Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

# 1

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2ημx + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του $x \in [0,2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

(Μονάδες 15)

# 1 Α

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση της μορφής $g(x) = 2\eta\mu x$ έχει ελάχιστη τιμή $-2$ και μέγιστη 2. Άρα, η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + 1$ έχει ελάχιστη τιμή $-2 + 1 = -1$ και μέγιστη $2 + 1 = 3$.

β) Η τιμή του $x$ για την οποία η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή είναι η λύση της εξίσωσης:

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow 2\eta\mu x + 1 = 3 \Leftrightarrow$$
$$2\eta\mu x = 2 \Leftrightarrow \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow$$
$$\eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Άρα, η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή για $x = \frac{\pi}{2}$.

**2**

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3+\sqrt{3}\text{εφω}\cdot\text{ημ}x, x\in\mathbb{R}$. Αν για τη γωνία ω ισχύει η σχέση $-2\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu\omega=-1, \omega\in[0,\frac{\pi}{2}]$, τότε:

α)

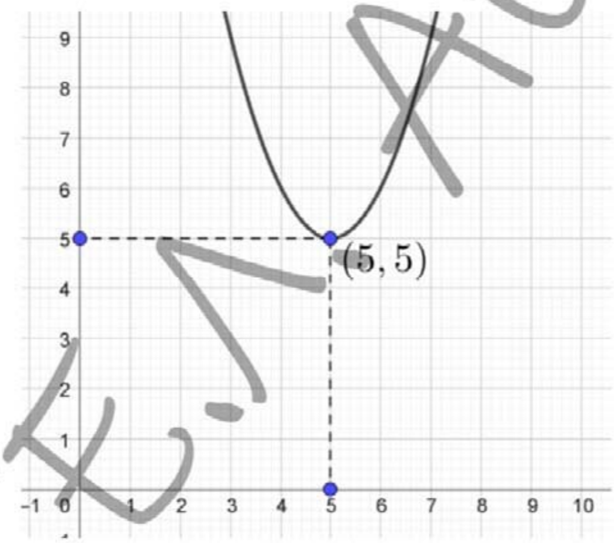
i. Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\phi\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(Μονάδες 10)

ii. Για $\varepsilon\phi\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

(Μονάδες 04)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x^2-10x+30$, $x\in\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο παρακάτω σχήμα.




i. Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g.

(Μονάδες 04)

ii. Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν κοινά σημεία. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)

# 2 Α

ΛΥΣΗ

α)

i. Από την εξίσωση $-2\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu\omega=-1$ έχουμε

$$-2(1-\eta\mu^2\omega)+\eta\mu\omega+1=0 \Leftrightarrow 2\eta\mu^2\omega+\eta\mu\omega-1=0 \Leftrightarrow \eta\mu\omega=-1 \text{ ή } \eta\mu\omega=\frac{1}{2}$$ άρα

$\eta\mu\omega=\frac{1}{2}$ αφού $\omega\in[0,\frac{\pi}{2}]$, επομένως $\sigma\upsilon\nu\omega=\sqrt{1-\eta\mu^2\omega}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

ii. Επομένως η συνάρτηση f γίνεται $f(x)=3+\eta\mu x$, $x\in R$ και έχει, μέγιστη τιμή $\mathrm{M}=4$ και ελάχιστη τιμή $m=2$ καθώς για κάθε x ισχύει $-1\le\eta\mu x\le 1 \Leftrightarrow 2\le 3+\eta\mu x\le 4$.

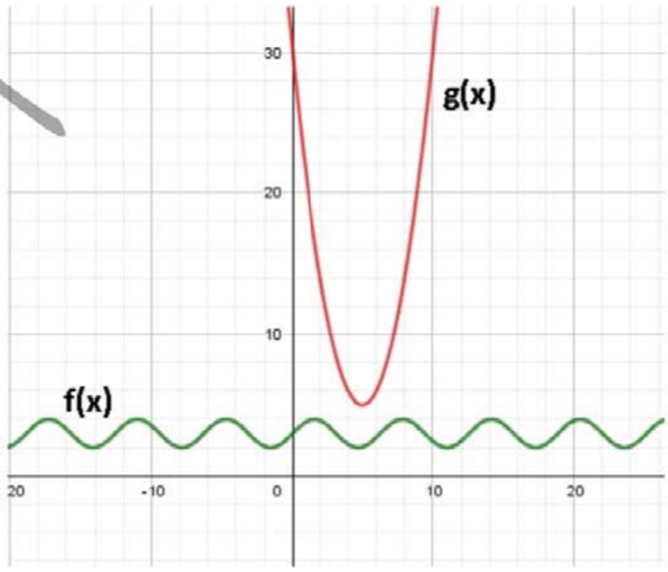
β)

i. Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι η g έχει ελάχιστη τιμή για $x=5$ το $g(5)=5$

ii. Η συνάρτηση g έχει ελάχιστη τιμή ίση με 5 και η συνάρτηση f έχει μέγιστη τιμή ίση με 4.

Δηλαδή ισχύει $f(x)\le 4$ και $g(x)\ge 5$ για κάθε $x\in R$. Άρα ισχύει $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in R$.

Επομένως οι γραφικές τους παραστάσεις δεν έχουν κανένα κοινό σημείο όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα



## 3

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία ω, με $0 \leq \omega < 2\pi$ που ικανοποιεί τις σχέσεις: $συνω = -\frac{1}{2}$ και $ημω > 0$.

α) Να σχεδιάσετε τη γωνία ω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο και να βρείτε το μέτρο της.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε όλες τις γωνίες φ με $φ \in \mathbb{R}$, που ικανοποιούν τη σχέση $συνφ = -\frac{1}{2}$.

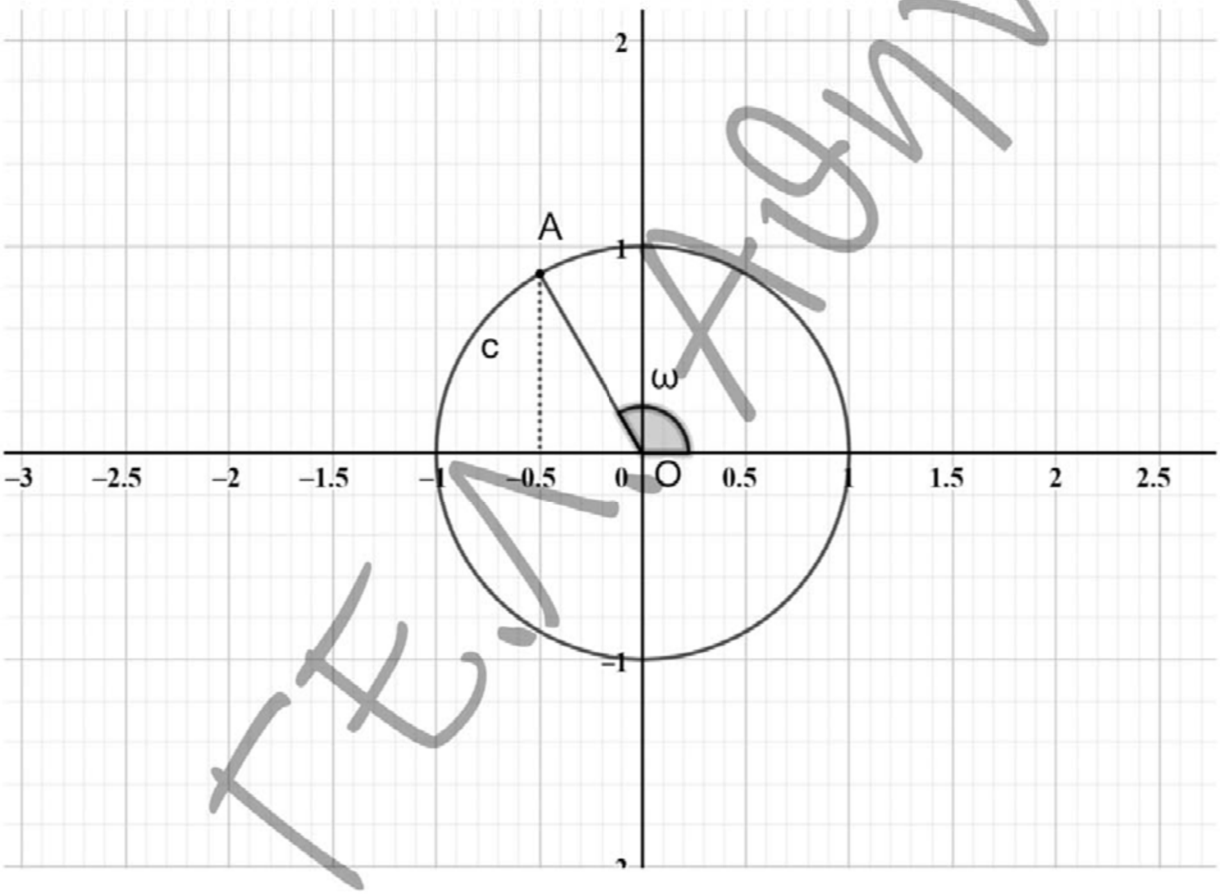
(Μονάδες 10)

# 3 Α

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $συνω = -\frac{1}{2}$ και $ημω > 0$, η γωνία θα βρίσκεται στο $2^ο$ τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου.

Το μέτρο της γωνίας είναι $ω = \frac{2\pi}{3}$ διότι $συνω = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow συνω = -συν\left(\frac{\pi}{3}\right) = συν\left(π - \frac{\pi}{3}\right) = συν\frac{2\pi}{3}$.




β) Για τη τριγωνομετρική εξίσωση για $φ \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$συνφ = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow συνφ = -συν\frac{\pi}{3} = συν\left(π - \frac{\pi}{3}\right) = συν\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow συνφ = συν\frac{2\pi}{3}$ τότε $φ = 2κπ + \frac{2\pi}{3}$ ή $φ = 2κπ - \frac{2\pi}{3}$ με $κ \in \mathbb{Z}$.

# 4

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha+1}{2}\sigma\upsilon\nu(\beta x)$, με $\alpha,\beta>0$, η οποία έχει ελάχιστο $-2$ και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=3$ και $\beta=4$.

(Μονάδες 5)

β) Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A}=\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\varepsilon\varphi(\pi-x)\cdot\eta\mu(2\pi+x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi-x)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$. Να δείξετε ότι $\mathrm{A}=-1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2\mathrm{A}$, στο διάστημα $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$.

(Μονάδες 10)

# 4 Α

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $f(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu\omega x$, με $\rho,\omega>0$:

Έχει ελάχιστο $-\rho$, οπότε έχουμε $-\dfrac{\alpha+1}{2}=-2 \Leftrightarrow \alpha+1=4 \Leftrightarrow \alpha=3$.

Ακόμα έχει περίοδο $\mathrm{T}=\dfrac{2\pi}{\omega}$, οπότε έχουμε $\dfrac{2\pi}{\beta}=\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta=4$.

Τελικά, η συνάρτηση είναι $f(x)=2\sigma\upsilon\nu 4x$. (1)

β) Έχουμε για τον αριθμητή:

$\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\varphi(\pi-x)=-\varepsilon\varphi x$, $\eta\mu(2\pi+x)=\eta\mu x$.

Έχουμε για τον παρονομαστή :

$\sigma\upsilon\nu(3\pi-x)=\sigma\upsilon\nu(\pi-x)=-\sigma\upsilon\nu x$,

$\sigma\varphi\left(\dfrac{7\pi}{2}-x\right)=\sigma\varphi\left(3\pi+\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)=\sigma\varphi\left(\pi+\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)=\sigma\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\varepsilon\varphi x$,

$\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}-(-x)\right)=\eta\mu(-x)=-\eta\mu x$.

Αντικαθιστώντας έχουμε $\mathrm{A}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x\cdot(-\varepsilon\varphi x)\cdot\eta\mu x}{-\sigma\upsilon\nu x\cdot\varepsilon\varphi x\cdot(-\eta\mu x)}=-1$.

γ) Έχουμε, λόγω της (1) και του β) ερωτήματος:

$f(x)=2\mathrm{A} \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 4x=-2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 4x=-1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 4x=\sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow$

$4x=2\kappa\pi\pm\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{\kappa\pi}{2}\pm\dfrac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

Επειδή πρέπει $x\in\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$, δηλαδή $\pi\le x\le\dfrac{3\pi}{2}$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

$\pi\le\dfrac{\kappa\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 1\le\dfrac{\kappa}{2}+\dfrac{1}{4}\le\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\dfrac{3}{4}\le\dfrac{\kappa}{2}\le\dfrac{5}{4} \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\le\kappa\le\dfrac{5}{2} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow} \kappa=2.$

Άρα $x=\pi+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4}$

$\pi\le\dfrac{\kappa\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 1\le\dfrac{\kappa}{2}-\dfrac{1}{4}\le\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\dfrac{5}{4}\le\dfrac{\kappa}{2}\le\dfrac{7}{4} \Leftrightarrow \dfrac{5}{2}\le\kappa\le\dfrac{7}{2} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow} \kappa=3.$

Άρα, πάλι $x=\pi+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4}$.

# 5

ΘΕΜΑ 4

Σε μια θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης $f$, που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες. Να βρείτε :

α) την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη).

(Μονάδες 6)

β) την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας.

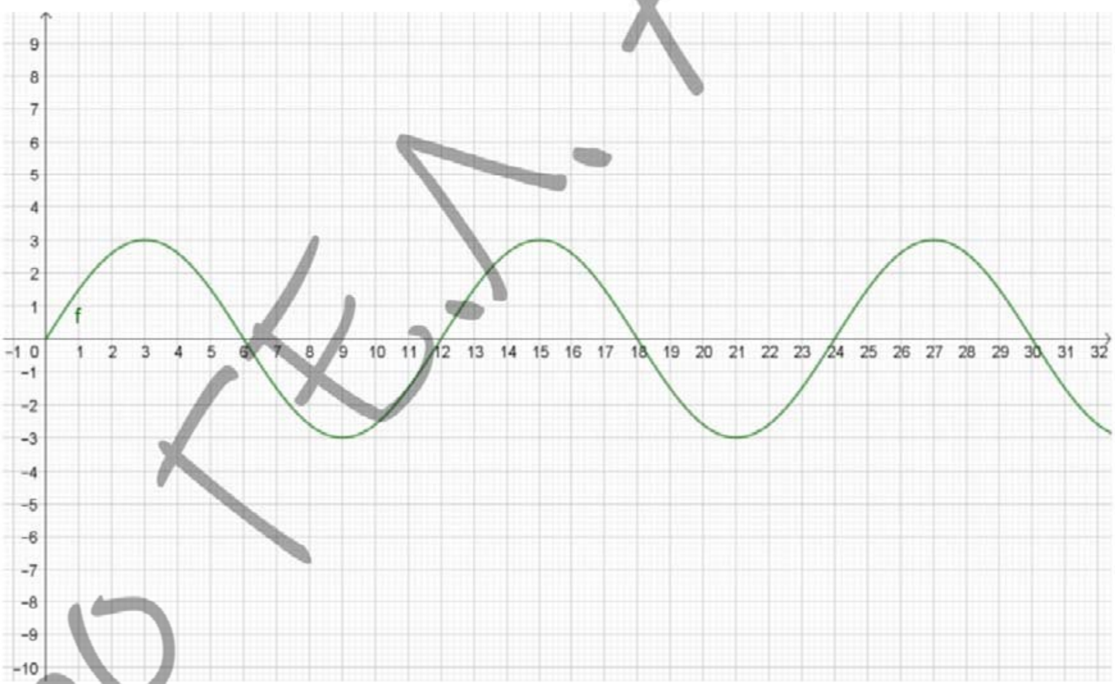
(Μονάδες 6)

γ) τον τύπο της συνάρτησης $f$ .

(Μονάδες 6)

δ) ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα.

(Μονάδες 7)



# 5 Α

ΛΥΣΗ

α) Γραφικά η υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη πλημμυρίδα και τη χαμηλότερη άμπωτη, εκφράζεται με τη διαφορά του ελαχίστου -3 της συνάρτησης $f$, από το μέγιστό της 3. Συνεπώς η ζητούμενη υψομετρική διαφορά είναι 6 μέτρα.

β) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι το μικρότερο διάστημα που απαιτείται για να αρχίσει να επαναλαμβάνεται η γραφική παράσταση είναι 12 ώρες. Συνεπώς η ζητούμενη περίοδος είναι 12.

γ) Ο τύπος της ημιτονοειδούς συνάρτησης $f$ είναι της μορφής $f(t)=\rho\cdot\eta\mu(\omega t)$ όπου $\rho>0,\omega>0$. Δεδομένου ότι η μέγιστη τιμή της $f$ είναι 3 συμπεραίνουμε ότι $\rho=3$. Επίσης η περίοδος είναι 12 οπότε $\frac{2\pi}{\omega}=12\Leftrightarrow\omega=\frac{\pi}{6}$. Συνεπώς η συνάρτηση $f$ έχει τύπο $f(t)=3\cdot\eta\mu(\frac{\pi}{6}\cdot t)$.

δ) Αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης $f(t)=\frac{3}{2}$, όπου $0\le t\le 24$. Είναι

$$f(t)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 3\cdot\eta\mu(\frac{\pi}{6}\cdot t)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\eta\mu(\frac{\pi}{6}\cdot t)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu(\frac{\pi}{6}\cdot t)=\eta\mu(\frac{\pi}{6})\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{6}\cdot t=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\ \acute{\eta}\\ \frac{\pi}{6}\cdot t=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=12\kappa+1\\ \acute{\eta}\\ t=12\kappa+5\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$$

Επειδή $0\le t\le 24$, έχουμε τελικά ότι οι ζητούμενες ώρες είναι 1, 5, 13, 17.

Σχόλιο: Αυτό επιβεβαιώνεται και γραφικά από τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της $f$, με την ευθεία $y=\frac{3}{2}$.

**6**

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=συν\left(x-\frac{π}{4}\right)$, $g(x)=συνx$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της g προκύπτει η γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 6)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{π}{2}\right)$, $f(π)$.

(Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}f(x)+1=0$.

(Μονάδες 7)

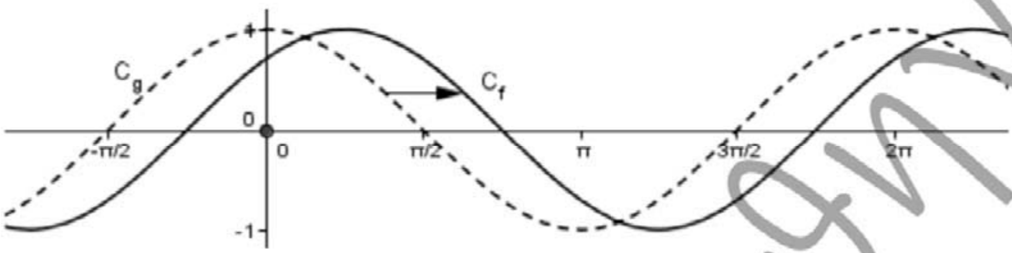
# 6 A

ΛΥΣΗ

α) Από την ισότητα $f(x)=g\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f προκύπτει

από τη γραφική παράσταση της g, αν την μετατοπίσουμε κατά $\frac{\pi}{4}$ μονάδες προς τα δεξιά.

β) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γνωστή γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ (με διακεκομμένη γραμμή) και η γραφική παράσταση της f που προκύπτει από αυτή, αν την μεταφέρουμε δεξιά κατά $\frac{\pi}{4}$ μονάδες.




γ) Είναι:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

και

$$f(\pi)=f\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

δ) Με τη βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος, έχουμε:

$$\sqrt{2}f(x)+1=0 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow f(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4} \\ \text{ή} \\ x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi-\frac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\pi \\ \text{ή} \\ x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{με } \kappa\in\mathbb{Z}$$

## 7

ΘΕΜΑ 4

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία $x$ τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι εξίσωση $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x = 3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$ και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα $[0,2\pi]$.

(Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{3}\cdot\eta\mu x$ και $g(x) = 3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα $[0,2\pi]$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β).

(Μονάδες 7)

δ) Αξιοποιώντας το ερώτημα γ) να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x < 3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0,2\pi]$.

(Μονάδες 6)

# 7 Α

ΛΥΣΗ

α) Αν υπήρχε γωνία $x$ τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$, τότε από τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ θα είχαμε $0+0=1$, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς δεν υπάρχει γωνία $x$ τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$.

β) Αν $\sigma\upsilon\nu x = 0$ τότε από την εξίσωση $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x = 3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ θα είχαμε και $\eta\mu x = 0$, το οποίο όμως όπως δείξαμε στο α) είναι άτοπο. Συνεπώς $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$.

Με $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ έχουμε ισοδύναμα

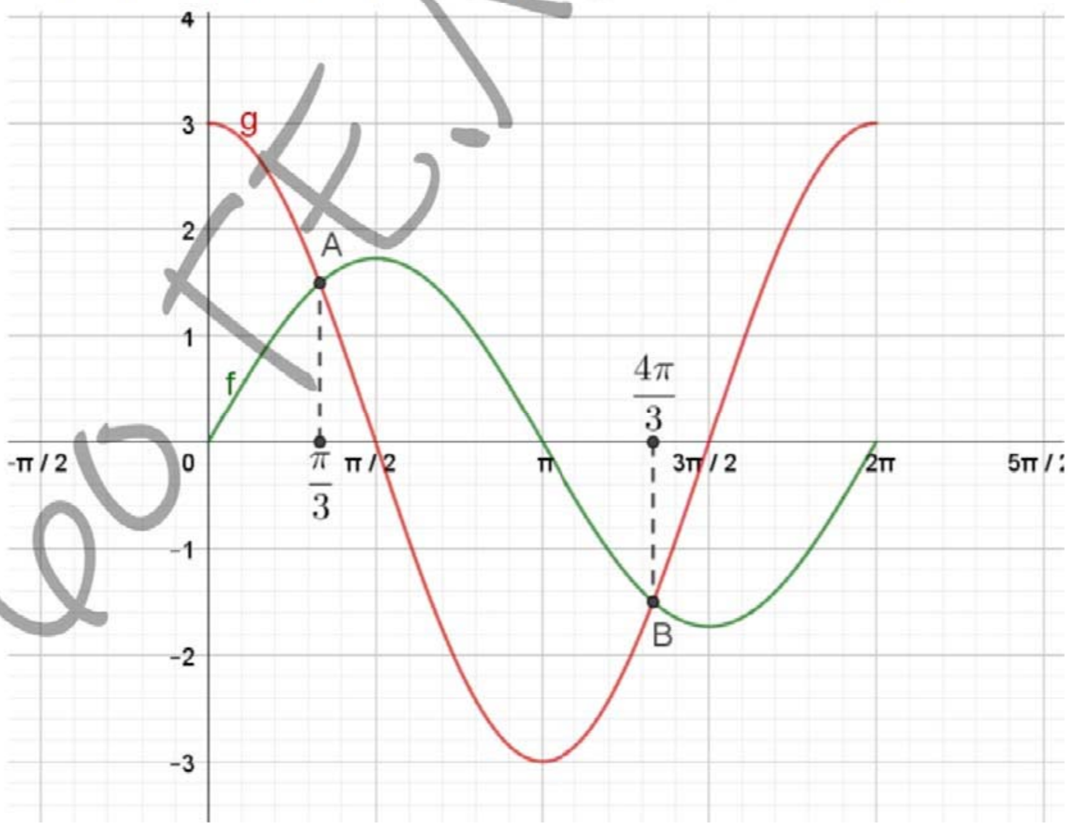
$$\sqrt{3}\cdot\eta\mu x = 3\cdot\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}$$

η οποία στο διάστημα $[0,2\pi]$ έχει λύσεις τις $x = \frac{\pi}{3}$ και $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

γ) Με βάση τον παρακάτω πίνακα τιμών

| $x$ | 0 | π/2 | π | 3π/2 | 2π |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=\sqrt{3}\cdot\eta\mu x$ | 0 | $\sqrt{3}$ | 0 | $-\sqrt{3}$ | 0 |
| $g(x)=3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ | 3 | 0 | -3 | 0 | 3 |

οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



# 7Α συνέχεια

Όπως βλέπουμε στο παραπάνω σχήμα οι γραφικές παραστάσεις των $f, g$ τέμνονται στα σημεία Α και Β οι τετμημένες των οποίων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \sqrt{3}\cdot \eta\mu x = 3\cdot \sigma\upsilon\nu x$, που όπως βρήκαμε στο ερώτημα β) είναι $\frac{\pi}{3}$ και $\frac{4\pi}{3}$ αντίστοιχα. Αυτή είναι η ζητούμενη γραφική ερμηνεία.

δ) Η ανίσωση $\sqrt{3}\cdot \eta\mu x < 3\cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$, γραφικά σημαίνει να βρούμε για ποιες τιμές του $x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$, η γραφική παράσταση της $f$ είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της $g$. Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι αυτό συμβαίνει για $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$.

# 8

ΘΕΜΑ 2

Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $ημx = α$ στο διάστημα $[-2π, 2π]$ όταν:

α) $α = 1$.

(Μονάδες 13)

β) $α = -2$.

(Μονάδες 12)

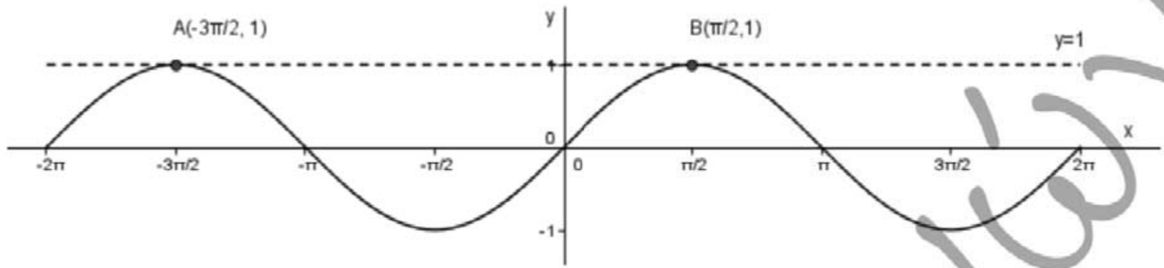
Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

# 8 A

ΛΥΣΗ

α) Ζητάμε πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $ημx = 1$ στο διάστημα $[-2π, 2π]$.

Στο σχήμα παρακάτω, φαίνεται το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ημx στο διάστημα $[-2π, 2π]$ και το αντίστοιχο τμήμα της ευθείας $y = 1$.




Οι λύσεις της εξίσωσης $ημx = 1$ στο διάστημα $[-2π, 2π]$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ημx με την ευθεία $y = 1$, δηλαδή των σημείων $A\left(\frac{-3π}{2}, 1\right)$ και $B\left(\frac{π}{2}, 1\right)$. Άρα, η εξίσωση $ημx = 1$ στο διάστημα $[-2π, 2π]$ εχει δύο λύσεις: $x = \frac{-3π}{2}$ ή $x = \frac{π}{2}$.

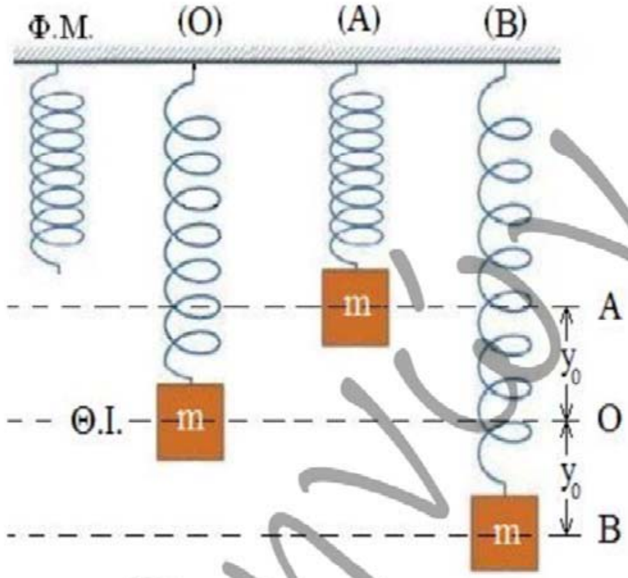
β) Ζητάμε πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $ημx = -2$ στο διάστημα $[-2π, 2π]$.

Όμως, γνωρίζουμε ότι $-1 \leq ημx \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε, η εξίσωση $ημx = -2$ είναι αδύνατη, δηλαδή η εξίσωση $ημx = -2$ στο διάστημα $[-2π, 2π]$ δεν έχει καμία λύση.

# 9

ΘΕΜΑ 4

Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται απο το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας m και ισορροπεί στη θέση Ο (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με 1 μέτρο.




Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση Ο, εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων Α και Β, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με $2y_0$.

Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα), είναι:

$$y(t) = 1 + 0{,}2 \cdot ημ\frac{\pi}{2}t$$

α) Να βρείτε το $y_0$ και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων Α και Β της ταλάντωσης.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

(Μονάδες 06)

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $t \in [0, 4]$.

(Μονάδες 06)

δ) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με 1, 1 μέτρα, για $t \in [0, 2]$.

(Μονάδες 07)

# 9 A

ΛΥΣΗ

Η τριγωνομετρική συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$ έχει μέγιστη τιμή $\rho$, ελάχιστη τιμή $-\rho$ και περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Ως εκ τούτου,

α) Το $y_0 = (OA) = (OB) = \rho = 0{,}2$ μέτρα.

Η συνάρτηση $y(t)$ έχει μέγιστη τιμή $1 + \rho = 1{,}2$, ελάχιστη τιμή $1 - \rho = 0{,}8$ και η απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων Α και Β της ταλάντωσης είναι:

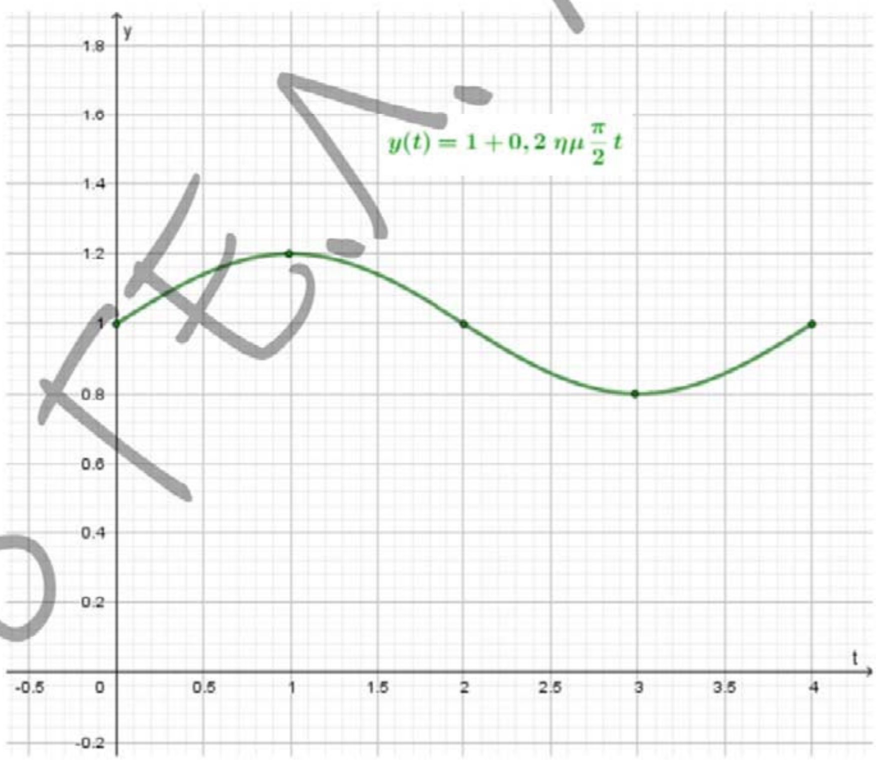
$|1{,}2 - 0{,}8| = 0{,}4$ μέτρα.

β) η περίοδος της συνάρτησης $y(t)$ είναι: $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow T = 4$.

γ) Ο πίνακας τιμών για τη συνάρτηση $y(t) = 1 + 0{,}2 \cdot \eta\mu\frac{\pi}{2}t$ για $t \in [0, 4]$, είναι:

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y(t)$ | 1 | 1,2 | 1 | 0,8 | 1 |

Είναι $y_{max} = 1{,}2$ και $y_{min} = 0{,}8$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης:




δ) Ζητάμε ουσιαστικά να βρούμε ποια χρονική στιγμή $t \in [0{,}2]$, είναι $y(t) = 1{,}1$.

# 9 Α συνέχεια

Έχουμε: $\begin{cases} y(t) = 1 + 0{,}2 \cdot \eta\mu\frac{\pi}{2}t \\ \kappa\alpha\iota \\ y(t) = 1{,}1 \end{cases} \Leftrightarrow 0{,}2 \cdot \eta\mu\frac{\pi}{2}t = 0{,}1 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\pi}{2}t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\eta\mu\frac{\pi}{2}t = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \acute{\eta} \\ \frac{\pi}{2}t = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \ \kappa \in Z \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4\kappa + \frac{1}{3} \\ \acute{\eta} \\ t = 4\kappa + \frac{5}{3} \end{cases}, \ \kappa \in Z$$

Επειδή όμως $t \in [0,2]$, έχουμε:

$0 \leq t \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 4\kappa + \frac{1}{3} \leq 2 \Rightarrow -\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{5}{12}, \ \kappa \in Z$ (1)

$0 \leq t \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 4\kappa + \frac{5}{3} \leq 2 \Rightarrow -\frac{5}{12} \leq \kappa \leq \frac{1}{12}, \ \kappa \in Z$ (2)

Και από τις δύο σχέσεις προκύπτει ότι $\kappa = 0$, επομένως: $t = \frac{1}{3}$ ή $t = \frac{5}{3}$.

# 10

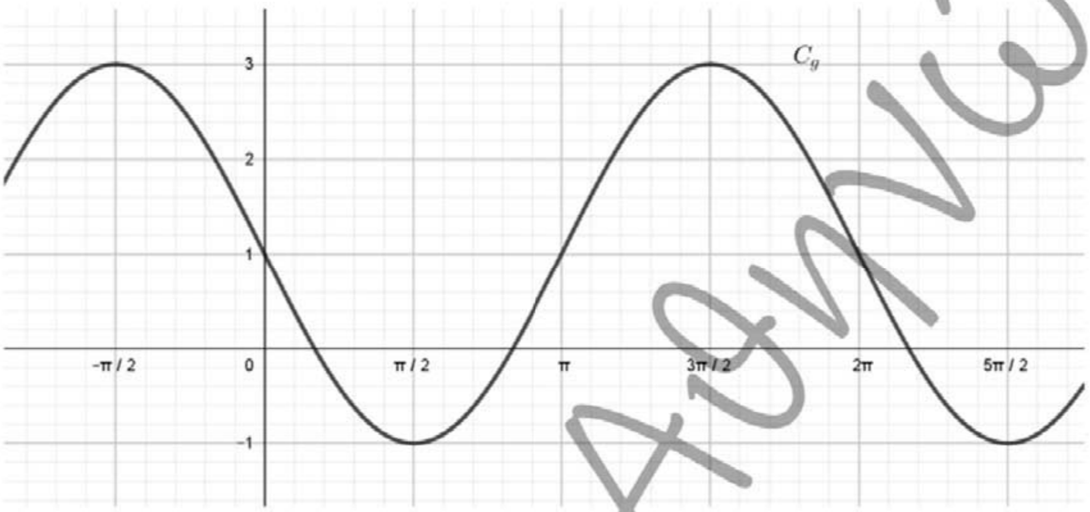
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu 3x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο $T$, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της $f$.

(Μονάδες 3)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\alpha\eta\mu\beta x+\gamma$, με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\beta>0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.




i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta$ και $\gamma$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ii. Για $\alpha=-2$, $\beta=1$ και $\gamma=1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ στο διάστημα $[0,\pi)$

(Μονάδες 10)

# 10 A

ΛΥΣΗ

α) Η περίοδος της συνάρτησης είναι $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{3}$, η μέγιστη τιμή της είναι $\max f(x)=2+1=3$, και η ελάχιστη τιμή της είναι $\min f(x)=-2+1=-1$.

β)

i. Από την γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης $g$, παρατηρούμε ότι παρουσιάζει μέγιστο για $x=-\frac{\pi}{2}$ και το επόμενο μέγιστο για $x=\frac{3\pi}{2}$. Άρα η περίοδος της συνάρτησης είναι $\mathrm{T}=\frac{3\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\pi$, οπότε $\beta=1$. Η καμπύλη προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\alpha\eta\mu x$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, άρα $\gamma=1$. Επίσης

$$\begin{aligned}
&g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=3\Leftrightarrow\\
&\alpha\cdot\eta\mu\frac{3\pi}{2}+1=3\Leftrightarrow\\
&\alpha\cdot(-1)=2\Leftrightarrow\\
&\alpha=-2
\end{aligned}$$

Τελικά $g(x)=-2\eta\mu x+1$.

ii. Η εξίσωση γίνεται:

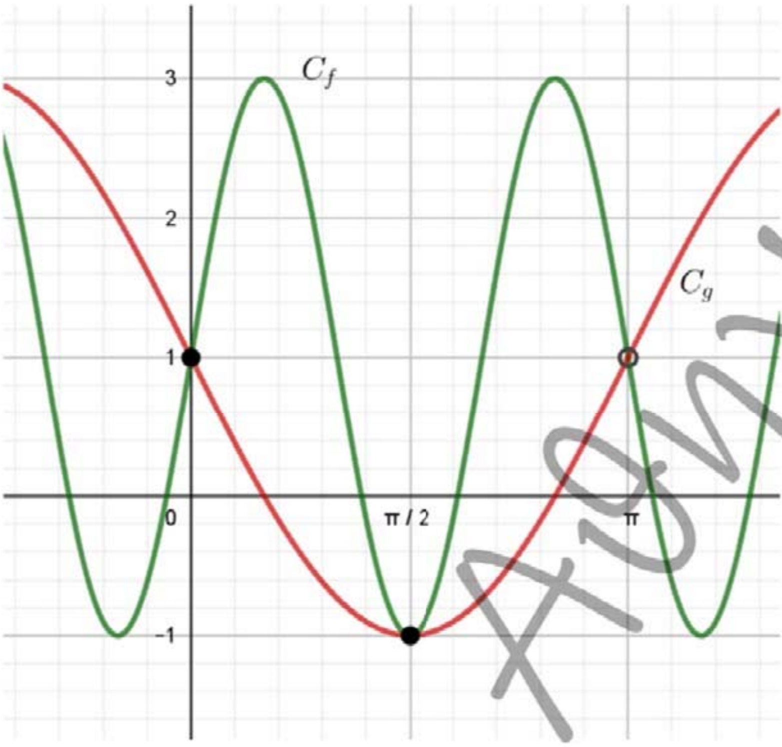
$$\begin{aligned}
&f(x)=g(x)\Leftrightarrow\\
&2\eta\mu 3x+1=-2\eta\mu x+1\Leftrightarrow\\
&\eta\mu 3x=-\eta\mu x\Leftrightarrow\\
&\eta\mu 3x=\eta\mu(-x)\Leftrightarrow\\
&\begin{cases}3x=2\kappa\pi-x\\ \text{ή}\\ 3x=2\kappa\pi+(\pi+x)\end{cases},\ \kappa\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή: $\begin{cases}x=\frac{\kappa\pi}{2}\\ \text{ή}\\ x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases},\ \kappa\in\mathbb{Z}$. Επειδή $x\in[0,\pi)$, για $\kappa=0$ στον πρώτο τύπο λύσεων προκύπτει $x=0$ και στον δεύτερο τύπο λύσεων προκύπτει $x=\frac{\pi}{2}$ (που προκύπτει και από

# 10 Α συνέχεια

τον πρώτο τύπο λύσεων για $\kappa = 1$). Από τις άλλες τιμές του $\kappa \in \mathbb{Z}$ προκύπτουν λύσεις οι οποίες δεν ανήκουν στο διάστημα $[0, \pi)$.

Η γραφική λύση της εξίσωσης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.




Τελικά ή εξίσωση έχει δυο λύσεις στο $[0, \pi)$, τις $x = 0$ και $x = \dfrac{\pi}{2}$.

# 11

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3συν2x,\ x\in\mathbb{R}$.

α)

i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -3$ στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

# 11 A

ΛΥΣΗ

α)

i. Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho\sigma\upsilon\nu\omega x, \rho > 0$ με ρ=3 και $\omega = 2$, οπότε η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 3 και η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με -3.

ii. Η περίοδος της f είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$.

β) $f(x) = -3$ αν και μόνο αν 3συν2x=-3⇔ $\sigma\upsilon\nu 2x = -1$ τότε $2x = 2\kappa\pi \pm \pi \Leftrightarrow x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

# 12

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία $y=\alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x)$, όπου $\omega>0$, $\rho>0$ και $x \in \mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,

α) Να δείξετε ότι $\rho=3$ και $\omega=2$.

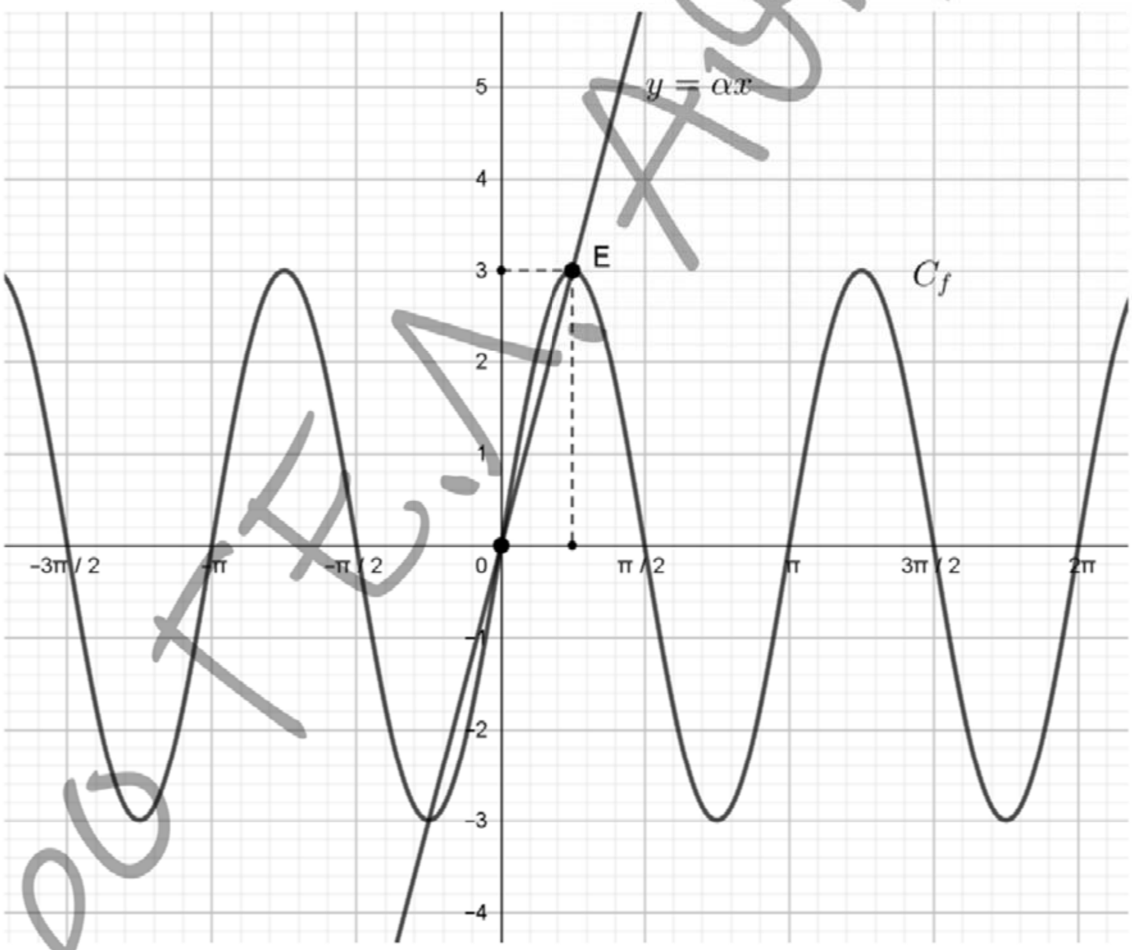
(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό $\alpha$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3\eta\mu(2x)-\frac{12}{\pi}x=0$.

(Μονάδες 10)



# 12 A

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x)$ με $\rho>0$, έχει μέγιστη τιμή $\rho$. Με βάση το σχήμα η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή $3$, άρα $\rho=3$. Επίσης η περίοδος της συνάρτησης είναι $\pi$, οπότε $\pi=\frac{2\pi}{\omega}\Leftrightarrow\omega=2$. Άρα $f(x)=3\eta\mu(2x)$.

β) Η ευθεία $y=\alpha x$ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{E}$ της γραφικής παράστασης της $f$ που έχει τεταγμένη $3$, η οποία είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Η συνάρτηση $f(x)=3\eta\mu(2x)$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή σε διάστημα μιας περιόδου στο $\frac{1}{4}$ της περιόδου, δηλαδή στη θέση $x=\frac{\pi}{4}$. Άρα είναι $\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{4},3\right)$ και $3=\alpha\cdot\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\alpha=\frac{12}{\pi}$. Οπότε η εξίσωση της ευθείας είναι : $y=\frac{12}{\pi}x$.

γ) Η εξίσωση $3\eta\mu(2x)-\frac{12}{\pi}x=0$ γράφεται ισοδύναμα $3\eta\mu(2x)=\frac{12}{\pi}x$. Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της $f(x)=3\eta\mu(2x)$ με την ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$. Με βάση το σχήμα τα σημεία τομής είναι $3$, οι τετμημένες των οποίων είναι

- $x=0$, δεδομένου ότι $f(0)=3\eta\mu 0=0$ και η ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$ διέρχεται από το σημείο $(0,0)$.
- $x=\frac{\pi}{4}$, δεδομένου ότι $f(\frac{\pi}{4})=3\eta\mu\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\cdot 1=3$ και η ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$ διέρχεται από το σημείο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{12}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{4},3\right)$ και
- $x=-\frac{\pi}{4}$, δεδομένου ότι $f(-\frac{\pi}{4})=3\eta\mu\left(-2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=3\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)=3\cdot(-1)=-3$ και η ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$ διέρχεται από το σημείο $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{12}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(-\frac{\pi}{4},-3\right)$.

Άρα η εξίσωση $3\eta\mu(2x)-\frac{12}{\pi}x=0$ έχει λύσεις τις $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ και $x=-\frac{\pi}{4}$.

# 13

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2συν^2(\pi - x) - 3ημ\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2συν^2x - 3συνx + \alpha$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f$ είναι άρτια ή περιττή.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε το $\alpha$ αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $f$ διέρχεται από το σημείο $M(\frac{\pi}{3}, 1)$.

(Μονάδες 5)

δ) Για α=2 και $g(x) = 2ημ^2x + 9συνx - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f$ και $g$.

(Μονάδες 7)

# 13 A

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x.$

Άρα: $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha.$

β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε: $f(-x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(-x) - 3\sigma\upsilon\nu(-x) + \alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha = f(x).$

Άρα η συνάρτηση $f$ είναι άρτια.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ διέρχεται από το σημείο $M(\frac{\pi}{3}, 1)$ αν και μόνον αν $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{3} - 3\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + \alpha = 1 \Leftrightarrow 2\cdot\frac{1}{4} - 3\cdot\frac{1}{2} + \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2.$

δ) Με $\alpha = 2$ έχουμε $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + 2.$

Για να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των δύο γραφικών παραστάσεων λύνουμε την εξίσωση :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + 2 = 2\eta\mu^2 x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + 2 = 2(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) + 9\sigma\upsilon\nu x - 9 \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2 x - 12\sigma\upsilon\nu x + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$(2\sigma\upsilon\nu x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{3}{2}$, αδύνατη.

Αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχουν σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.

# 14

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση:

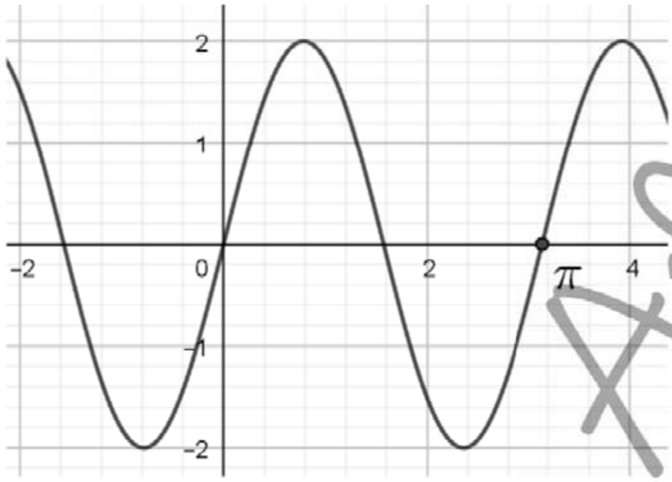
$f(x) = \eta\mu\alpha x \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha x\right) + 2\right] - \sigma\upsilon\nu\alpha x \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - \alpha x) - 1$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να δείξετε ότι $f(x) = 2 \cdot \eta\mu\alpha x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να δείξετε ότι $\alpha = 2$.




(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$ με την ευθεία $\varepsilon: y = 1$ για $x \in [0, \pi]$.

(Μονάδες 9)

# 14 A

Λύση

α)

i. Ισχύει ότι $συν\left(\frac{\pi}{2} - αx\right) = ημαx$ και $συν(\pi - αx) = -συναx$. Άρα, ο τύπος της συνάρτησης γίνεται:

$$f(x) = ημαx(ημαx + 2) - συναx(-συναx) - 1 =$$
$$ημ^2αx + 2ημαx + συν^2αx - 1 =$$
$$1 + 2ημαx - 1 = 2ημαx.$$

ii. Η $ημαx$ έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{α}$. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση $f$ έχει περίοδο $T = \pi$. Άρα,

$$\frac{2\pi}{α} = \pi \Leftrightarrow α = 2.$$

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της $f$ με την ευθεία $y = 1$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$2ημ2x = 1 \Leftrightarrow ημ2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$ημ2x = ημ\frac{\pi}{6}.$$

Οπότε,

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2κ\pi \\ \text{ή} \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2κ\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + κ\pi \\ \text{ή} \\ x = \frac{5\pi}{12} + κ\pi \end{cases}, \quad κ \in \mathbb{Z}.$$

Επειδή $x \in [0, \pi]$ έχουμε ότι:

$$0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{12} + κ\pi \leq \pi \Leftrightarrow$$
$$-\frac{1}{12} \leq κ \leq 1 - \frac{1}{12} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq κ \leq \frac{11}{12} \overset{κ\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} k = 0$$

και

$$0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{5\pi}{12} + κ\pi \leq \pi \Leftrightarrow$$
$$-\frac{5}{12} \leq κ \leq 1 - \frac{5}{12} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq κ \leq \frac{7}{12} \overset{κ\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} k = 0.$$

Άρα, $x = \frac{\pi}{12}$ και ή $x = \frac{5\pi}{12}$

# 15

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) - 2\eta\mu(\frac{\pi}{2} - x)$.

α) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $f(x) = -4\sigma\upsilon\nu x$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.

(Μονάδες 12)

# 15 A

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) = \sigma\upsilon\nu(6 \cdot 2\pi + \pi + x) = \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x.$

β) Είναι $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x.$

Άρα $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu x - 2\sigma\upsilon\nu x = -4\sigma\upsilon\nu x.$

γ) Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = -2 \Leftrightarrow -4\sigma\upsilon\nu x = -2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

# 16

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\eta\mu(\pi+x),\ x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $-2\le f(x)\le 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης $C_f$ της f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 3)

ii. Δυο σημεία τομής της $C_f$ με τον $x'x$.

(Μονάδες 6)

# 16 A

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $ημ\left(\frac{π}{2}-x\right)=συνx$ και $ημ(π+x)=-ημx$, έχουμε: $f(x)=συνx-ημx,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$$-1\le συνx\le 1,\ (1)\ \text{ και }\ -1\le ημx\le 1 \Leftrightarrow -1\le -ημx\le 1,\ (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει ότι: $-2\le συνx-ημx\le 2$, δηλαδή $-2\le f(x)\le 2$, που είναι το ζητούμενο.

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της f, τότε για κάποιο $x_o\in\mathbb{R}$ ισχύει $συνx_o=1$ και $ημx_o=-1$, οπότε $ημ^2x_o+συν^2x_o=1+1=2$, που είναι άτοπο. Άρα ο αριθμός 2 δεν είναι η μέγιστη τιμή της f.

γ) i. Με $x=0$ έχουμε: $f(0)=συν0-ημ0=1-0=1$, οπότε η $C_f$ τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $(0,1)$.

ii. Με $y=0$ δηλαδή $f(x)=0$ έχουμε: $συνx-ημx=0\Leftrightarrow συνx=ημx$. Μια προφανής λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός $\frac{π}{4}$ και επειδή $συν\left(π+\frac{π}{4}\right)=-συν\frac{π}{4}=-ημ\frac{π}{4}=ημ\left(π+\frac{π}{4}\right)$, μια άλλη λύση της είναι ο αριθμός $π+\frac{π}{4}=\frac{5π}{4}$.

Άρα δυο κοινά σημεία της $C_f$ με τον x΄x είναι τα $\left(\frac{π}{4},0\right)$ και $\left(\frac{5π}{4},0\right)$.

# 17

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης $f$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της $f$ τέμνει τον άξονα $xx'$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

# 17 A

ΛΥΣΗ

α) Η περίοδος της συνάρτησης $f$ είναι $\mathrm{T}=\dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{2}}=4$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$-1\le \eta\mu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\le 1$ οπότε $-2\le 2\eta\mu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\le 2$ οπότε $-2+1\le 1+2\eta\mu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\le 2+1$ και τελικά $-1\le f(x)\le 3$.

Επίσης $f(1)=1+2\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3$ και $f(3)=1+2\eta\mu\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-1$.

Συνεπώς η μέγιστη τιμή της $f$ είναι το 3 και η ελάχιστη το -1.

γ) Οι τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της $f$ τέμνει τον άξονα $xx'$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$. Είναι

$$f(x)=0\Leftrightarrow 1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\\ \acute{\eta}\\ \dfrac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\pi-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\pi x}{2}=2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{6}\\ \acute{\eta}\\ \dfrac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\dfrac{7\pi}{6}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\dfrac{x}{2}=2\kappa-\dfrac{1}{6}\\ \acute{\eta}\\ \dfrac{x}{2}=2\kappa+\dfrac{7}{6}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x=4\kappa-\dfrac{1}{3}\\ \acute{\eta}\\ x=4\kappa+\dfrac{7}{3}\end{array}\right\},\quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

οπότε οι ζητούμενες τετμημένες είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί της μορφής $x=4\kappa-\dfrac{1}{3}$ ή $x=4\kappa+\dfrac{7}{3}$, όπου $\kappa\in\mathbb{Z}$.

δ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$f(1-x)=1+2\eta\mu\left(\dfrac{\pi(1-x)}{2}\right)=1+2\eta\mu\left(\dfrac{\pi-\pi x}{2}\right)=1+2\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi x}{2}\right)=1+2\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$, οπότε

$$\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=\left(1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1\right)^2+\left(1+2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1\right)^2=$$

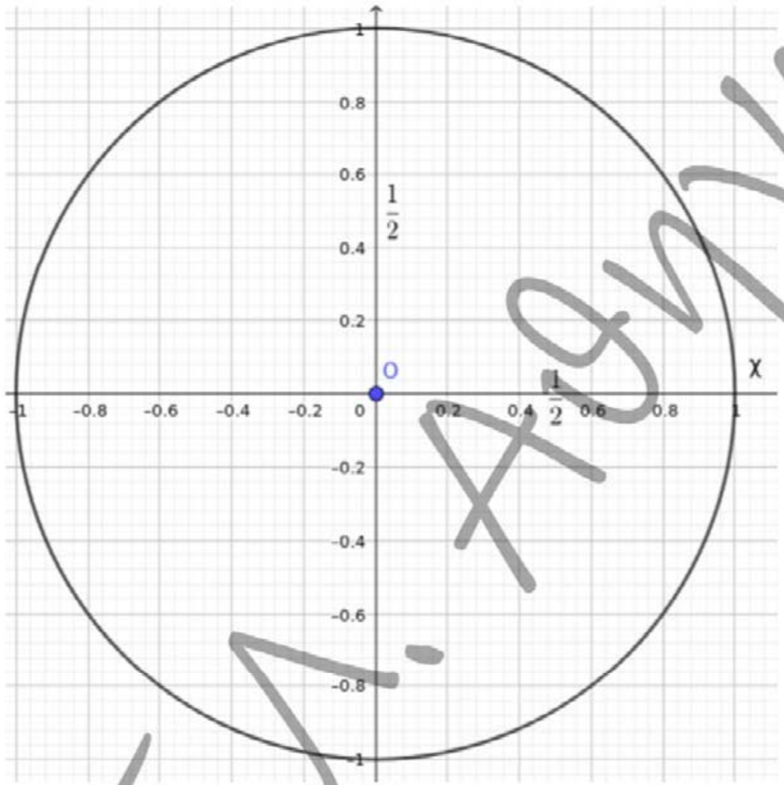
$$4\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)=4(\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right))=4\cdot 1=4$$

δηλαδή $\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

# 18

ΘΕΜΑ 2

α) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα [0,2π), με αρχική πλευρά την ημιευθεία Οχ, οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$.




(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ για $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)

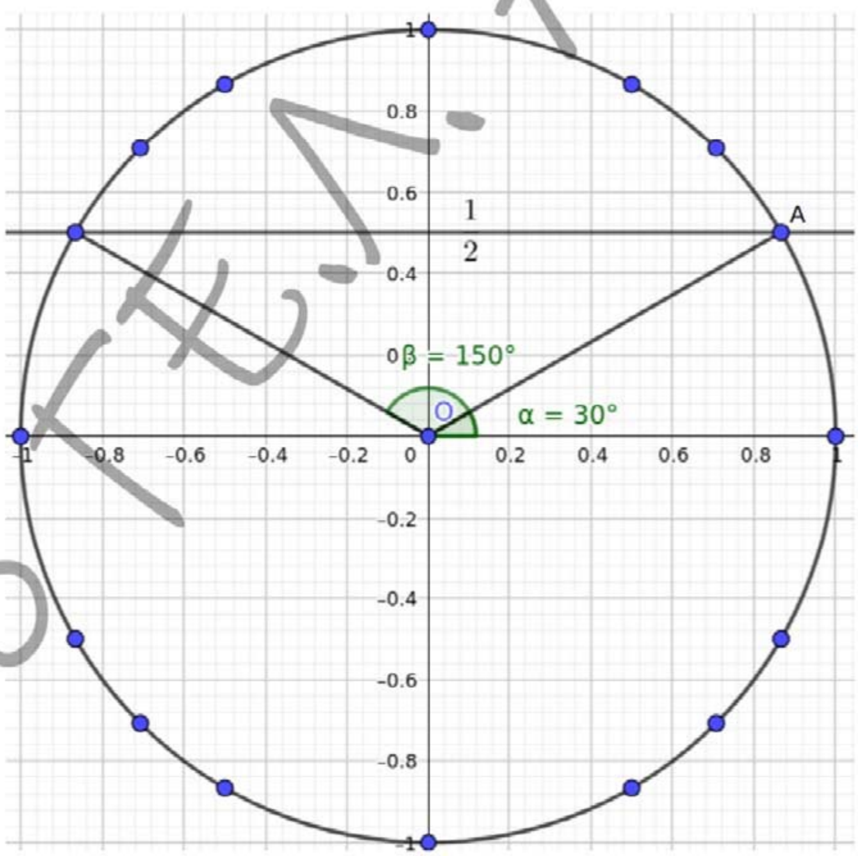
# 18 A

ΛΥΣΗ

α) Το ημίτονο μίας γωνίας με μία πλευρά την ημιευθεία Οχ και δεύτερη πλευρά που τέμνει στο σημείο Α του κύκλου, βρίσκεται από την προβολή του σημείου Α στον άξονα y'y.

Άρα, οι γωνίες που έχουν ημίτονο $\frac{1}{2}$ θα έχουν σημεία τομής με τον κύκλο τέτοια, ώστε η προβολή τους να τέμνει τον άξονα y'y στο $\frac{1}{2}$.

Οπότε φέρουμε την ευθεία $y=\frac{1}{2}$ (βλ. σχήμα παρακάτω) και προκύπτουν δύο γωνίες στο διάστημα [0,2π) που έχουν αυτό το ημίτονο. Είναι οι γωνίες $\alpha=30^o=\frac{\pi}{6}rad$ και $\beta=180^o-30^o=150^o=\frac{5\pi}{6}rad$.

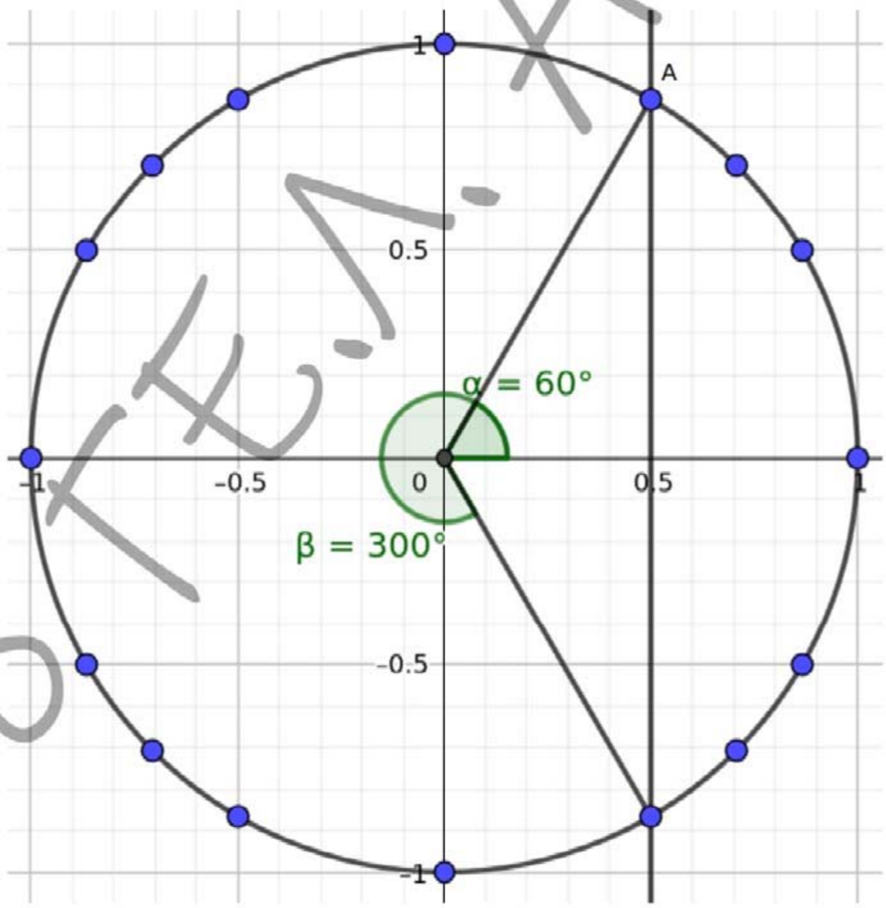


# 18 Α συνέχεια 2

Το συνημίτονο μίας γωνίας με μία πλευρά την ημιευθεία Οχ και δεύτερη πλευρά που τέμνει στο σημείο Α του κύκλου, βρίσκεται από την προβολή του σημείου Α στον άξονα x'x.

Άρα οι γωνίες που έχουν συνημίτονο $\frac{1}{2}$ θα έχουν σημεία τομής με τον κύκλο τέτοια, ώστε η προβολή τους να τέμνει τον άξονα χ΄χ στο $\frac{1}{2}$.

Οπότε φέρουμε την ευθεία $x=\frac{1}{2}$ (βλ. σχήμα παρακάτω) και προκύπτουν δύο γωνίες στο διάστημα [0,2π) που έχουν αυτό το συνημίτονο. Είναι οι γωνίες $\alpha=60^o=\frac{\pi}{3}rad$ και $\beta=360-60=300^o=\frac{5\pi}{3}rad$.



# 18 Α συνέχεια 3

β) Όλες οι γωνίες που έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ στο διάστημα $[0,2\pi)$ είναι οι $\alpha, \beta$ του ερωτήματος (α).

Για $x \in \mathbb{R}$ κάθε άλλη γωνία με ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ θα προκύπτει από αυτές, προσθέτοντας ή αφαιρώντας ακέραιο πλήθος κύκλων $\kappa \cdot 2\pi$, κ ακέραιος.

Άρα όλες οι λύσεις της εξίσωσης θα είναι:

$$\eta\mu x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=2\kappa\cdot\pi+\frac{\pi}{6} \text{ ή } x=2\kappa\cdot\pi+\pi-\frac{\pi}{6}=2\kappa\cdot\pi+\frac{5\pi}{6} \text{ με } k\in\mathbb{Z}.$$

# 19

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha \cdot \eta\mu\beta x$, με $\alpha$, $\beta$ ακέραιους θετικούς αριθμούς.

α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha$, αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι $2$.

(Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha=2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του $\beta$ για την οποία είναι $f\left(\frac{\pi}{16}\right)=2$ είναι $\beta=8$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $\alpha=2$ και $\beta=8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$ στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(Μονάδες 9)

# 19 A

ΛΥΣΗ

α) Για την συνάρτηση $f(x)=\alpha \cdot \eta\mu\beta x$ με $\alpha$ θετικό ακέραιο μέγιστη τιμή είναι το $\alpha$, άρα $\alpha=2$.

Εναλλακτικά έχουμε ότι η μέγιστη τιμή του $\eta\mu\beta x$ είναι 1, άρα αν $\alpha \cdot \eta\mu\beta x=2$, πρέπει $\alpha=2$

β) Η συνάρτηση από το α) ερώτημα είναι $f(x)=2\cdot \eta\mu\beta x$ , άρα

$$f\left(\frac{\pi}{16}\right)=2 \Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=2 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=1.$$

Λύνουμε την εξίσωση

$\eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=1 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=\eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\beta\pi}{16}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, με $\kappa\in\mathbb{Z}$ (η λύση $\frac{\beta\pi}{16}=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{2}$ ταυτίζεται με την προηγούμενη).

Απλοποιώντας το $\pi$ έχουμε $\frac{\beta}{16}=2\kappa+\frac{1}{2}$, η μικρότερη θετική τιμή του $\beta$ που ζητάμε θα είναι όταν ο $\kappa$, ως ακέραιος, γίνει ίσος με $0$ (για αρνητικές τιμές του $\kappa$ το $\beta$ γίνεται αρνητικό). Οπότε $\frac{\beta}{16}=2\kappa+\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\beta}{16}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta=8$.

γ) Η εξίσωση $f(x)=1$ από τα προηγούμενα ερωτήματα είναι:

$$2\cdot\eta\mu 8x=1 \Leftrightarrow \eta\mu 8x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 8x=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \\ 8x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{\pi}{48} \\ x=\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{5\pi}{48} \end{cases}, \text{ με } \kappa\in\mathbb{Z}$$

Αφού πρέπει $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ λύνουμε τις παρακάτω δύο ανισώσεις:

i) $0\le\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{\pi}{48}\le\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0\le\left(\frac{\kappa}{4}+\frac{1}{48}\right)\pi\le\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0\le\frac{\kappa}{4}+\frac{1}{48}\le\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{48}\le\frac{\kappa}{4}\le\frac{1}{2}-\frac{1}{48} \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{48}\le\frac{\kappa}{4}\le\frac{23}{48} \Leftrightarrow -\frac{4}{48}\le\kappa\le\frac{4\cdot 23}{48} \Leftrightarrow -\frac{1}{12}\le\kappa\le\frac{23}{12}$.

Αφού $\kappa\in\mathbb{Z}$, είναι $\kappa=0$ ή $\kappa=1$ δηλαδή δεκτές είναι οι γωνίες $x=\frac{\pi}{48}rad$ ή $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{48}=\frac{13\pi}{48}rad$.

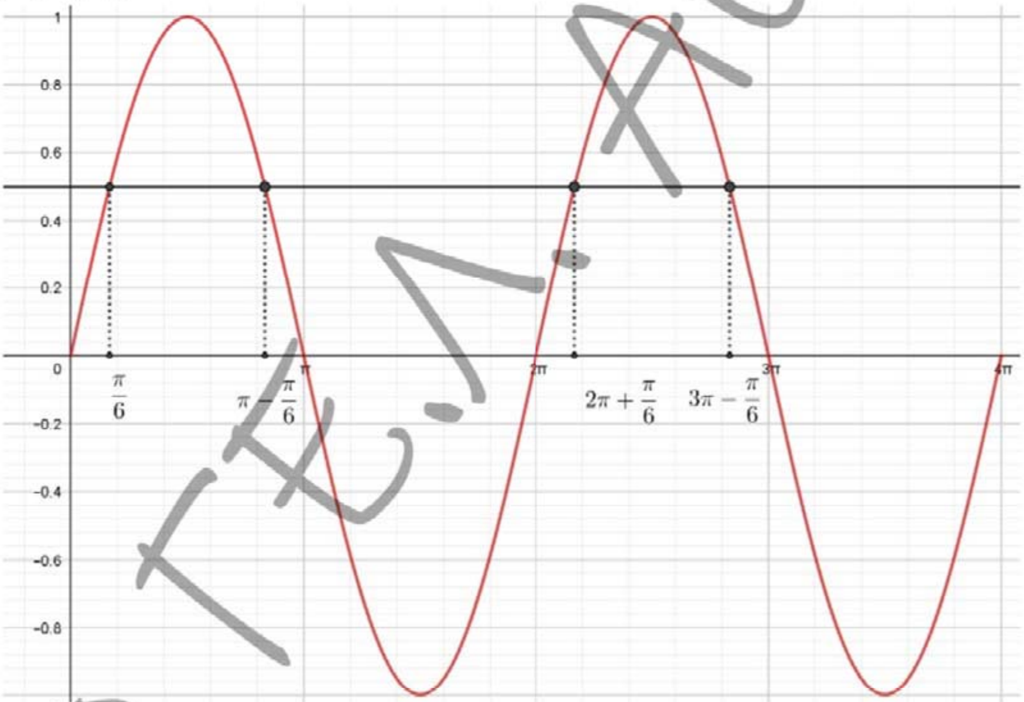
# 19 Α συνέχεια

ii) $0 \le \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le \left(\frac{\kappa}{4} + \frac{5}{48}\right)\pi \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le \frac{\kappa}{4} + \frac{5}{48} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{48} \le \frac{\kappa}{4} \le \frac{1}{2} - \frac{5}{48} \Leftrightarrow$

$-\frac{5}{48} \le \frac{\kappa}{4} \le \frac{19}{48} \Leftrightarrow -\frac{4\cdot 5}{48} \le \kappa \le \frac{4\cdot 19}{48} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \le \kappa \le \frac{19}{12}$.

Αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$, είναι $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$ δηλαδή δεκτές είναι οι γωνίες $x = \frac{5\pi}{48} rad$ ή $x = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} = \frac{17\pi}{48} rad$.

Εναλλακτικά, όπως στην προηγούμενη λύση, έχουμε $\eta\mu 8x = \frac{1}{2}$. Επειδή $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, θα είναι $0 \le 8x \le 4\pi$. Οι αριθμοί των οποίων το ημίτονο είναι ίσο με $\frac{1}{2}$ στο διάστημα αυτό είναι οι: $\frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}$, όπως προκύπτει από την παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης $\eta\mu\omega$.




Άρα: $8x = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{48}$

$8x = \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{48}$

$8x = 2\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{48}$

$8x = 3\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{17\pi}{48}$.

# 20

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2συνx$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης $C_f$ της f με την ευθεία $y = 1$.

(Μονάδες 5)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{π}{3}\right)$ και $f\left(\frac{2π}{5}\right)$.

(Μονάδες 6)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα $[0, 2π]$.

(Μονάδες 6)

# 20 A

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x)=\rho συνx, \rho>0$ με $\rho=2$, οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με $-2$ και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με $2$.

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της $C_f$ με την ευθεία $y=1$ προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης $f(x)=1$ που είναι ισοδύναμη με την $συνx=\frac{1}{2}$. Μια προφανής λύση της είναι η $x=\frac{\pi}{3}$ και επειδή οι αντίθετες γωνίες έχουν ίδιο συνημίτονο, μια άλλη λύση είναι η $x=-\frac{\pi}{3}$.

Άρα, δυο κοινά σημεία της $C_f$ με την ευθεία $y=1$ είναι τα $\left(-\frac{\pi}{3},1\right),\left(\frac{\pi}{3},1\right)$.

γ) Οι αριθμοί $\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{5}$ περιέχονται στο πρώτο τεταρτημόριο όπου η συνάρτηση συνημίτονο, είναι γνησίως φθίνουσα. Επιπλέον $\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{15}>0$, οπότε $\frac{2\pi}{5}>\frac{\pi}{3}$ και λόγω της μονοτονίας του συνημιτόνου παίρνουμε $συν\left(\frac{\pi}{3}\right)>συν\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, οπότε $2συν\left(\frac{\pi}{3}\right)>2συν\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, δηλαδή $f\left(\frac{\pi}{3}\right)>f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

δ) Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα προκύπτει η γραφική παράσταση της f όπως φαίνεται στο σχήμα.

| x | | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2συνx | | 2 | 0 | $-2$ | 0 | 2 |