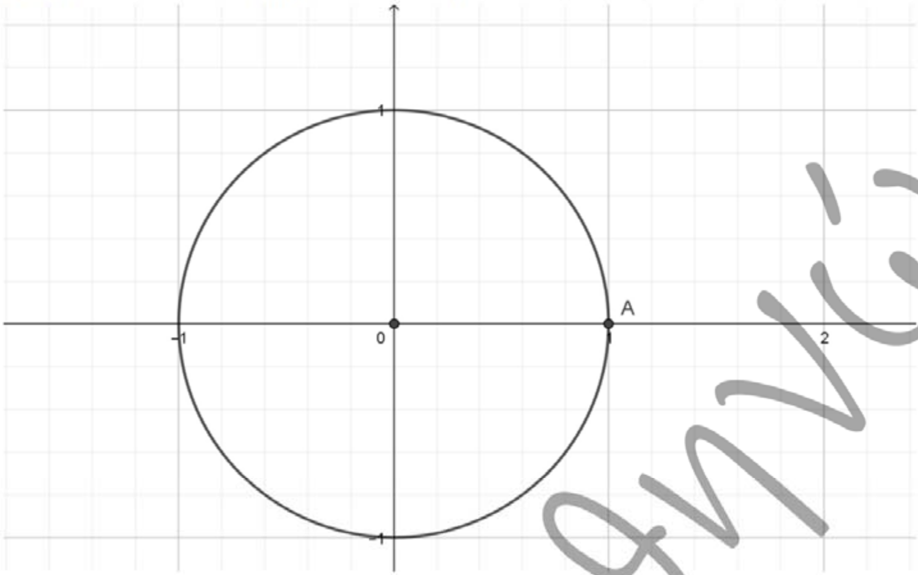
Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

1

ΘΕΜΑ 2

Στον τριγωνομετρικό κύκλο έχει σημειωθεί το σημείο A.



α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να τοποθετήσετε κατά προσέγγιση στον τριγωνομετρικό κύκλο σημεία $\mathrm{B}, \Gamma, \Delta$ ώστε να δημιουργηθούν τόξα $\widehat{\mathrm{AB}} = 1rad$, $\widehat{\mathrm{A}\Gamma} = 2rad$ και $\widehat{\mathrm{A}\Delta} = 4rad$.

(Μονάδες 13)

β) Για κάθε ένα τόξο του α) ερωτήματος να αποφανθείτε αν το συνημίτονο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 12)

1 Α

ΛΥΣΗ

α) Για τα τόξα $\widehat{\mathrm{AB}}, \widehat{\mathrm{A\Gamma}}$ και $\widehat{\mathrm{A\Delta}}$ έχουμε:

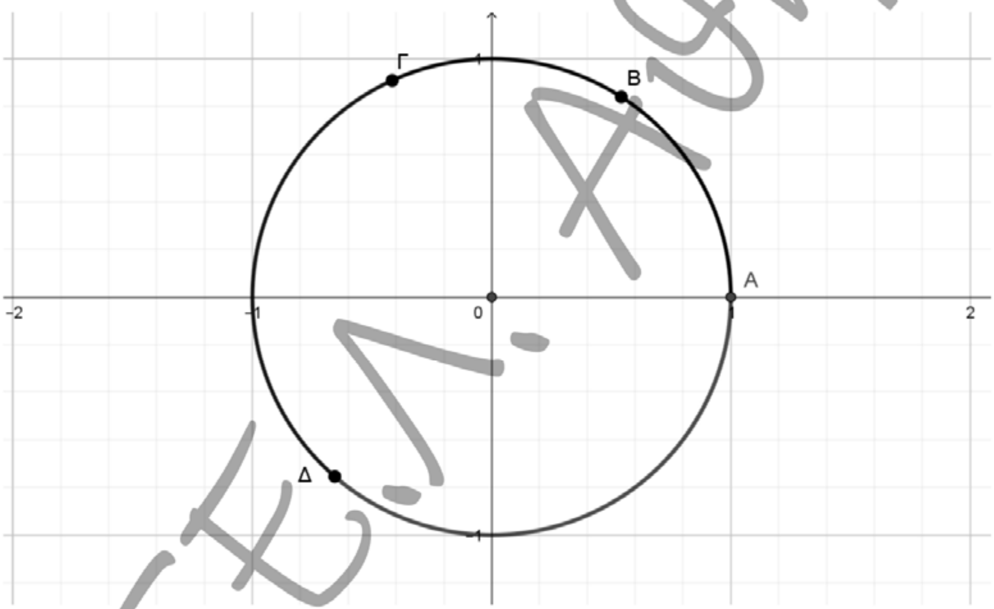
$\widehat{\mathrm{AB}} = 1 < \frac{\pi}{2}$, άρα το σημείο B βρίσκεται στο 1^o τεταρτημόριο.

Ακόμα $\frac{\pi}{2} < \widehat{\mathrm{A\Gamma}} = 2 < \pi$, άρα το σημείο Γ βρίσκεται στο 2^o τεταρτημόριο.

Τέλος $\pi < \widehat{\mathrm{A\Delta}} = 4 < \frac{3\pi}{2}$, άρα το σημείο Δ βρίσκεται στο 3^o τεταρτημόριο.

β) Το πρόσημο του συνημίτονου μιας γωνίας καθορίζεται από το τελικό σημείο της, ανάλογα σε ποιο τεταρτημόριο είναι. Δηλαδή θετικό, αν το τελικό σημείο είναι στο 1^o ή 4^o τεταρτημόριο και αρνητικό, αν είναι στα άλλα δύο τεταρτημόρια.

Οπότε, $\sigma\upsilon\nu(\mathrm{A\hat{O}B}) > 0$, $\sigma\upsilon\nu(\mathrm{A\hat{O}\Gamma}) < 0$, $\sigma\upsilon\nu(\mathrm{A\hat{O}\Delta}) < 0$.



2

ΘΕΜΑ 2

Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ θεωρούμε ένα τόξο AB με μήκος ίσο με 2ρ.

α) Να βρείτε πόσα ακτίνια είναι η αντίστοιχη στο τόξο ΑΒ, επίκεντρη γωνία ω.

(Μονάδες 13)

β) Αν ω=2 ακτίνια, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ω.

(Μονάδες 12)

2 Α

Λύση

α) Ένα ακτίνιο είναι το τόξο ενός κύκλου ακτίνας ρ που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου ρ. Εφόσον το μήκος του τόξου ΑΒ είναι ίσο με δύο ακτίνες του κύκλου η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία θα είναι ίση με 2 ακτίνια.

β) Είναι γνωστό ότι 2π ακτίνια είναι η γωνία η οποία είναι ίση με 360 μοίρες, άρα η γωνία ω που είναι 2 ακτίνια θα αντιστοιχεί σε $\frac{360}{\pi}$ μοίρες.

3

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε οτι $εφ500° = εφ140°$.

(Μονάδες 10)

β)

i. Να βρείτε το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού $εφ500°$

(Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = εφ500° \cdot ημ250° \cdot συν300°$.

(Μονάδες 10)

3 A
ΛΥΣΗ

α) Είναι γνωστό οτι $εφ(κ \cdot 360° + ω) = εφω$ για κάθε ακέραιο $κ$.

Επομένως $εφ500° = εφ(360° + 140°) = εφ140°$.

β)

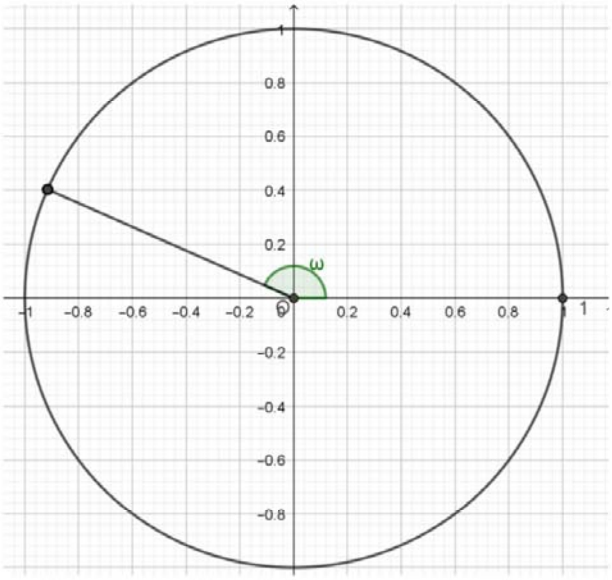
i. Το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού $εφ500°$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού $εφ140°$.
Αφού $90° < 140° < 180°$, τότε η τελική πλευρά της γωνίας $140°$ βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου. Άρα $εφ140° < 0$.

ii. Είναι λοιπόν $A = εφ140° \cdot ημ250° \cdot συν300°$.
Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι $εφ140° < 0$.
Αφού $180° < 250° < 270°$, τότε η τελική πλευρά της γωνίας $250°$ βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου. Άρα $ημ250° < 0$.
Αφού $270° < 300° < 360°$, τότε η τελική πλευρά της γωνίας $300°$ βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου. Άρα $συν300° > 0$.
Επομένως $A > 0$.

4

ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\eta\mu\omega = 0,4$.



α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε την γωνία $-\hat{\omega}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

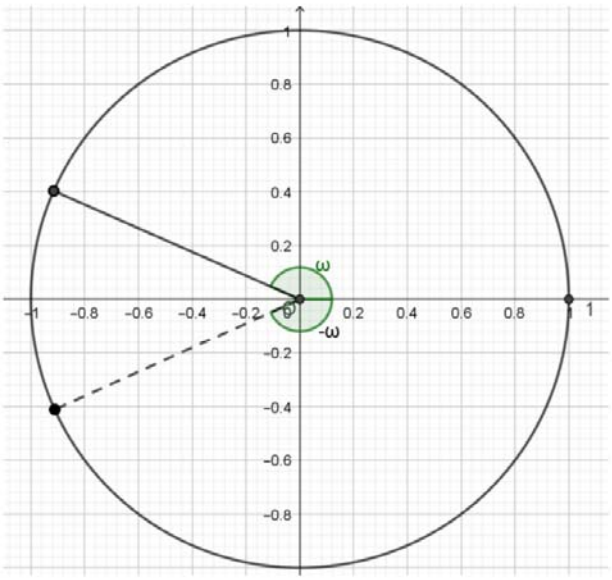
β) Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το $\eta\mu(-\omega)$.

(Μονάδες 13)

4 Α

ΛΥΣΗ

α) Δύο γωνίες σχεδιασμένες στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι αντίθετες όταν έχουν τα σημεία τομής της τελικής τους πλευράς με τον τριγωνομετρικό κύκλο συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$. Άρα η γωνία $-\hat{\omega}$ είναι όπως φαίνεται με διακεκομμένη γραμμή στο παρακάτω σχήμα.

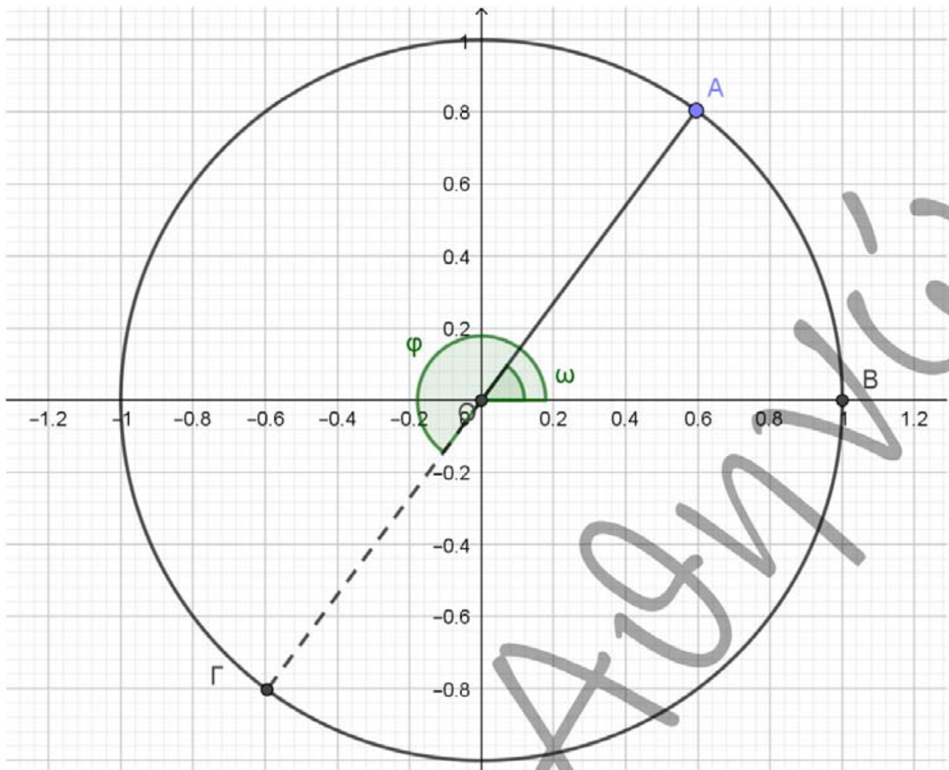


β) Το ημίτονο γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της γωνίας με το κύκλο, οπότε έχουμε, λόγω συμμετρίας $\eta\mu(-\omega) = -0,4$.

5

ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega} = \mathrm{B\hat{O}A}$.



α) Με βάση το σχήμα, να αιτιολογήσετε γιατί $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}$.

(Μονάδες 8)

β) Η προέκταση του τμήματος AO τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να εκφράσετε την γωνία $\hat{\varphi} = \mathrm{B\hat{O}\Gamma}$ με την βοήθεια της γωνίας $\hat{\omega}$.

(Μονάδες 8)

ii. Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\varphi$.

(Μονάδες 9)

5 Α

ΛΥΣΗ

α) Το συνημίτονο μιας γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τετμημένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της με τον κύκλο. Επειδή η τετμημένη του σημείου Α είναι $0,6=\frac{3}{5}$, έχουμε $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{3}{5}$.

β)

i. Εφόσον η ΟΓ είναι προέκταση της ΟΑ έχουμε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\Gamma=\pi\, rad$. Επομένως $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma=\hat{\varphi}=\pi+\hat{\omega}$.

ii. Το συνημίτονο της γωνίας $\hat{\varphi}$ είναι η τετμημένη του σημείου Γ, δηλαδή $\sigma\upsilon\nu\varphi=-\frac{3}{5}$.