$, οπότε $f(2) = 2$.

Αφού η συνάρτηση f είναι άρτια, θα πρέπει για κάθε $x \in (-3, 3)$ να ισχύει $f(-x) = f(x)$.

Συνεπώς $f(-2) = f(2) = 2$.

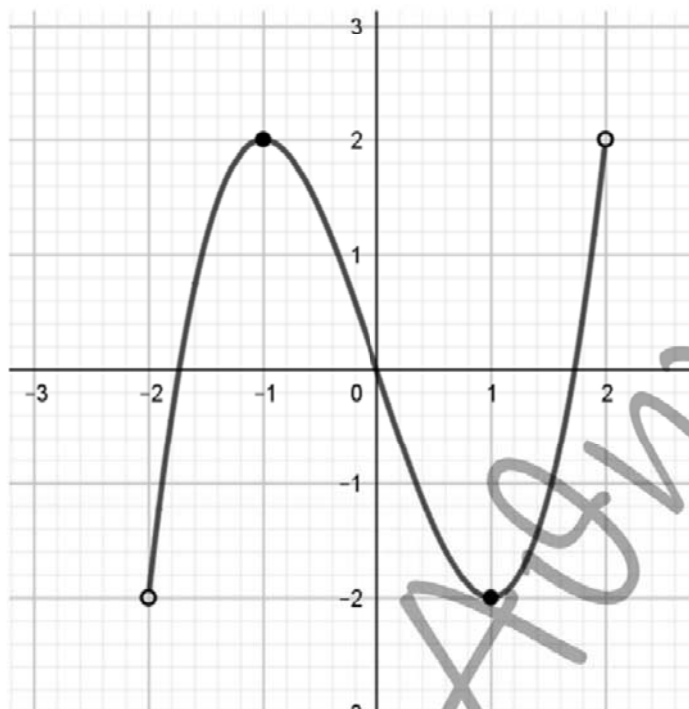
γ) Αφού η συνάρτηση f είναι άρτια η γραφική της παράσταση θα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα yy' . Η γραφική της παράσταση στο $(-3, 3)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



15

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-2, 2)$.



α) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

β) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

(Μονάδες 10)

15 A

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι περιττή, γιατί η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων $(0,0)$.

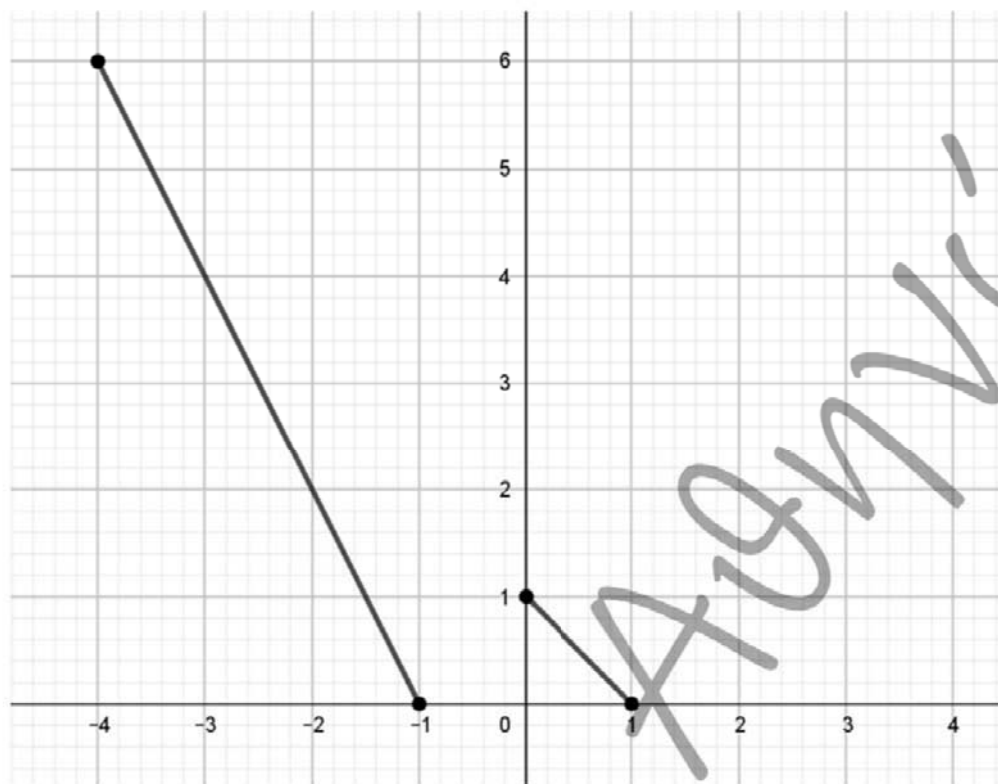
β) Η συνάρτηση f για $x \in (-2, -1]$ και $x \in [1, 2)$ είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Για $x = -1$ η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της $f(-1) = 2$ και για $x = 1$ η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της $f(1) = -2$.

16

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4, 4]$.



α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε

i. τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

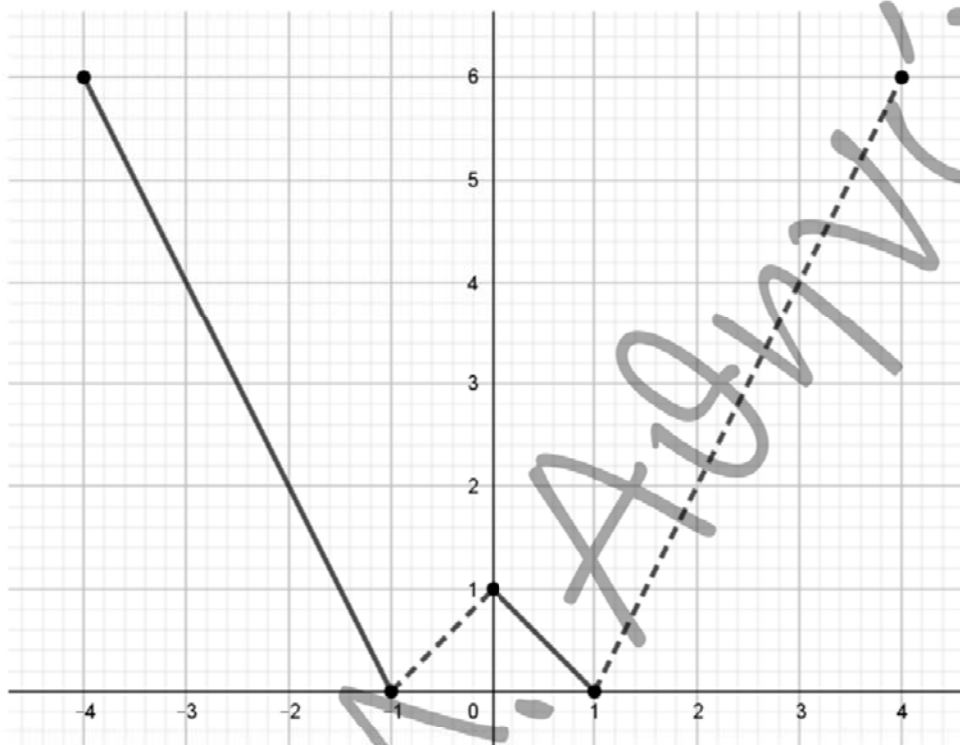
ii. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

(Μονάδες 9)

16 Α

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση θα είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ άξονα. Στο παρακάτω σχήμα είναι χαραγμένα και τα υπόλοιπα τμήματα με διακεκομμένη γραμμή.



β)

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα είναι τα $[-4, -1]$ και $[0, 1]$, γιατί στα διαστήματα αυτά όσο μεγαλώνουν οι τιμές του x , μικραίνουν οι αντίστοιχες τιμές του y .

ii. Η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 6 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει τις τιμές -4 και 4 , δηλαδή

$$\max f(x) = f(-4) = f(4) = 6$$

και η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με 0 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει τις τιμές -1 και 1 , δηλαδή

$$\min f(x) = f(-1) = f(1) = 0.$$

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3, 3]$. Η συνάρτηση f είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 3]$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(-1) < f(2)$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3, 3]$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου.

(Μονάδες 6)

δ) Παρακάτω δίνονται 4 τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f . Να επιλέξετε το σωστό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ β. $f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$ γ. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ δ. $f(x) = -\sqrt{x^2 - 9}$

(Μονάδες 6)

17 Α

ΛΥΣΗ

α) Αφού $-2 < -1$ και f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3, 0]$ είναι $f(-2) > f(-1)$.

Επίσης f άρτια οπότε $f(-2) = f(2)$. Συνεπώς $f(-1) < f(2)$.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 3]$, οπότε $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [0, 3]$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3, 0]$, οπότε $f(-3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [0, 3]$.

Επίσης f άρτια οπότε $f(-3) = f(3)$.

Συνεπώς $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3, 3]$.

γ) Αφού $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3, 3]$, συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0, που είναι και η μοναδική θέση ελαχίστου, αφού λόγω μονοτονίας $f(x) > f(0)$ για κάθε $x \in [-3, 0) \cup (0, 3]$.

Αφού $f(x) \leq f(3)$ για κάθε $x \in [-3, 3]$, συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο 3, όπως και στο -3 αφού $f(-3) = f(3)$, που είναι και οι μοναδικές θέσεις μεγίστου, αφού λόγω μονοτονίας $f(x) < f(3)$ για κάθε $x \in (-3, 3)$.

δ) Από τους 4 τύπους μόνο ο α. και ο β. έχουν πεδίο ορισμού το $[-3, 3]$.

Επίσης για τον τύπο α. ισχύει $f(0) > f(3)$ οπότε δεν μπορεί να αντιστοιχεί στη συνάρτηση του προβλήματος. Συνεπώς ο σωστός τύπος είναι ο β. $f(x) = -\sqrt{9-x^2}$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = -\sqrt{9-x^2}$.

