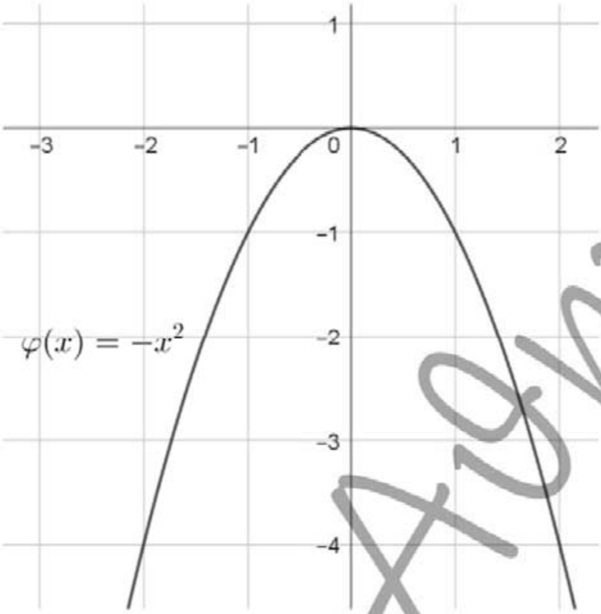
Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

# 1

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2, x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x^2 + 2x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\varphi$, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f$.




(Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$ να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως μονότονη.

(Μονάδες 5)

ii. Το ολικό ακρότατο της $f$ καθώς και τη θέση του.

(Μονάδες 5)

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa, \kappa < 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

6ο ΓΕΛ Αθηνών

# 1 Α
ΛΥΣΗ

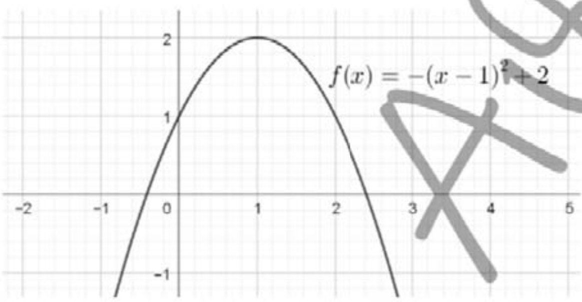
α) Ο τύπος της συνάρτησης $f$ διαδοχικά γράφεται:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 2x + 1 = \\ &= -x^2 + 2x - 1 + 2 = \\ &= -(x^2 - 2x + 1) + 2 = \\ &= -(x-1)^2 + 2. \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, ξεκινώντας από το ζητούμενο έχουμε:

$$\begin{aligned} &-(x-1)^2 + 2 = \\ &= -(x^2 - 2x + 1) + 2 = \\ &= -x^2 + 2x - 1 + 2 = \\ &= -x^2 + 2x + 1 = f(x). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $f(x) = \varphi(x-1) + 2$. Άρα, η γραφική παράσταση της $f$ προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\varphi$ κατά μία μονάδα δεξιά και δύο μονάδες απάνω:



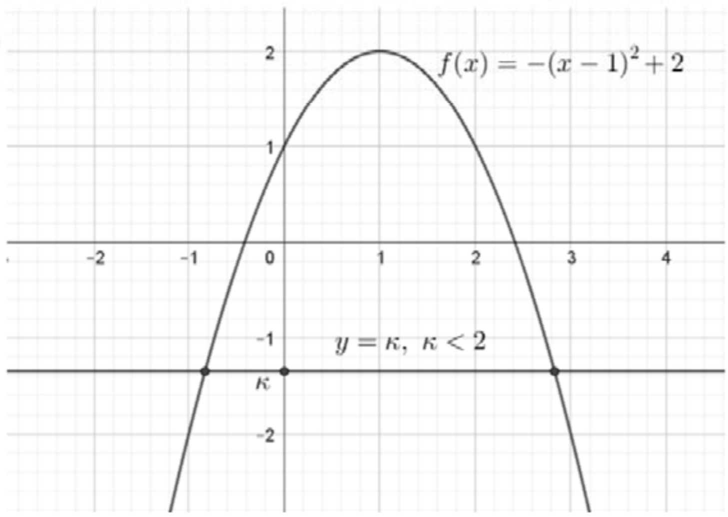

β)

i. Από τη γραφική της παράσταση, προκύπτει ότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

ii. Η $f$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$ το $f(1) = 2$.

iii. Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa < 2$ είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της $f$ με την οριζόντια ευθεία y$= \kappa$.

Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι για $\kappa < 2$, υπάρχουν δύο σημεία τομής. Άρα, η εξίσωση έχει δύο ρίζες.



**2**

ΘΕΜΑ 2

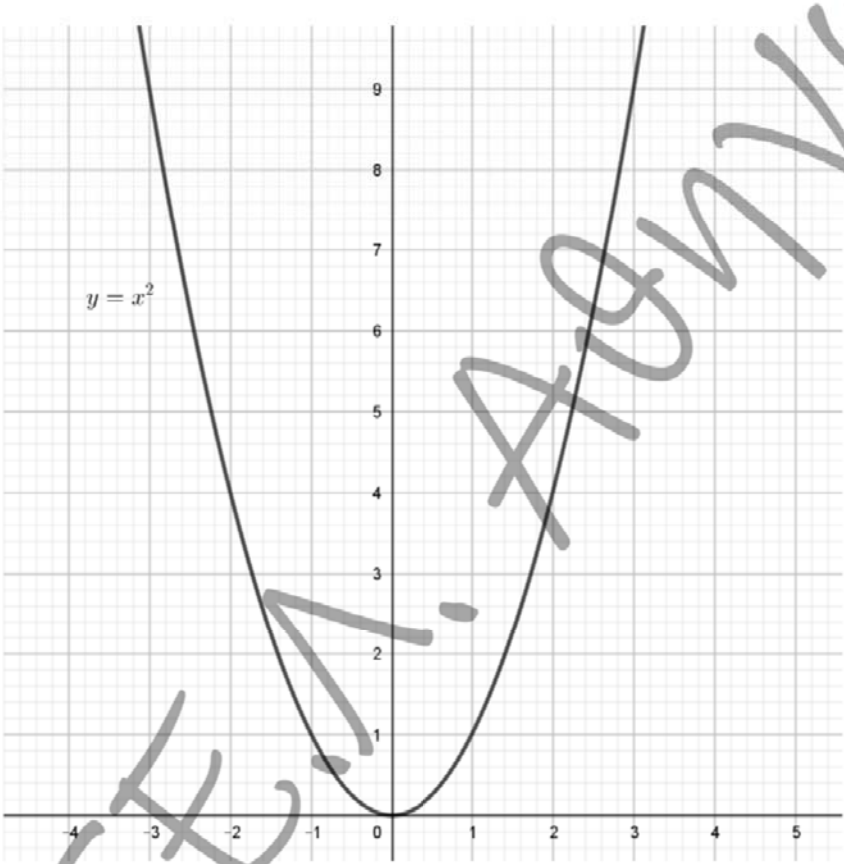
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η $f$ γράφεται στη μορφή $f(x) = (x-2)^2 + 1$.

(Μονάδες 10)

β) Να αναφέρετε με ποιες μετατοπίσεις της $y(x) = x^2$ προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$, την οποία και να χαράξετε στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί.

(Μονάδες 15)



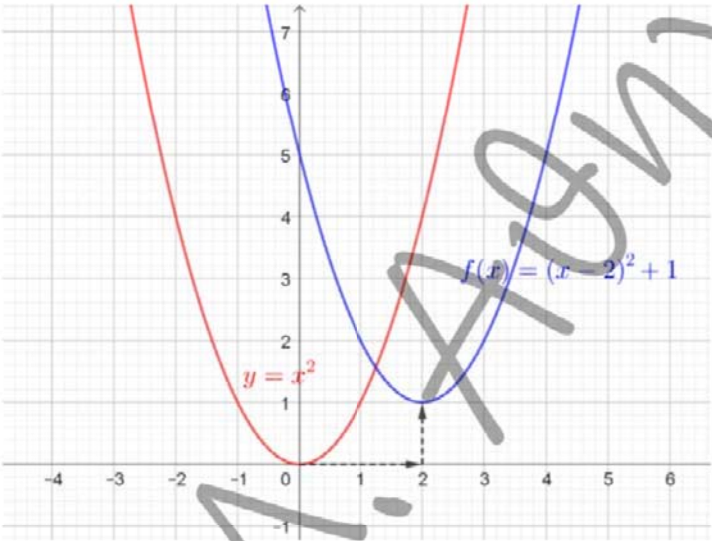
# 2 Α

ΛΥΣΗ

α) Ο τύπος της συνάρτησης $f$ διαδοχικά γράφεται:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 5 = \\ &= x^2 - 4x + 4 + 1 = \\ &= x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 + 1 \\ &= (x-2)^2 + 1. \end{aligned}$$

β) Παρατηρούμε ότι $f(x) = y(x-2) + 1$. Άρα, η γραφική παράσταση της $f$ προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $y(x) = x^2$ κατά δύο μονάδες δεξιά και μία μονάδα προς τα πάνω.



# 3

ΘΕΜΑ 4

Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος με πλευρά 2 cm, παίρνουμε τα εσωτερικά σημεία Ε,Ζ,Η,Θ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, αντίστοιχα, ώστε $\mathrm{EB}=\mathrm{Z\Gamma}=\mathrm{H\Delta}=\Theta\mathrm{A}=x$ και σχηματίζεται το τετράγωνο ΕΖΗΘ .

α) Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ ως συνάρτηση του x και να βρείτε τις δυνατές τιμές του x.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ συναρτήσει της πλευράς x δίνεται από τη συνάρτηση $\mathrm{E}(x)=2(x-1)^2+2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.

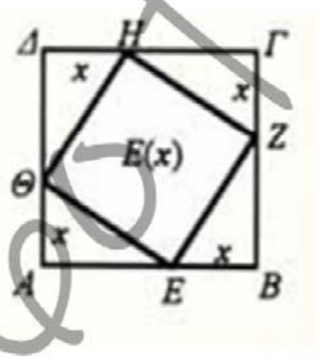
(Μονάδες 6)

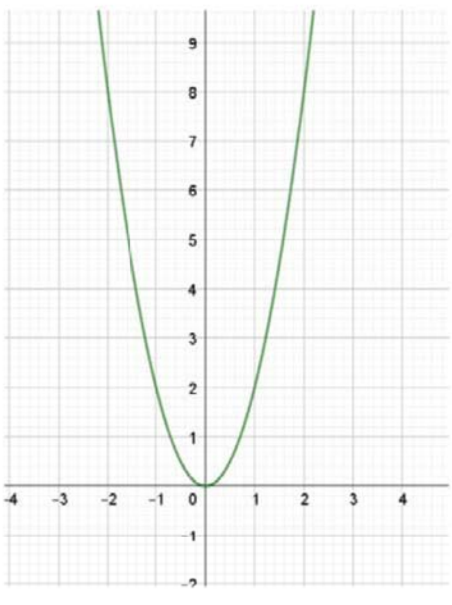
γ) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2$. Μετατοπίζοντας την κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathrm{E}(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το x έτσι ώστε το εμβαδόν $\mathrm{E}(x)$ του ΕΖΗΘ να γίνεται ελάχιστο.

(Μονάδες 8)

δ) Τι συμπέρασμα προκύπτει για τα σημεία Ε,Ζ,Η,Θ στην περίπτωση που το εμβαδόν του ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο.

(Μονάδες 5)



# 3 Α

ΛΥΣΗ

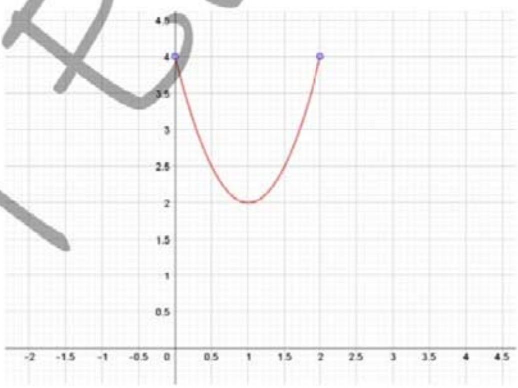
α) Αφού $\mathrm{Z\Gamma} = x$ και $\mathrm{B\Gamma} = 2$ έχουμε ότι $\mathrm{BZ} = 2 - x$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΕΒΖ έχουμε : $\mathrm{EZ}^2 = \mathrm{BZ}^2 + \mathrm{EB}^2 = (2-x)^2 + x^2$ οπότε $\mathrm{EZ} = \sqrt{(2-x)^2 + x^2}$. Τέλος αφού το τμήμα $\mathrm{Z\Gamma} = x$ είναι μέρος της πλευράς $\mathrm{B\Gamma} = 2$, έχουμε ότι $0 < x < 2$.

β) Το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ είναι ίσο με $\mathrm{EZ}^2$. Είναι

$$\begin{aligned}
&\mathrm{EZ}^2 = (2-x)^2 + x^2 = \\
&4 - 4x + x^2 + x^2 = \\
&2x^2 - 4x + 4 = \\
&2x^2 - 4x + 2 + 2 = \\
&2(x^2 - 2x + 1) + 2 = \\
&2(x-1)^2 + 2
\end{aligned}$$

οπότε η ζητούμενη συνάρτηση είναι $\mathrm{E}(x) = 2(x-1)^2 + 2$ με πεδίο ορισμού το $(0,2)$ αφού όπως δείξαμε παραπάνω είναι $0 < x < 2$.

γ) Η γραφική παράσταση της $\mathrm{E}(x)$ θα προκύψει από τη γραφική παράσταση της $g(x) = 2x^2$, με μια οριζόντια μετατόπιση 1 μονάδα δεξιά και στη συνέχεια με μία κατακόρυφη μετατόπιση 2 μονάδων προς τα πάνω. Η γραφική παράσταση της $\mathrm{E}(x)$ στο $(0,2)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



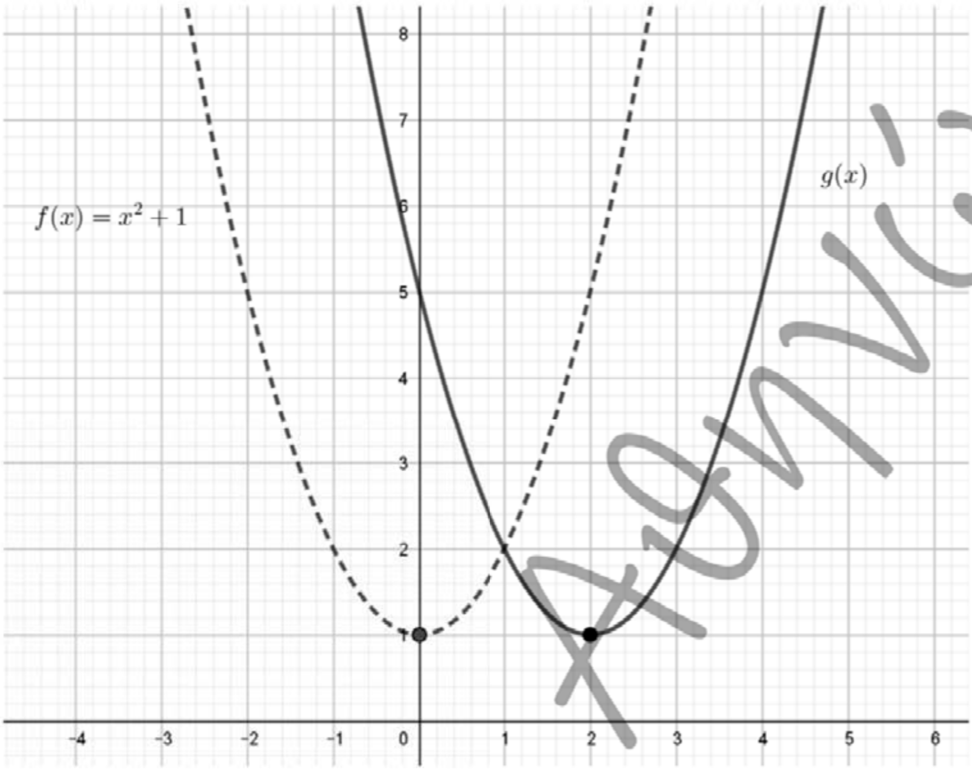
Από τη γραφική παράσταση συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο όταν $x = 1$. Μάλιστα η ελάχιστη τιμή του είναι $2\,cm^2$.

δ) Για $x = 1$ έχουμε ότι $\mathrm{EB} = \mathrm{Z\Gamma} = \mathrm{H\Delta} = \Theta\mathrm{A} = 1$, δηλαδή το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο όταν οι κορυφές του είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ.

# 4

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+1$ και η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$ με $x \in \mathbb{R}$.




α)

i. Είναι η $f$ άρτια ή περιττή συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ii. Έχει η $f$ μέγιστη τιμή ή ελάχιστη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

β)

i. Με ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f$ προέκυψε η γραφική παράσταση της $g$;

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $g$.

(Μονάδες 4)

# 4 A

ΛΥΣΗ

α)

i. Η $f$ είναι άρτια γιατί, όπως φαίνεται στο σχήμα, η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ άξονα.

ii. Η $f$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή ίση με $1$ για $x=0$, αφού, όπως φαίνεται στο σχήμα, $f(0)=1$ και $f(x)\geq 1$ για οποιοδήποτε $x\in\mathbb{R}$.

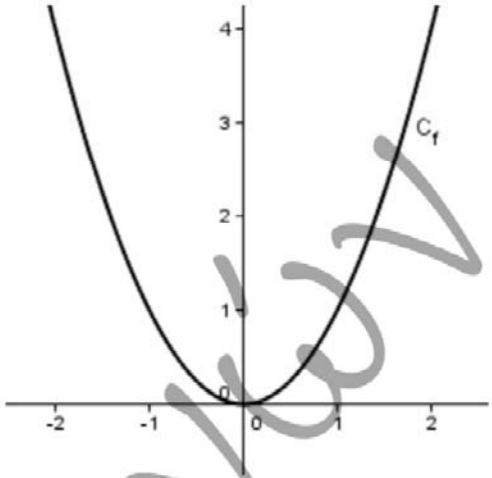
β)

i. Η γραφική παράσταση της $g$ προέκυψε με οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f$ κατά $2$ μονάδες δεξιά.

ii. Σύμφωνα με το βi), ο τύπος της $g$ είναι $g(x)=f(x-2)=\left(x-2\right)^2+1=x^2-4x+5$.

## 5
ΘΕΜΑ 2

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$.




α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $\phi(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την $C_f$ αν την μετατοπίσουμε μια μονάδα, προς τα πάνω.

(Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $\phi(x)$.

(Μονάδες 8)

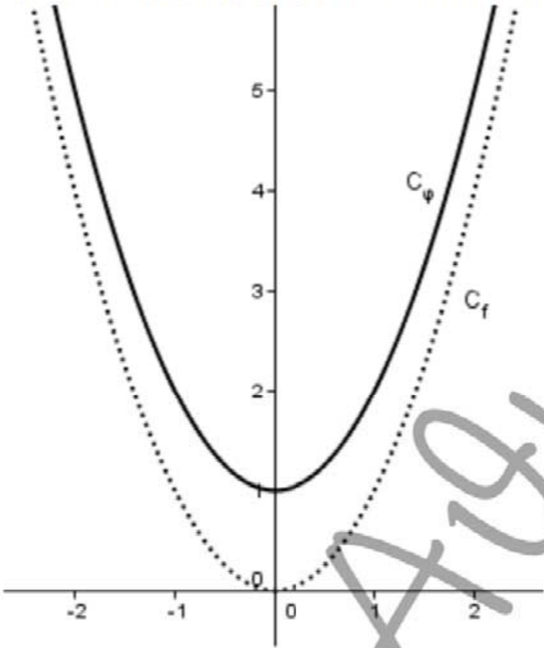
γ) Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της $\phi(x)$.

(Μονάδες 9)

# 5 A
ΛΥΣΗ

α) Αν μετατοπίσουμε τη $C_f$ μια μονάδα προς τα πάνω, τότε ο τύπος που αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση που προκύπτει $\phi(x)=x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\phi(x)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.




γ) Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι η $\phi(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty\ 0]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$. Η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με $\phi(0)=1$.

# 6

ΘΕΜΑ 4

Με συρματόπλεγμα μήκους 20 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $x$ και $y$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να εκφράσετε την πλευρά $y$ ως συνάρτηση της πλευράς $x$ και να βρείτε τις δυνατές τιμές της πλευράς $x$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $\mathrm{E}(x)$ του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x δίνεται από τη συνάρτηση $\mathrm{E}(x) = -(x-5)^2 + 25$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.

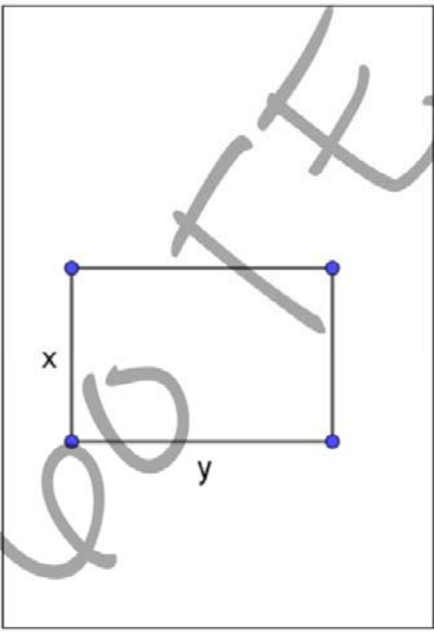
(Μονάδες 7)

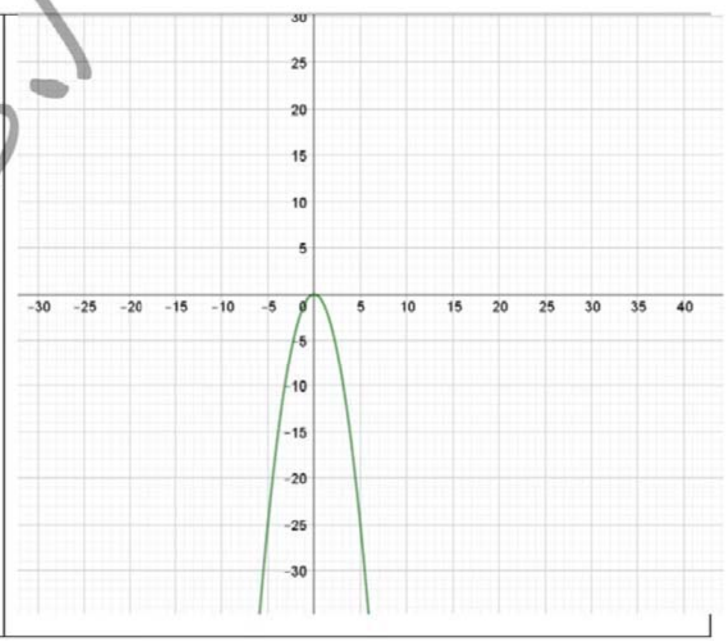
γ) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράστασης της συνάρτησης $g(x) = -x^2$. Μετατοπίζοντάς τη κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathrm{E}(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το $x$ έτσι ώστε το εμβαδόν $\mathrm{E}(x)$ του ορθογωνίου να γίνεται μέγιστο.

(Μονάδες 7)

δ) Για την τιμή του $x$ που βρήκατε στο ερώτημα γ), να βρείτε την πλευρά $y$ και να προσδιορίσετε το είδος του ορθογωνίου.

(Μονάδες 4)



# 6 A

ΛΥΣΗ

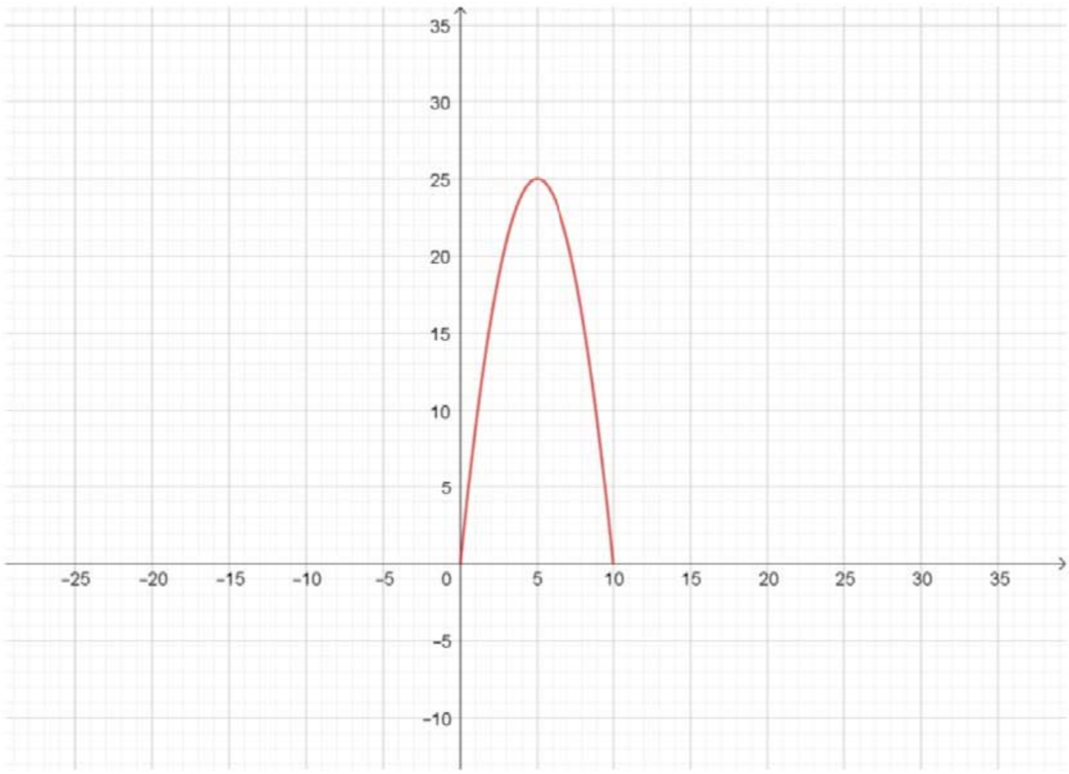
α) Η περίμετρος του ορθογωνίου, ισούται αφενός με $2x+2y$ και αφετέρου με 20 m που είναι το μήκος του συρματοπλέγματος με το οποίο κατασκευάστηκε. Συνεπώς είναι $2x+2y=20 \Leftrightarrow x+y=10 \Leftrightarrow y=10-x$. Επίσης πρέπει $x>0$ και $y>0 \Leftrightarrow 10-x>0 \Leftrightarrow x<10$ ως μήκη πλευρών, οπότε συναληθεύοντας έχουμε τελικά ότι $0<x<10$.

β) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $x \cdot y = x \cdot (10-x) = 10x - x^2$ οπότε

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}(x) = 10x - x^2 = \\
&-x^2 + 10x - 25 + 25 = \\
&-(x^2 - 10x + 25) + 25 = \\
&-(x-5)^2 + 25
\end{aligned}
$$

με πεδίο ορισμού της το $(0,10)$ αφού όπως δείξαμε παραπάνω είναι $0<x<10$.

γ) Η γραφική παράσταση της $\mathrm{E}(x)$ θα προκύψει από τη γραφική παράσταση της $g(x)=-x^2$, με μια οριζόντια μετατόπιση 5 μονάδες δεξιά και στη συνέχεια με μία κατακόρυφη μετατόπιση 25 μονάδων προς τα πάνω. Η γραφική παράσταση της $\mathrm{E}(x)$ στο $(0,10)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



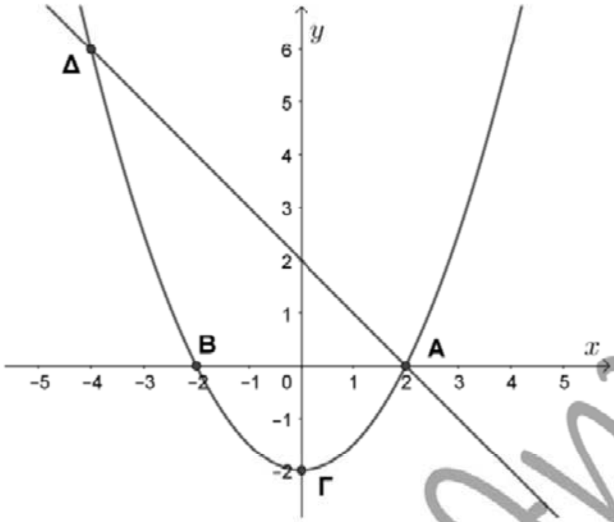

Από τη γραφική παράσταση συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο όταν . Μάλιστα η μέγιστη τιμή του είναι $25\, m^2$.

δ) Για $x=5$ έχουμε ότι $y=10-5=5$, δηλαδή το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο όταν γίνεται τετράγωνο.

# 7

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και της ευθείας $g(x) = -x + 2$.




α) Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία $A, B, \Gamma$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma$.

(Μονάδες 8)

β) Αν $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 0$ και $\gamma = -2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της παραβολής.

(Μονάδες 8)

γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

(Μονάδες 9)

# 7 A

ΛΥΣΗ

α) Αφού η παραβολή διέρχεται από το σημείο $\Gamma(0,-2)$, ισχύει ότι

$$f(0)=-2 \Leftrightarrow \alpha\cdot 0^2+\beta\cdot 0+\gamma=-2 \Leftrightarrow \gamma=-2.$$

Άρα, $f(x)=\alpha x^2+\beta x-2$. Επίσης, τα σημεία $A(2,0)$ και $B(-2,0)$, είναι σημεία της παραβολής, οπότε:

$$\begin{cases} f(2)=0 \\ f(-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\cdot 2^2+\beta\cdot 2-2=0 \\ \alpha\cdot(-2)^2+\beta\cdot(-2)-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4\alpha+2\beta-2=0 \\ 4\alpha-2\beta-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha+1 \\ 2\alpha-(-2\alpha+1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \beta=-2\alpha+1 \\ 4\alpha-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\cdot\dfrac{1}{2}+1 \\ \alpha=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα, $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$

β) Για να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων της παραβολής και της ευθείας, λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-2=-x+2 \Leftrightarrow x^2+2x-8=0.$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=2^2-4(-8)=36$ και ρίζες:

$$x_1=\frac{-2+6}{2}=2 \text{ και } x_2=\frac{-2-6}{2}=-4.$$

Είναι $g(2)=0$ και $g(-4)=6$. Άρα, τα σημεία είναι τα $A(2,0)$ και $\Delta(-4,6)$.

γ) Με μετατόπιση της παραβολής κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω προκύπτει η συνάρτηση

$$h(x)=\tfrac{1}{2}x^2-2+4{,}5 \Leftrightarrow h(x)=\tfrac{1}{2}x^2+2{,}5.$$

Για να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h$ με την ευθεία $g$ λύνουμε την εξίσωση:

$$h(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+2{,}5=-x+2 \Leftrightarrow$$

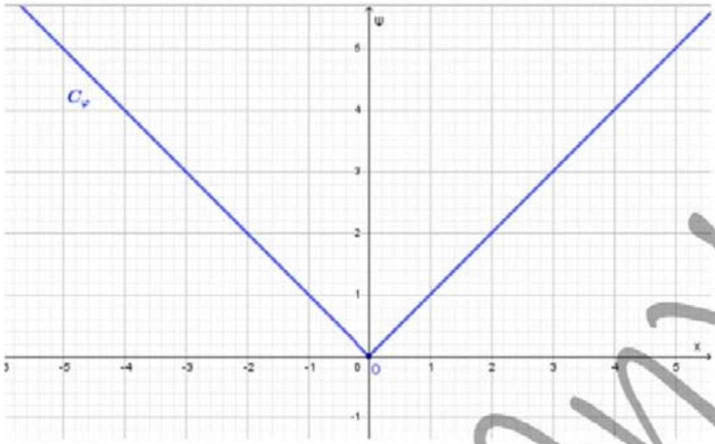
$$x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

Επίσης, $g(-1)=3$. Άρα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h$ και η ευθεία $g$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το $(-1,3)$.

**8**

ΘΕΜΑ 2

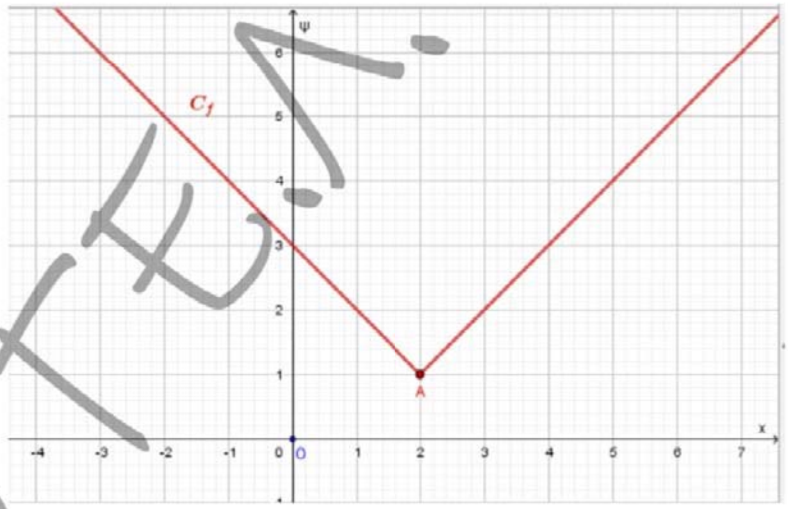
Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}$ με γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα. Επιπλέον οι συναρτήσεις $g(x) = |x-2|,\ x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = |x-2| + 1,\ x \in \mathbb{R}$.




α) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις $g, f$ και να εξηγήσετε πώς προκύπτουν μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $\varphi$.

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της $f$, η οποία δίνεται παρακάτω,




να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η $f$ είναι γνήσια αύξουσα και γνήσια φθίνουσα.

(Μονάδες 6)

ii. Το ολικό ακρότατο της $f$ και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

(Μονάδες 6)

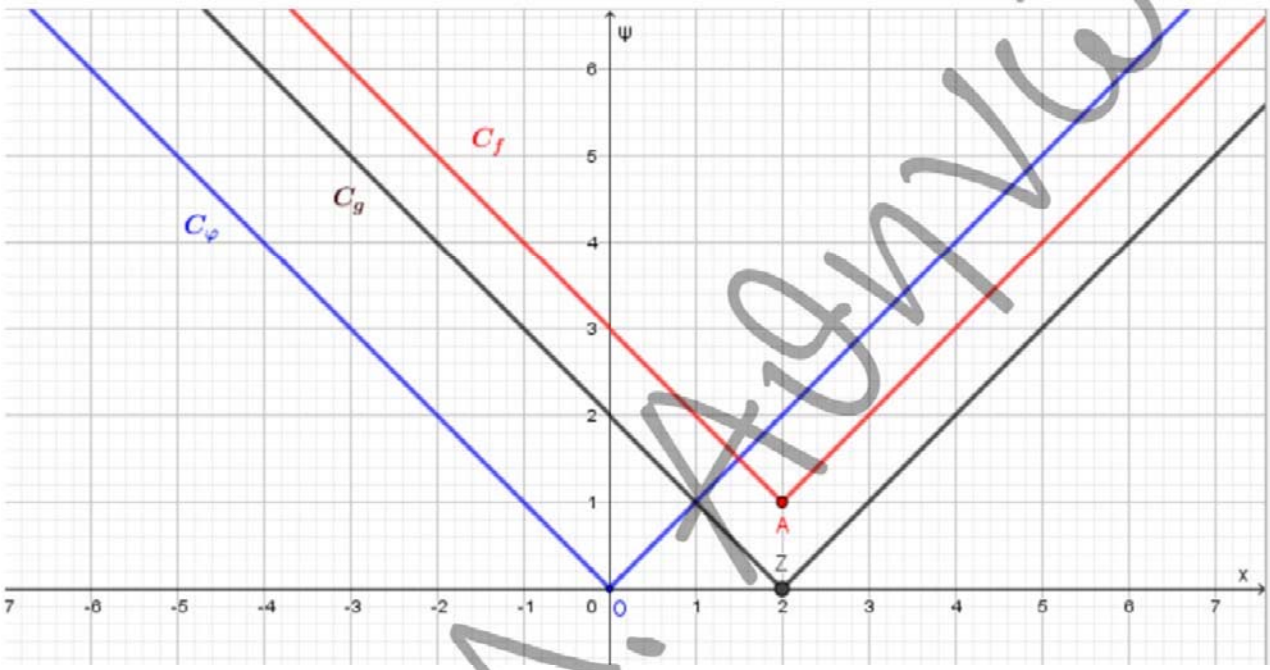
# 8 Α

ΛΥΣΗ

α) Οι γραφικές παραστάσεις των $g$ και $f$ προκύπτουν από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $\varphi$:

- μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά (για την $g$ ) και
- μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα πάνω (για την $f$ ).

Έτσι προκύπτουν οι γραφικές παραστάσεις




β)

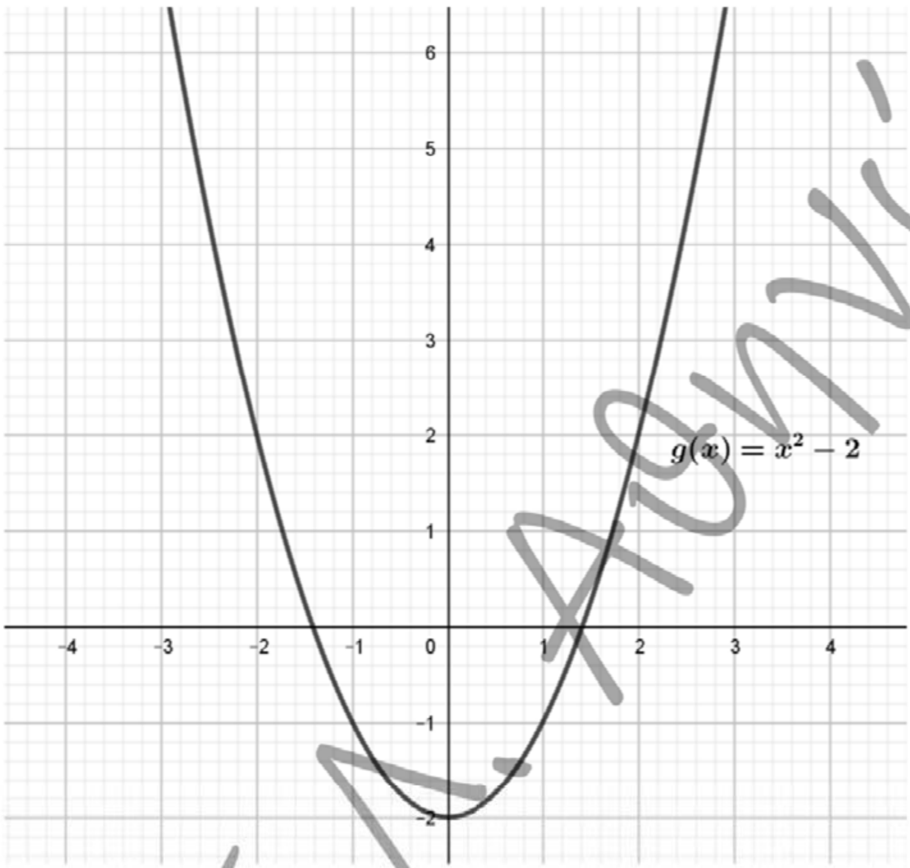
i. Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

ii. Η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 2$, ολικό ελάχιστο το $f(2) = 1$.

# 9

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$.




α) Με βάση τη γραφική της παράσταση,

i. να αιτιολογήσετε γιατί η $g$ είναι άρτια.

(Μονάδες 9)

ii. να βρείτε το ελάχιστο της $g$ και τη θέση αυτού.

(Μονάδες 7)

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της $g$ που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

(Μονάδες 9)

# 9 A

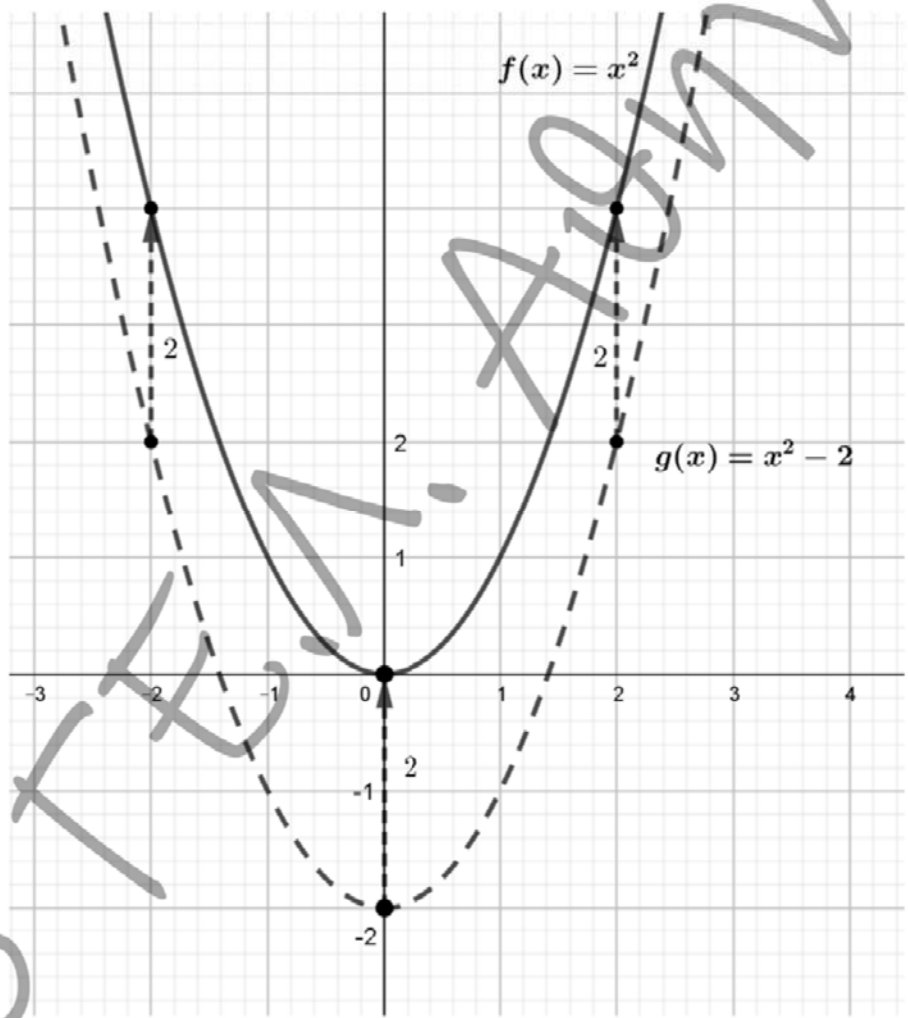
ΛΥΣΗ

α)

i. Η γραφική παράσταση της $g$ είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ άξονα, άρα η $g$ είναι άρτια.

ii. Η $g$ παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x_0 = 0$, το $g(0) = -2$, διότι όπως φαίνεται από τη γραφική της παράσταση, $g(x) \geq -2$ και η ισότητα ισχύει για $x = 0$.

β) Η γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 = g(x) + 2$ προκύπτει με κατακόρυφη και προς τα πάνω μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $g(x) = x^2 - 2$ κατά 2 μονάδες.



## 10

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = 3x^2,\ x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 3x^2 - 6x + 8,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να ελέγξετε αν η συνάρτηση $\varphi$ είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3(x-1)^2 + 5,\ x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\varphi$, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$, να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η $f$ είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης $f$.

(Μονάδες 6)

ii. Το ολικό ακρότατο της $f$ και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

(Μονάδες 4)

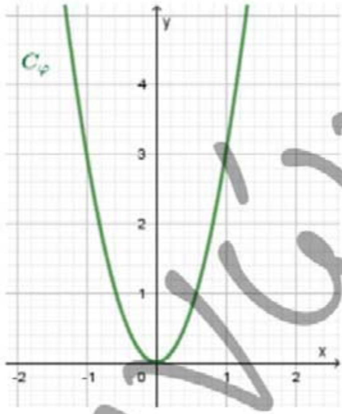
iii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της $f$ και της ευθείας με εξίσωση $y = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού $\lambda$.

(Μονάδες 7)

# 10 A

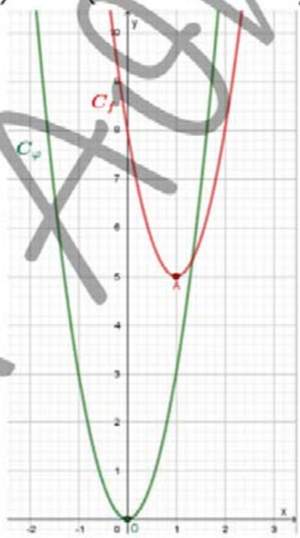
ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $\varphi$ έχει πεδίο ορισμού το **R** , επομένως για κάθε $x \in \mathbf{R}$ το $-x \in \mathbb{R}$.
Επιπλέον για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\varphi(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = \varphi(x)$.
Επομένως είναι άρτια συνάρτηση.
Η γραφική της παράσταση είναι η παρακάτω παραβολή.




β) Είναι: $f(x) = 3x^2 - 6x + 8 = 3\left(x^2 - 2x + \frac{8}{3}\right) = 3\left(x^2 - 2x + 1 + \frac{5}{3}\right) = 3\left[(x-1)^2 + \frac{5}{3}\right]$

Επομένως $f(x) = 3(x-1)^2 + 5, x \in \mathbf{R}$.
Η γραφική παράσταση της $f$ προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $\varphi$, μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 5 μονάδες προς τα πάνω. Έτσι, είναι:



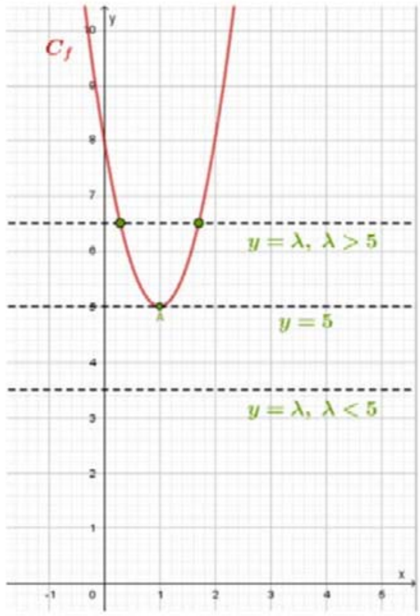

γ) Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο $A(1,5)$. Ως εκ τούτου,

i. Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Ο άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της $f$ είναι η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή της, δηλαδή η $x = 1$.

ii. Η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 1$, ολικό ελάχιστο το $f(1) = 5$.

iii. Είναι:

- Αν $\lambda > 5$ η εξίσωση έχει 2 ρίζες
- Αν $\lambda = 5$ η εξίσωση έχει 1 ρίζα
- Αν $\lambda < 5$ η εξίσωση είναι αδύνατη



# 11

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{3}x^2, x \in R$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ η οποία προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της $g(x)$ κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μετά κατά μία μονάδα προς τα πάνω.

α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση όσον αφορά τον τύπο της $f(x)$.

(I) $f(x)=g(x+3)+1$. (II) $f(x)=g(x+3)-1$. (III) $f(x)=g(x-3)+1$.
(IV) $f(x)=g(x-3)-1$.

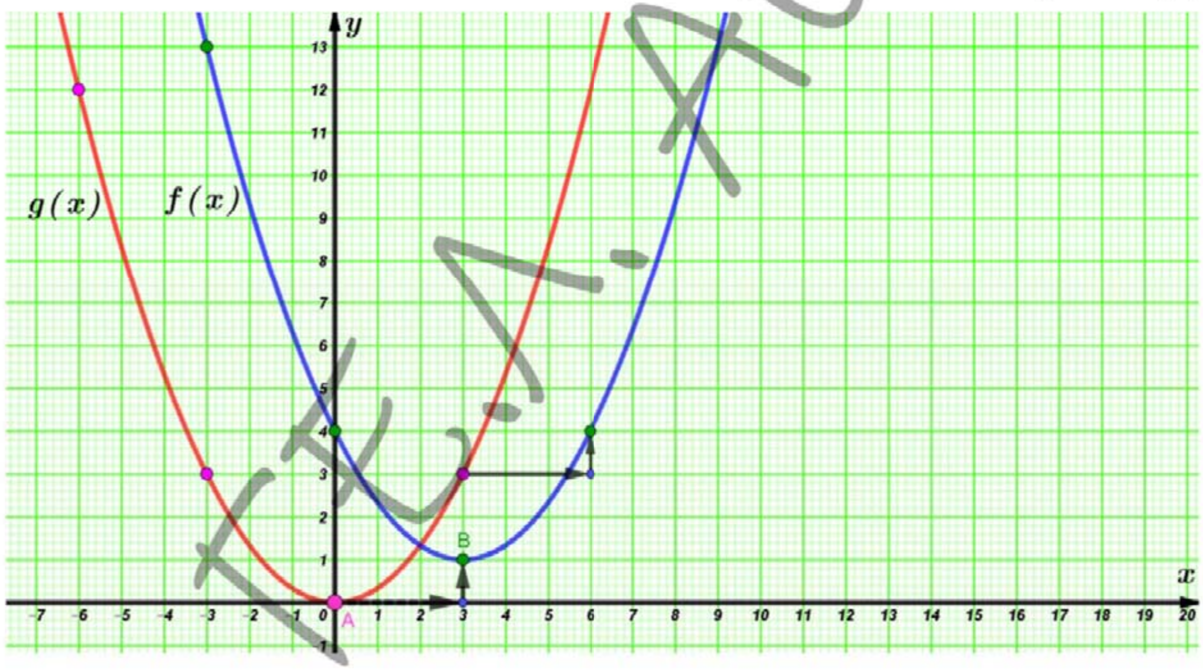
(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$ και την θέση ελαχίστου.

(Μονάδες 8)

γ) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 8)



# 11 A

ΛΥΣΗ

α) Σωστή απάντηση είναι η (III), με βάση την παράγραφο 2.2.

β) Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι η μικρότερη δυνατή τιμή της συνάρτησης $f(\mathrm{x})$ είναι ο αριθμός 1 και επιτυγχάνεται όταν $\mathrm{x} = 3$.

γ) Παρατηρούμε ότι η $f(\mathrm{x})$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$.