Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

1

ΘΕΜΑ 2

Αν $\alpha = \log 100 + \log 5 + \log 2 - \log 1$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$9 \cdot 2^x = 4 \cdot \alpha^x.$$

(Μονάδες 15)

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

1 A

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι:

$\log 100 = \log 10^2 = 2\log 10 = 2$,

$\log 2 + \log 5 = \log(2 \cdot 5) = \log 10 = 1$ και

$\log 1 = 0$.

Άρα, $\alpha = 2 + 1 + 0 = 3$.

β) Για $\alpha = 3$ η εξίσωση γράφεται:

$$9 \cdot 2^x = 4 \cdot 3^x \Leftrightarrow$$

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x = 2.$$

6ο ΓΕΛ Αθηνών

2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = 2\log 5 + 2\log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία ισχύει ότι $e^{\lambda} = A$.

(Μονάδες 6)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να αποδείξετε ότι $\ln \lambda < 0$.

(Μονάδες 7)

6ο ΓΕΛ Αθηνών

2 A

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$\mathrm{A} = 2\log 5 + 2\log 2 = \log 5^2 + \log 2^2 = \log 25 + \log 4 = \log(25 \cdot 4) = \log 100 = 2$$

β) Είναι $e^{\lambda} = \mathrm{A} \Leftrightarrow e^{\lambda} = 2 \Leftrightarrow \lambda = \ln 2$.

γ) Είναι $2 < e \Leftrightarrow \ln 2 < \ln e \Leftrightarrow \lambda < 1 \Leftrightarrow \ln \lambda < \ln 1 \Leftrightarrow \ln \lambda < 0$.

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

3

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = e^{\kappa x},\ \kappa \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(1) - f(0) \geq f(0) - f(-1)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

(Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι αν $\kappa > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 07)

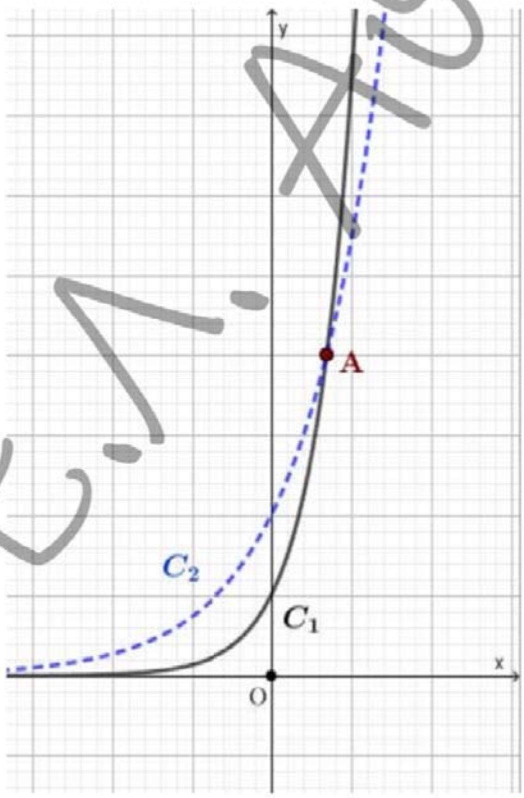
γ)

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει: $e^{2x} > 2e^{x}$.

(Μονάδες 05)

ii. Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα, να αντιστοιχίσετε τις C_1, C_2 με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varphi(x) = 2e^{x}$ και $k(x) = e^{2x}$.

Ποιες είναι οι συντεταγμένες του κοινού τους σημείου Α;



(Μονάδες 05)

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

3 A

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$f(1)-f(0)\geq f(0)-f(-1)\Leftrightarrow e^{\kappa}-1\geq 1-e^{-\kappa}\Leftrightarrow e^{\kappa}-1\geq 1-\frac{1}{e^{\kappa}}\Leftrightarrow$

$e^{2\kappa}-e^{\kappa}\geq e^{\kappa}-1\Leftrightarrow e^{2\kappa}-2e^{\kappa}+1\geq 0\Leftrightarrow (e^{\kappa}-1)^2\geq 0$, η οποία ισχύει πάντα.

Η ισότητα ισχύει, όταν $e^{\kappa}-1=0\Leftrightarrow e^{\kappa}=1\Leftrightarrow \kappa=0$.

β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

<u>1ος τρόπος</u>:

Αφού $\kappa>0\overset{e^x\uparrow}{\Longrightarrow} e^{\kappa}>1$ και η συνάρτηση γράφεται $f(x)=e^{\kappa x}=(e^{\kappa})^x$. Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

<u>2ος τρόπος</u>:

Έστω $\kappa>0$ και $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$.

Τότε $\kappa\cdot x_1<\kappa\cdot x_2\overset{e^x\uparrow}{\Longrightarrow} e^{\kappa\cdot x_1}<e^{\kappa\cdot x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ)

i. Είναι:

$$e^{2x}>2e^x\Leftrightarrow e^{2x}-2e^x>0\Leftrightarrow e^x(e^x-2)>0\overset{e^x>0}{\Longleftrightarrow} e^x-2>0\Leftrightarrow$$

$$e^x>2\Leftrightarrow e^x>e^{ln2}\Leftrightarrow x>ln2.$$

ii. Το σημείο τομής των δύο καμπυλών προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης

$$e^{2x}=2e^x\Leftrightarrow e^{2x}-2e^x=0\Leftrightarrow e^x(e^x-2)=0\overset{e^x\neq 0}{\Longleftrightarrow} e^x-2=0\Leftrightarrow$$

$$e^x=2\Leftrightarrow e^x=e^{ln2}\Leftrightarrow x=ln2,$$

και $\varphi(ln2)=2e^{ln2}=2\cdot 2=4$

Επομένως, το σημείο τομής των δύο καμπυλών είναι το $A(ln2,4)$.

Από την ισοδυναμία $e^{2x}>2e^x\Leftrightarrow x>ln2$, προκύπτει ότι η καμπύλη C_1 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $k(x)=e^{2x}$, ενώ η C_2 απεικονίζει γραφικά τη συνάρτηση $\varphi(x)=2e^x$.

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

4

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 3$ και $\beta = \log 4$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < \alpha < \beta$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι :

i. $\beta + \alpha > 1$.

(Μονάδες 6)

ii. $\ln \frac{\alpha}{\beta} < 0$.

(Μονάδες 7)

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

4 Α

ΛΥΣΗ

α) Είναι $1<3<4 \Leftrightarrow \log 1<\log 3<\log 4 \Leftrightarrow 0<\alpha<\beta$.

β)

i. Είναι $\beta+\alpha=\log 4+\log 3=\log(4\cdot 3)=\log 12>\log 10=1$, οπότε πράγματι $\beta+\alpha>1$.

ii. Είναι $0<\alpha<\beta \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\beta}<1 \Rightarrow \ln\dfrac{\alpha}{\beta}<\ln 1 \Rightarrow \ln\dfrac{\alpha}{\beta}<0$.

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

5

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 20$ και $\beta = \log 50$. Να αποδείξετε ότι

α) $\beta + \alpha = 3$.

(Μονάδες 7)

β) $\ln(\beta + \alpha) > 1$.

(Μονάδες 6)

γ) $10^{\beta} - 10^{\alpha} = 10 \cdot (\beta + \alpha)$.

(Μονάδες 12)

Δίνεται ότι $e \cong 2,71$.

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

5 A

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\beta+\alpha=\log 20+\log 50=\log(20\cdot 50)=\log 1000=\log 10^3=3$.

β) Είναι $\beta+\alpha=3>e \Rightarrow \ln(\alpha+\beta)>\ln e \Rightarrow \ln(\alpha+\beta)>1$.

γ) Είναι $10^{\beta}-10^{\alpha}=10^{\log 50}-10^{\log 20}=50-20=30=10\cdot(\beta+\alpha)$.

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

6

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2+1}-x>0$, για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

(Μονάδες 03)

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 09)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(-x)+g(x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 09)

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O.

(Μονάδες 04)

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

6 A

ΛΥΣΗ

α)

i. Για $x\in(-\infty,0)$ είναι $-x>0$ και $\sqrt{x^2+1}>0$, οπότε $\sqrt{x^2+1}-x>0$.

ii. Για να βρούμε τα ζητούμενα διαστήματα αρκεί να επιλύσουμε την $f(x)>0$ με $x\in\mathbb{R}$

.

- Από το ερώτημα (i) γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in(-\infty,0)$ ισχύει $\sqrt{x^2+1}-x>0\Leftrightarrow f(x)>0$.
- Ακόμη, για κάθε $x\in[0,+\infty)$ είναι:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+1}-x>0&\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>x\\&\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2>x^2\\&\Leftrightarrow x^2+1>x^2\\&\Leftrightarrow 1>0,\text{ που ισχύει.}\end{aligned}$$

Τελικά, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

<u>β τρόπος</u>

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}\Rightarrow\sqrt{x^2+1}>|x|$, όμως $|x|\geq x$, άρα $\sqrt{x^2+1}>|x|\geq x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}>x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}-x>0\Rightarrow f(x)>0$.

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$, με $x\in\mathbb{R}$.

i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned}g(-x)+g(x)&=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}-(-x)\right)\\&=\ln\left(\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right)\\&=\ln\left(\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2\right)=\\&=\ln\left(x^2+1-x^2\right)\\&=\ln1=0\end{aligned}$$

ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

6ο ΓΕΛ Αθηνών

- $-x \in \mathbb{R}$ και
- από το προηγούμενο υποερώτημα ισχύει ότι $g(-x)+g(x)=0 \Leftrightarrow g(-x)=-g(x)$.

Άρα η συνάρτηση g είναι περιττή και έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O.

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

7

ΘΕΜΑ 4

Σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, η θερμοκρασία θ, σε βαθμούς Κελσίου, ενός αντικειμένου μειώνεται με την πάροδο του χρόνου t, σε λεπτά, σύμφωνα με τη συνάρτηση $\theta(t) = T + (\theta_0 - T)e^{kt}$, όπου k μια σταθερά με $k < 0$, θ_0 η αρχική θερμοκρασία του αντικειμένου, ενώ T είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο τοποθετείται το αντικείμενο, με $\theta_0 > T$.

Ένα αντικείμενο έχει θερμανθεί στους $100^o\ C$ και στη συνέχεια αφήνεται να κρυώσει σε ένα δωμάτιο με σταθερή θερμοκρασία $30^o\ C$. Γνωρίζουμε ότι 5 λεπτά μετά την τοποθέτησή του αντικειμένου στο δωμάτιο, η θερμοκρασία του αντικειμένου είναι $80^o\ C$.

α) Να αποδείξετε ότι $k = -0{,}0672$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\theta(t) = 30 + 70 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{t/5}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε, με προσέγγιση εκατοστού, τη θερμοκρασία του αντικειμένου μετά από 1 ώρα και 40 λεπτά.

(Μονάδες 8)

Δίνεται ότι $ln\left(\frac{5}{7}\right) = -0{,}336$ (προσεγγιστικά) και $\left(\frac{5}{7}\right)^{10} \cong 0{,}034$.

6ο ΓΕΛ Αθηνών

7 A

ΛΥΣΗ

α) Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε

$\theta_0 = 100^0 C, T = 30^0 C$, ενώ $\theta(5) = 80^0 C$.

Άρα $80^0 = 30^0 + (100^0 - 30^0)e^{5k}$, οπότε $e^{5k} = \frac{50}{70} = \frac{5}{7}$.

Έτσι, θα έχουμε $5k = ln\left(\frac{5}{7}\right)$.

Τελικά, $k = \frac{-0{,}336}{5} = -0{,}0672$.

β) Στο προηγούμενο ερώτημα βρήκαμε ότι $e^{5k} = \frac{5}{7}$ άρα $(e^k)^5 = \frac{5}{7}$, οπότε $e^k = \left(\frac{5}{7}\right)^{1/5}$.

Άρα $\theta(t) = 30 + (100 - 30)(e^k)^t = 30 + 70 \cdot \left[\left(\frac{5}{7}\right)^{1/5}\right]^t = 30 + 70 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{t/5}$.

Εναλλακτικά, $\theta(t) = 30 + (100 - 30)e^{5kt/5} = 30 + 70 \cdot (e^{5k})^{t/5} = 30 + 70 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{t/5}$.

γ) Ζητάμε τον αριθμό $\theta(100) = 30 + 70 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{20} = 30 + 70 \cdot \left[\left(\frac{5}{7}\right)^{10}\right]^2 \cong 30 + 70 \cdot (0{,}034)^2$

$= 30 + 70 \cdot 0{,}001156 = 30 + 0{,}08092 \cong 30{,}08^o C$.

6ο ΓΕΛ Αθηνών

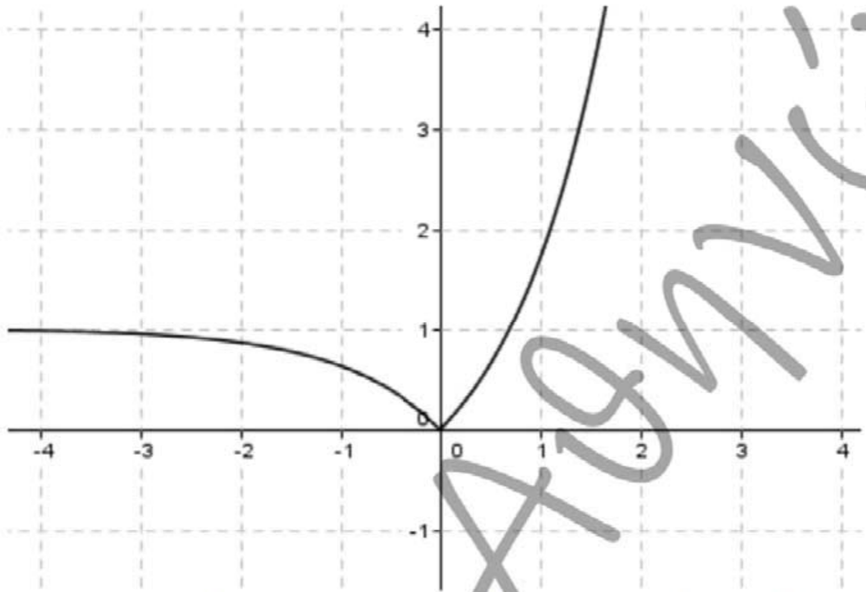
8

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=|e^x-1|$, $x\in R$.

α) Να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να περιγράψετε πως αυτή μπορεί να προκύψει από τη γνωστή γραφική παράσταση της $g(x)=e^x$, $x\in R$.

(Μονάδες 7)



β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να συμπεράνετε τη μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της f.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\dfrac{1}{2}$.

(Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α, το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής της παράστασης C_f με την ευθεία $y=\alpha$.

(Μονάδες 7)

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

8 A

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει:

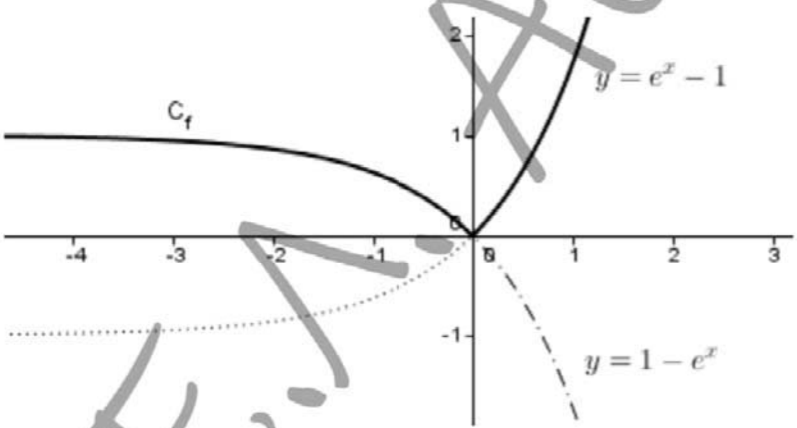
$$e^x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow e^x \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 0 .$$

Έτσι, ο τύπος της συνάρτησης γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \ge 0 \\ 1 - e^x, & x < 0 \end{cases}$$

Αν μεταφέρουμε μια μονάδα προς τα κάτω τη γραφική παράσταση της $g(x) = e^x$, προκύπτει η γραφική παράσταση της $g_1(x) = e^x - 1$, ενώ αν μεταφέρουμε μια μονάδα προς τα πάνω την γραφική παράσταση της $h(x) = -e^x$, προκύπτει η γραφική παράσταση της $h_1(x) = 1 - e^x$.

Σύμφωνα με τον απλοποιημένο τύπο, η γραφική παράσταση της f αποτελείται από το τμήμα της γραφικής παράστασης της g_1 που είναι από τον άξονα y'y και δεξιά και το τμήμα της h_1 που είναι από τον άξονα y'y και αριστερά, οπότε προκύπτει το σχήμα της εκφώνησης.



β) Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι αυτή είναι:

- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και
- παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = 0$

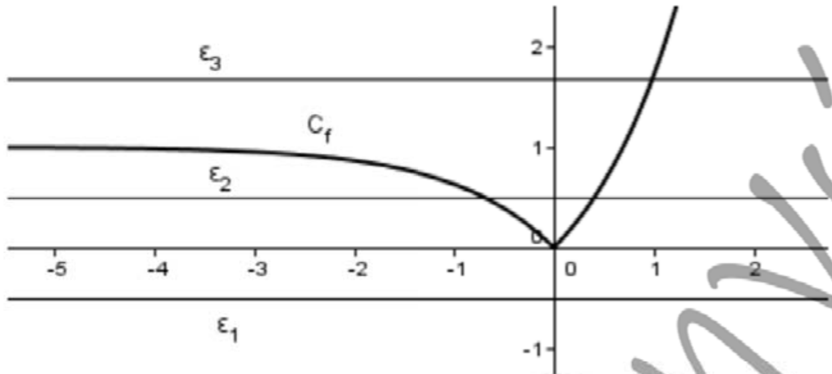
γ) Είναι:

$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |e^x - 1| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x - 1 = \frac{1}{2} \text{ ή } e^x - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{3}{2} \text{ ή } e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\frac{3}{2} \text{ ή } x = \ln\frac{1}{2}$$

δ) Είναι γνωστό ότι το σύνολο τιμών της $y = e^x$ είναι το $(0, +\infty)$. Έτσι, για $x \leq 0$ έχουμε $0 < e^x \leq 1$, οπότε $-1 < e^x - 1 \leq 0$, άρα $0 \leq f(x) < 1$.

Σχετικά με το πλήθος των κοινών σημείων, με τη βοήθεια του σχήματος, διακρίνουμε τις παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:



- Αν $\alpha < 0$, (ευθεία ε_1) τότε η C_f και η ευθεία $y = \alpha$ δεν έχουν κοινό σημείο.
- Αν $\alpha = 0$, τότε η C_f και η ευθεία $y = 0$ (άξονας $x'x$) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
- Αν $0 < \alpha < 1$, (ευθεία ε_2) τότε η C_f και η ευθεία $y = \alpha$ έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία.
- Αν $\alpha \geq 1$, (ευθεία ε_3) τότε η C_f και η ευθεία $y = \alpha$ έχουν ένα κοινό σημείο.

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

9

ΘΕΜΑ 4

Ένα από τα επιβλητικότερα μνημεία του κόσμου είναι η αψίδα Gateway Arch στην πόλη Saint-Louis των Η.Π.Α. Θεωρώντας κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, όπως στο παρακάτω σχήμα, η πρόσοψη της αψίδας προσεγγίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$f(x) = -192\left(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}}\right) + 576,$

με $f(x) \geq 0$, όπου οι αριθμοί $x, f(x)$ μετρούνται σε μέτρα (m).

(Η γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης λέγεται αλυσοειδής καμπύλη).

α) Να αποδείξετε ότι το μέγιστο ύψος ΟΚ της αψίδας είναι $192\ m$.

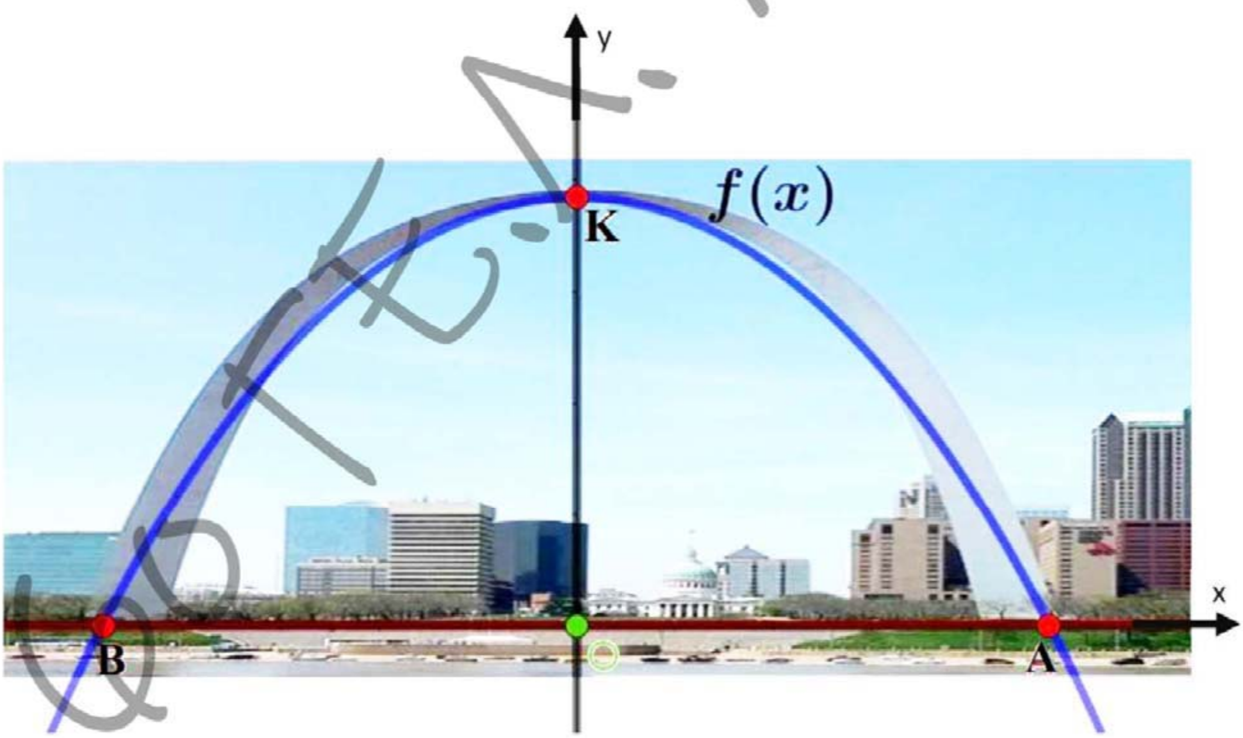
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Α στο οποίο η καμπύλη τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox. Δίνεται ότι $ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cong 0{,}96$.

(Μονάδες 13)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι τα σημεία Α και Β έχουν αντίθετες τετμημένες, να αποδείξετε ότι το πλάτος ΑΒ της αψίδας είναι ίσο με το μέγιστο ύψος της ΟΚ.

(Μονάδες 5)



9 Α

ΛΥΣΗ

α) Το ύψος (OK)είναι η τεταγμένη του σημείου στο οποίο τέμνει τον άξονα $y'y$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης, δηλαδή ο αριθμός:

$f(0) = 576 - 192(e^0 + e^0) = 576 - 2 \cdot 192 = 192\ m.$

β) Οι τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$, είναι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$, η οποία ισοδύναμα γράφεται:

$$192\left(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}}\right) = 576 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}} = 3 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{100}} + \frac{1}{e^{\frac{x}{100}}} = 3.$$

Θέτοντας $e^{\frac{x}{100}} = y$, παίρνουμε την εξίσωση $y + \frac{1}{y} = 3$, η οποία γράφεται ισοδύναμα:

$y^2 + 1 = 3y \Leftrightarrow y^2 - 3y + 1 = 0$, με διακρίνουσα $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5$, οπότε

$y = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$, αφού το σημείο Α βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα Ox, οπότε $x > 0$, άρα

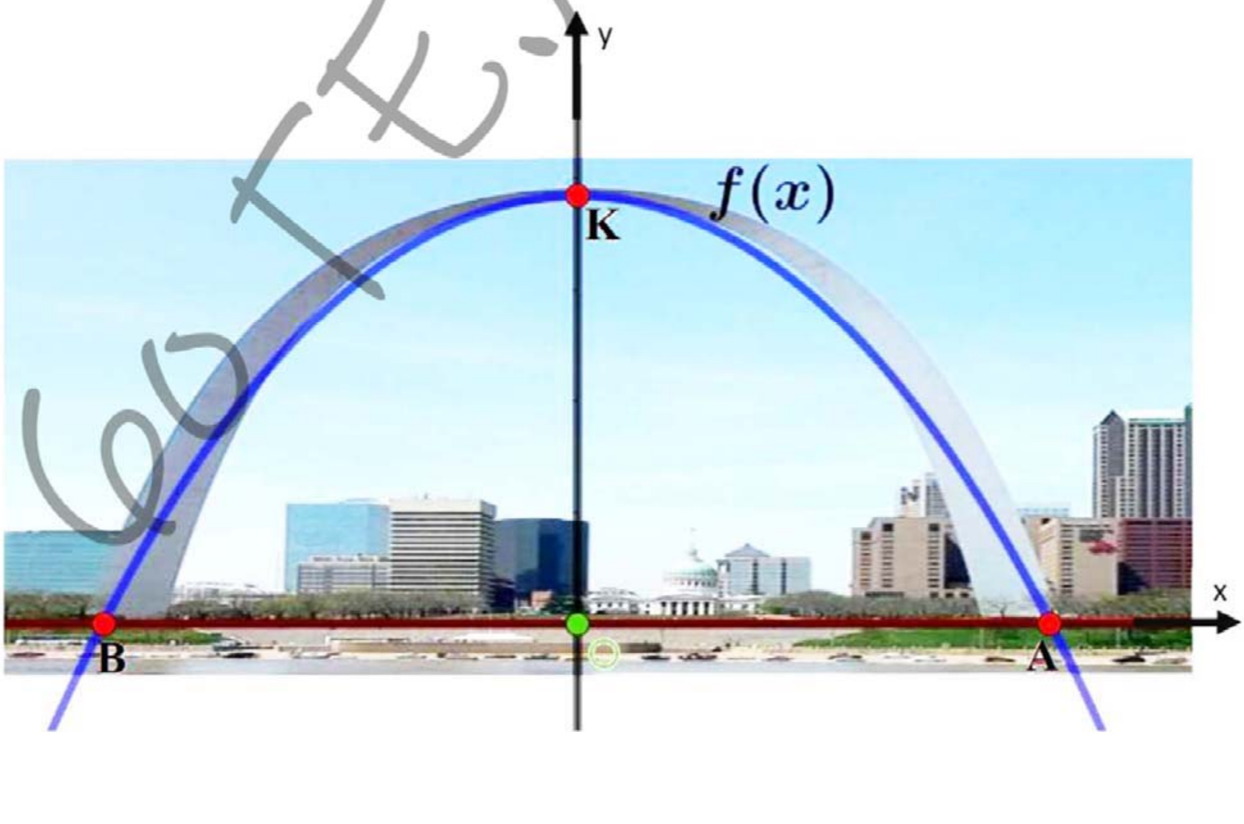
$\frac{x}{100} > 0 \Leftrightarrow y = e^{\frac{x}{100}} > e^0 = 1.$

Η άλλη ρίζα $y = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ είναι μικρότερη του 1, καθώς $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{5} < 2 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{5}$, αληθές.

Άρα, $e^{\frac{x}{100}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, άρα $\frac{x}{100} = ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cong 0{,}96.$

Έτσι, $x = 96\ m$, οπότε $A(96{,}0)$.

γ) Το σημείο Β έχει θα έχει τετμημένη -96, άρα θα είναι $(AB) = 96 \cdot 2 = 192\ m = (OK)$.



6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

10

ΘΕΜΑ 4

Ο Νόμος των Bouguert-Lambert στη φωτομετρία, λέει ότι η ένταση I μιας ακτινοβολίας (ηλιακό φως, ακτίνες X, κ.λπ.) που εισχωρεί κατακόρυφα σε ένα διαφανές μέσο (νερό λιμνών, θαλάσσης, γυαλί, κ.λ.π.) μειώνεται εκθετικά, απορροφούμενη από το μέσο, συναρτήσει του βάθους (πάχους) h του μέσου, σύμφωνα με τη συνάρτηση $I = I_0 \cdot e^{-\lambda h}$, όπου $\lambda > 0$ σταθερά και I_0 η αρχική ένταση.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει κάποιο βάθος h στο οποίο η ένταση της ακτινοβολίας να είναι μηδέν.

(Μονάδες 3)

β) Γνωρίζουμε ότι για καθαρό νερό θαλάσσης είναι $\lambda = 1{,}4\ m^{-1}$ (το m παριστάνει μέτρα) και ότι μια συγκεκριμένη μορφή φυτικής ζωής δεν μπορεί να υπάρξει, όταν η ένταση του ηλιακού φωτός γίνει μικρότερη ή ίση από το $\frac{1}{4}$ της αρχικής έντασης. Να βρείτε για ποιες τιμές του βάθους h συμβαίνει αυτό. (Δίνεται ότι $ln2 = 0{,}7$)

(Μονάδες 12)

γ) Σε κάποιο άλλο διαφανές μέσο, γνωρίζουμε ότι σε βάθος $10\ m$ η ένταση μιας ακτινοβολίας μειώνεται στο μισό της έντασης της αρχικής ακτινοβολίας. Να αποδείξτε ότι στην συγκεκριμένη κατάσταση ισχύει $I = I_o \cdot 2^{-\frac{h}{10}}$.

(Μονάδες 10)

6ο ΓΕΛ Αθηνών

10 A

ΛΥΣΗ

α) Αν υπάρχει τέτοιο βάθος, θα έχουμε $I = 0 = I_0 \cdot e^{-\lambda h}$, άρα $e^{-\lambda h} = 0$, το οποίο δεν είναι αποδεκτό, αφού είναι $e^x > 0$, για κάθε $x \in R$.

β) Θέλουμε να ισχύει $I \leq \frac{1}{4} I_0$, άρα $I_0 \cdot e^{-\lambda h} \leq \frac{1}{4} I_0 \Leftrightarrow e^{-\lambda h} \leq \frac{1}{4}$ οπότε έχουμε

$$-\lambda h \leq ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow -\lambda h \leq -ln4 \Leftrightarrow h \geq \frac{ln4}{1{,}4m^{-1}} = \frac{2ln2}{1{,}4} m = \frac{2 \cdot 0{,}7}{1{,}4} = 1m.$$

Άρα σε βάθος τουλάχιστον ενός μέτρου δεν υπάρχει η συγκεκριμένη μορφή φυτικής ζωής.

γ) Για το συγκεκριμένο μέσο έχουμε ότι για $h = 10m$ ισχύει $I = \frac{1}{2} I_0$, άρα $I_0 \cdot e^{-10\lambda} = \frac{1}{2} I_0$.

Έτσι, παίρνουμε $e^{-10\lambda} = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Leftrightarrow \left(e^{-\lambda}\right)^{10} = 2^{-1} \Leftrightarrow e^{-\lambda} = \sqrt[10]{2^{-1}} = 2^{-\frac{1}{10}}$.

Ώστε $I = I_0 \cdot e^{-\lambda h} = I_0 \cdot \left(e^{-\lambda}\right)^h = I_0 \cdot \left(2^{-\frac{1}{10}}\right)^h = I_o \cdot 2^{-\frac{h}{10}}$.

6ο ΓΕΛ Αθηνών

11

ΘΕΜΑ 2

Αν είναι γνωστό ότι $\ln 4 = 1,386$ και $\ln 5 = 1,609$ τότε:

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \ln\frac{e}{5} - \ln\frac{4}{e}$

(Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια της ισότητας $80 = 5\cdot 4^2$ να αποδείξετε ότι $\ln 80 = 4,381$.

(Μονάδες 13)

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

11 A
ΛΥΣΗ

α) Από τις ιδιότητες των λογαρίθμων έχουμε:

$$A = \ln e - \ln 5 - (\ln 4 - \ln e) = 1 - \ln 5 - \ln 4 + 1$$

$$= 2 - 1{,}386 - 1{,}609 = 2 - 2{,}995 = -0{,}995$$

β) Δεδομένου ότι $80 = 5 \cdot 4^2$, σε συνδυασμό με τις ιδιότητες των λογαρίθμων, έχουμε:

$$\ln 80 = \ln(5 \cdot 4^2) = \ln 5 + \ln 4^2 = \ln 5 + 2\ln 4 = 1{,}609 + 2 \cdot 1{,}386 = 4{,}381$$

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

12

ΘΕΜΑ 4

Αν I είναι η ένταση του ήχου (σε W/m^2 - Watt ανά τετραγωνικό μέτρο), τότε η αντίστοιχη ηχοστάθμη D (σε ντεσιμπέλ) δίνεται από τον τύπο:

$$D = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I)$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα ηχοστάθμης.

Όριο ακοής	0 *ντεσιμπέλ*
Θρόισμα φύλλων	10 *ντεσιμπέλ*
Συνήθης ψίθυρος	20 *ντεσιμπέλ*
Αθόρυβο αυτοκίνητο	50 *ντεσιμπέλ*
Συνήθης ομιλία	65 *ντεσιμπέλ*
Κυκλοφοριακή κίνηση	80 *ντεσιμπέλ*
Αεροσυμπιεστής (κομπρεσέρ) σε απόσταση 3 μέτρων	90 *ντεσιμπέλ*
Όριο πόνου	120 *ντεσιμπέλ*
Αεριωθούμενο	140 *ντεσιμπέλ*

α) Να βρείτε την ένταση του ήχου που δημιουργεί το θρόισμα των φύλλων.

(Μονάδες 08)

β) Αν η ένταση του ήχου σε μία ροκ συναυλία είναι 1 W/m^2 να ελέγξετε αν η ηχοστάθμη στην οποία εκτίθεται το κοινό αγγίζει το όριο του πόνου.

(Μονάδες 07)

γ) Αν διπλασιάσουμε την ένταση του ενισχυτή ενός στερεοφωνικού συστήματος, τότε να υπολογίσετε πόσα ντεσιμπέλ θα αυξηθεί η στάθμη του εξερχόμενου ήχου. (Δίνεται ότι $\log 2 \approx 0{,}3$).

(Μονάδες 10)

6ο ΓΕΛ Αθηνών

12 A

ΛΥΣΗ

α) Απο τον πίνακα φαίνεται οτι $D = 10$. Άρα έχουμε:

$$10 = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I) \Leftrightarrow \log(10^{12} \cdot I) = 1 \Leftrightarrow 10^{12} \cdot I = 10 \Leftrightarrow I = \frac{10}{10^{12}} \Leftrightarrow I = 10^{-11}$$

Επομένως, η ένταση του ήχου που δημιουργεί το θρόισμα των φύλλων είναι $10^{-11}\, W/m^2$.

β) Αφού $I = 1$, έχουμε:

$$D = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot 1) = 10 \cdot \log(10^{12}) = 10 \cdot 12 \cdot \log 10 = 120 \cdot 1 = 120$$

Επομένως, η ηχοστάθμη είναι 120 ντεσιμπέλ, δηλαδή αγγίζει το όριο του πόνου.

γ) Αν I είναι η αρχική ένταση του ήχου, τότε $D = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I)$ είναι η αντίστοιχη ηχοστάθμη και για την D' έχουμε:

$$D' = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot 2\, I) = 10 \cdot [\log(2 \cdot 10^{12} \cdot I)] = 10 \cdot [\log 2 + \log(10^{12} \cdot I)] =$$

$$= 10 \cdot \log 2 + 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I) = 10 \cdot 0{,}3 + D = 3 + D$$

Επομένως, η ένταση του ήχου θα αυξηθεί κατά 3 ντεσιμπέλ.

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

13

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\log_2 8)\cdot x^3+\left(4\log_2\sqrt{2}\right)\cdot x^2-(4\log_2 1)\cdot x+1990$.

α) Να αποδείξετε ότι $\log_2 8+2\log_2\sqrt{2}-\log_2 1=4$.

(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$.

(Μονάδες 10)

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

13 A

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3,\ \log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{ και } \log_2 1 = 0.$$

Οπότε

$$\log_2 8 + 2\log_2 \sqrt{2} - \log_2 1 = 3 + 2\cdot\frac{1}{2} - 0 = 3 + 1 = 4.$$

β) Ισχύει $\upsilon = \mathrm{P}(\rho)$ με $\rho = 2$.

Είναι

$$\begin{aligned}\upsilon = \mathrm{P}(2) &= (\log_2 8)\cdot 2^3 + 4\left(\log_2 \sqrt{2}\right)\cdot 2^2 - (4\log_2 1)\cdot 2 + 1990\\ &= 8\log_2 8 + 16\log_2 \sqrt{2} - 8\log_2 1 + 1990\\ &= 8\left(\log_2 8 + 2\log_2 \sqrt{2} - \log_2 1\right) + 1990\\ &\overset{(\alpha)}{=} 8\cdot 4 + 1990\\ &= 2022\end{aligned}$$

Τελικά, το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ είναι ίσο με 2022.

6ο ΓΕΛ Αθηνών

14

ΘΕΜΑ 4

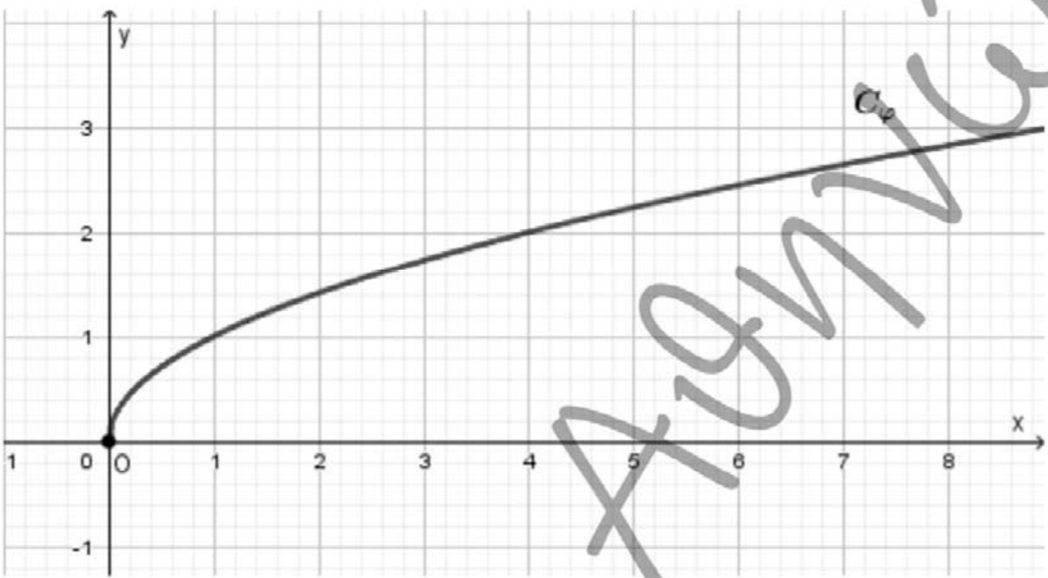
Δίνονται οι συναρτήσεις:

$\varphi(x) = \sqrt{x}$, με $x \geq 0$, $f(x) = \sqrt{x-1}$, με $x \geq 1$ και $g(x) = \frac{x+1}{3}$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 08)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ.



i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 02)

ii. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

(Μονάδες 04)

γ) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g.

(Μονάδες 06)

δ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{ln10 - 1} > \frac{1+ln10}{3}$.

(Μονάδες 05)

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

14 A

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\begin{cases} y = f(x), & x \geq 1 \\ y = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \\ y = \frac{x+1}{3} \end{cases}$.

Επομένως προκύπτει η εξίσωση $\sqrt{x-1} = \frac{x+1}{3}$, $x \geq 1$, η οποία ισοδύναμα γίνεται:

$$3\sqrt{x-1} = x+1 \overset{x\geq 1}{\Longleftrightarrow} 9(x-1) = x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2-7x+10=0$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 49-40 = 9 > 0$ και οι ρίζες της εξίσωσης

$x_1, x_2 = \frac{7\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = 5.$

Για $x = 2$, είναι $y = \frac{2+1}{3} = 1.$

Για $x = 5$, είναι $y = \frac{5+1}{3} = 2.$

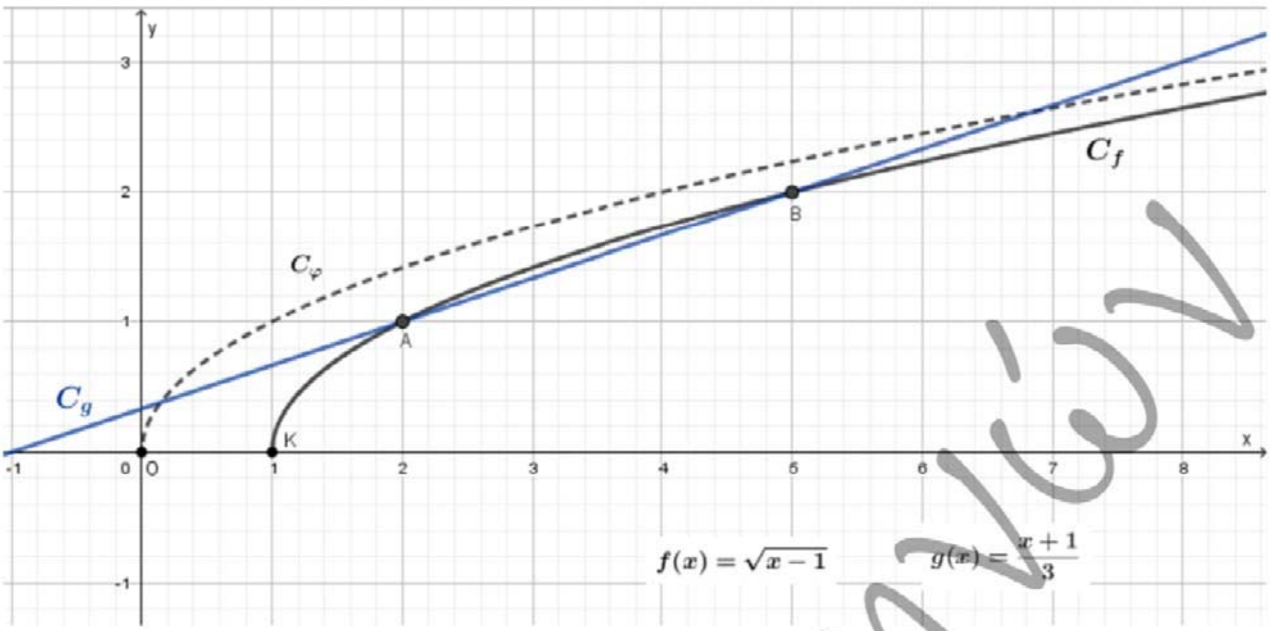
Επομένως, τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g, είναι το $A(2,1)$ και το $B(5,2)$.

β)

i. Επειδή $f(x) = \varphi(x-1)$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ κατά μία μονάδα προς τα δεξιά. Έτσι, το σημείο $O(0,0)$ θα μεταφερθεί στο σημείο $K(1,0)$.

ii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι ευθεία, οπότε για τον σχεδιασμό της χρειάζονται δύο σημεία της. Επιλέγουμε τα σημεία $A(2,1)$ και $B(5,2)$, τα οποία είναι και τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, είναι οι ακόλουθες:

6ο ΓΕΛ Αθηνών



γ) Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g όταν $x \epsilon (2, 5)$.

Εναλλακτική – αλγεβρική – προσέγγιση:

Επιλύουμε την ανίσωση $\sqrt{x-1} > \frac{x+1}{3}$, με $x \geq 1$.

Ακολουθώντας τα βήματα επίλυσης της αντίστοιχης εξίσωσης που έγιναν στο α) ερώτημα, έχουμε:

$$3\sqrt{x-1} > x+1 \overset{x \geq 1}{\Longleftrightarrow} 9(x-1) > x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 < 0$$

Αφού ο συντελεστής του x^2 είναι θετικός και $x_1 = 2,\ x_2 = 5$, έχουμε ότι το τριώνυμο είναι αρνητικό όταν το x βρίσκεται μεταξύ των ριζών του. Επομένως $x \epsilon (2, 5)$.

δ) Είναι: $\sqrt{ln10 - 1} > \frac{1+ln10}{3} \Leftrightarrow f(ln10) > g(ln10)$.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $2 < ln10 < 5 \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} e^2 < e^{ln10} < e^5 \Leftrightarrow e^2 < 10 < e^5$.

Πραγματικά είναι: $e < 3 \Leftrightarrow e^2 < 3^2 < 10$ και $e > 2 \Leftrightarrow e^5 > 2^5 > 10$.

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

15

ΘΕΜΑ 4

Η μονάδα μέτρησης της έντασης του ήχου είναι το ένα Watt ανά τετραγωνικό μέτρο $(1W/m^2)$. Στο ανθρώπινο αυτί, η ελάχιστη ένταση που γίνεται αντιληπτή είναι $10^{-12}\ w/m^2$. Για να μετρήσουμε την στάθμη της έντασης ενός ήχου, χρησιμοποιούμε την κλίμακα Decibel (Db). Το επίπεδο της στάθμης σε Db δίνεται από τη σχέση $D = 10 \cdot log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ όπου I_0 η ελάχιστη αντιληπτή ένταση και I η ένταση του ήχου.

α) Να βρείτε το επίπεδο των Db που παράγει ένα μαχητικό αεροσκάφος, αν γνωρίζουμε ότι η ένταση του ήχου του είναι $100\ w/m^2$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι μια αύξηση του επιπέδου στάθμης οποιουδήποτε ήχου κατά 20 Db αντιστοιχεί σε ήχο έντασης 100 φορές μεγαλύτερης.

(Μονάδες 10)

γ) Το όριο πόνου του ανθρώπινου αυτιού λόγω έντασης ήχου είναι 120 Db. Η έκθεση σε ήχους πάνω από 120 Db μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα ακοής ή κώφωση. Ποια είναι η αντίστοιχη ένταση ήχου στο όριο του πόνου για τον άνθρωπο;

(Μονάδες 7)

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

15 A

ΛΥΣΗ

α) Είναι $D = 10 \cdot log\left(\frac{100}{10 - 12}\right) = 10 \cdot log(10^2 \cdot 10^{12}) = 10 \cdot log(10^{14}) = 10 \cdot 14 = 140$ Db.

β) Είναι $D_2 - D_1 = 20$, οπότε $10 \cdot log\left(\frac{I_2}{10 - 12}\right) - 10 \cdot log\left(\frac{I_1}{10 - 12}\right) = 20$, άρα

$log(10^{12} I_2) - log(10^{12} I_1) = 2 \Leftrightarrow log\left(\frac{10^{12} I_2}{10^{12} I_1}\right) = 2 \Leftrightarrow log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{I_2}{I_1} = 10^2$.

Ώστε $I_2 = 100 \cdot I_1$.

γ) Έχουμε $120 = 10 \cdot log\left(\frac{I}{10 - 12}\right) \Leftrightarrow 12 = log(I \cdot 10^{12}) \Leftrightarrow 10^{12} = I \cdot 10^{12} \Leftrightarrow I = 1\ w/m^2$

.

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

16

ΘΕΜΑ 4

α)

i. Να λύσετε την εξίσωση $x\left(e^{x}-1\right)=0$

(Μονάδες 03)

ii. Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου $x\left(e^{x}-1\right)$

(Μονάδες 06)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x\left(e^{x}-1\right)}$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 05)

ii. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0), f(\ln 2)$ και $f(-\ln 2)$.

(Μονάδες 06)

iii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παρακάτω ισχυρισμός: « η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x\left(e^{x}-1\right)}$ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της». Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 05)

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

16 Α

ΛΥΣΗ

α)

i. Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
x\left(e^{x}-1\right)=0 &\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } e^{x}-1=0\\
&\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } e^{x}=1\\
&\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } e^{x}=e^{0}\\
&\Leftrightarrow x=0
\end{aligned}
$$

ii. Από το ερώτημα (i) γνωρίζουμε ότι κάθε παράγοντας του γινομένου $x\left(e^{x}-1\right)$ έχει ρίζα το 0. Ακόμη είναι $e^{x}-1>0 \Leftrightarrow e^{x}>1 \Leftrightarrow e^{x}>e^{0} \Leftrightarrow x>0$ και $e^{x}-1<0 \Leftrightarrow x<0$. Ο προσδιορισμός του προσήμου του γινομένου $x\left(e^{x}-1\right)$ γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
x	$-$	$+$
$e^{x}-1$	$-$	$+$
$x\left(e^{x}-1\right)$	$+$	$+$

Ώστε το γινόμενο $x\left(e^{x}-1\right)$ είναι θετικό για κάθε $x \neq 0$.

β)

i. Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνες τις τιμές του x, για τις οποίες ισχύει $x\left(e^{x}-1\right) \geq 0$. Από το ερώτημα (α) προκύπτει ότι $x\left(e^{x}-1\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$.

ii. Είναι

$$f(0)=\sqrt{0 \cdot\left(e^{0}-1\right)}=0$$

$$f(\ln 2)=\sqrt{\ln 2 \cdot\left(e^{\ln 2}-1\right)}=\sqrt{\ln 2 \cdot(2-1)}=\sqrt{\ln 2}$$

$$f(-\ln 2)=\sqrt{-\ln 2 \cdot\left(e^{-\ln 2}-1\right)}=\sqrt{-\ln 2 \cdot\left(e^{\ln \frac{1}{2}}-1\right)}=\sqrt{-\ln 2 \cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}=\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}$$

iii. Επειδή ισχύει $-\ln 2<0$ και $f(-\ln 2)>f(0)$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επειδή ισχύει $0<\ln 2$ και $f(0)<f(\ln 2)$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Τελικά, ο ισχυρισμός « η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x(e^x-1)}$ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της» είναι ψευδής.

6ο ΓΕΛ Αθηνών

17

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2$ και $\beta = \ln 3$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < \alpha < \beta$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\beta - \alpha < 1$.

(Μονάδες 13)

Δίνεται $e \cong 2.71$.

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

17 A

ΛΥΣΗ

α) Είναι $1<2<3 \Leftrightarrow \ln 1<\ln 2<\ln 3 \Leftrightarrow 0<\alpha<\beta$.

β) Είναι $\beta-\alpha=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}<\ln e=1$, οπότε πράγματι $\beta-\alpha<1$.

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

18

ΘΕΜΑ 3

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$ και $g(x) = 5^{1-x}$, $x \in R$. Μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $H\left(0, \frac{1}{5}\right)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

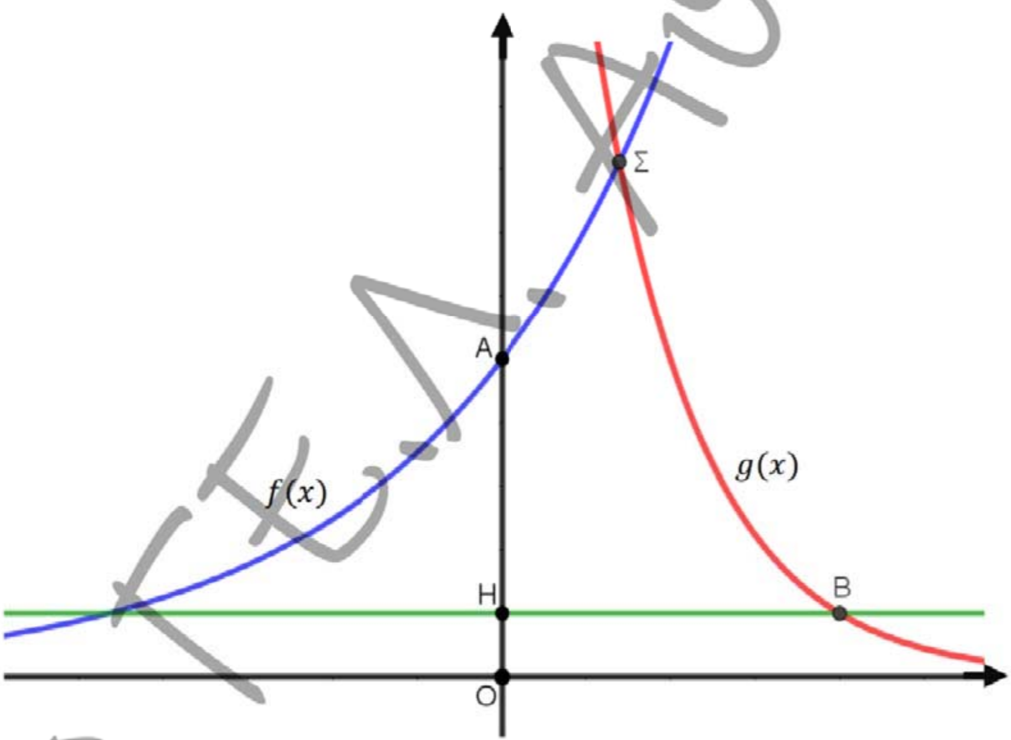
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Σ.

(Μονάδες 10)

γ) Αν είναι x_B, x_Σ οι τετμημένες των σημείων B, Σ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $x_B - x_\Sigma = log20$.

(Μονάδες 7)



6ο ΓΕΛ Αθηνών

18 A

ΛΥΣΗ

α) Το σημείο Α έχει τετμημένη μηδέν και τεταγμένη $f(0) = 2^0 = 1$, έτσι είναι $A(0,1)$.

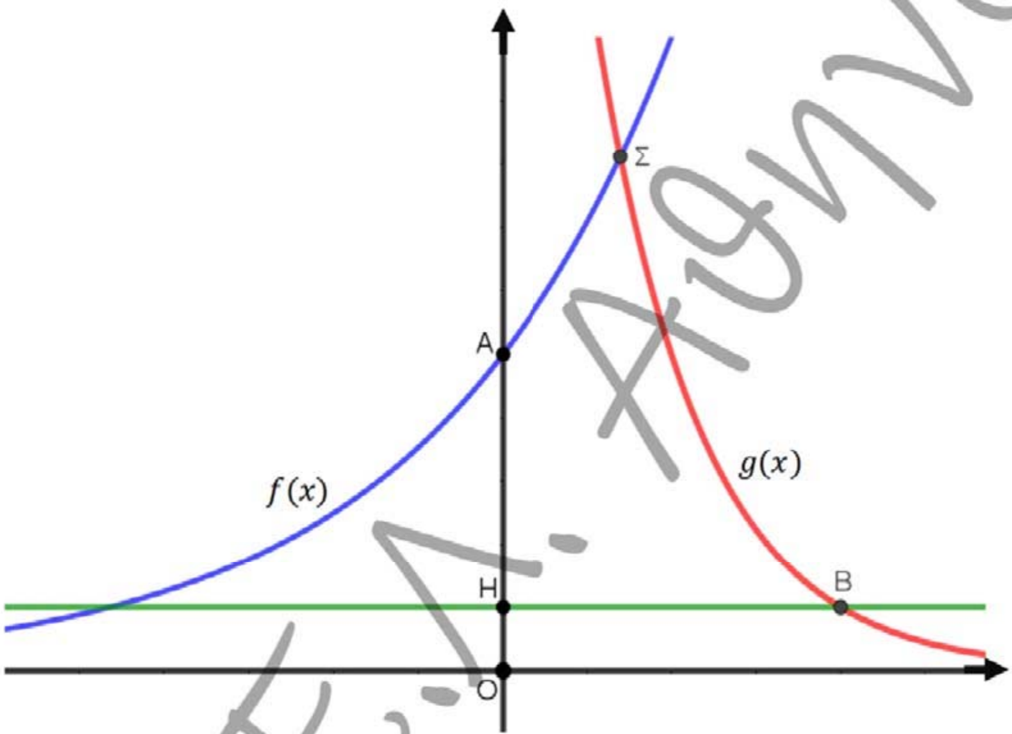
Το σημείο Β έχει τεταγμένη $\frac{1}{5}$ και τετμημένη x για την οποία ισχύει $g(x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5^{1-x} = 5^{-1}$.

Άρα $1 - x = -1$, έτσι $x = 2$. Ώστε $B(2, \frac{1}{5})$.

β) Το σημείο Σ έχει τετμημένη x ώστε $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2^x = 5^{1-x} \Leftrightarrow 2^x = \frac{5}{5^x} \Leftrightarrow$

$2^x \cdot 5^x = 5$. Έτσι $10^x = 5$ άρα $x = log5$.

γ) Είναι $x_B - x_\Sigma = 2 - \log 5 = \log(10^2) - \log 5 = \log\left(\frac{100}{5}\right) = \log 20$.



6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

19

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+x$, με $\alpha,\beta\in R$ και $\alpha\neq 0$, το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

α) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=0$.

(Μονάδες 6)

γ) Με $\alpha=-1$ και $\beta=0$,

i. να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$.

(Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι $P(\log\sqrt{10})>0$.

(Μονάδες 6)

6ο ΓΕΛ Αθηνών

19 A

ΛΥΣΗ

α) Είναι $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+x=x\left(\alpha x^2+\beta x+1\right)$, οπότε έχει μία ρίζα τη $x=0$. Συνεπώς οι άλλες δύο ακέραιες ρίζες, θα είναι ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+1$, που επειδή έχει ακέραιους συντελεστές, θα πρέπει οι δύο αυτές ακέραιες ρίζες να είναι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή του 1. Δεδομένου ότι οι μόνοι διαιρέτες του 1 είναι το 1 και το -1, συμπεραίνουμε ότι οι άλλες δύο ακέραιες ρίζες είναι το 1 και το -1.

Τελικά το $P(x)$ έχει ρίζες τους αριθμούς 0 , 1 και -1.

β) Είναι $P(1)=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta+1=0$ (1).

Επίσης $P(-1)=0 \Leftrightarrow -\alpha+\beta-1=0$ (2).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε ότι $2\beta=0 \Leftrightarrow \beta=0$ και με αντικατάσταση στην (1) έχουμε ότι $\alpha=-1$.

γ) Με $\alpha=-1$ και $\beta=0$ είναι $P(x)=-x^3+x=x(1-x^2)$

i. Το πρόσημό του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Συνεπώς η ανίσωση $P(x)>0$ αληθεύει για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

ii. Είναι $\log\sqrt{10}=\log 10^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\log 10=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$, οπότε $P(\log\sqrt{10})=P(\frac{1}{2})>0$, αφού όπως δείξαμε παραπάνω $P(x)>0$ για $x\in(0,1)$.

6ο ΓΕΛ Αθηνών

20

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = e^{lne}x^3 + 4x^2 ln\sqrt{e} + 2$.

α) Να δείξετε ότι $P(x) = ex^3 + 2x^2 + 2$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία ε: $y = ex + 4$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία ε: $y = ex + 4$.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης: $P(e) - e^2 - 4$.

(Μονάδες 4)

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

20 Α

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $P(x) = e^{lne}x^3 + 4x^2 ln\sqrt{e} + 2 = ex^3 + 4x^2 lne^{\frac{1}{2}} + 2 =$

$$= ex^3 + 4x^2 \cdot \frac{1}{2} lne + 2 = ex^3 + 2x^2 + 2.$$

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία ε: $y = ex + 4$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$P(x) - (ex + 4) = 0 \Leftrightarrow ex^3 + 2x^2 + 2 - ex - 4 = 0 \Leftrightarrow ex^3 + 2x^2 - ex - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2(ex + 2) - (ex + 2) = 0 \Leftrightarrow (ex + 2) \cdot (x^2 - 1) = 0.$

Άρα οι τετμημένες των σημείων τομής είναι: $x = 1$, $x = -1$ και $x = -\frac{2}{e}$.

γ) Για να βρούμε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία ε: $y = ex + 4$ θα λύσουμε την ανίσωση:

$P(x) - (ex + 4) > 0 \Leftrightarrow (ex + 2) \cdot (x^2 - 1) > 0.$

Οι ρίζες του $(ex + 2) \cdot (x^2 - 1)$ είναι $x = 1$, $x = -1$ και $x = -\frac{2}{e}$.

Το πρόσημο του $(ex + 2) \cdot (x^2 - 1)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{2}{e}$		1		$+\infty$
$(ex + 2) \cdot (x^2 - 1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in (-1, -\frac{2}{e}) \cup (1, +\infty)$.

δ) Παρατηρούμε ότι το $P(e) - e^2 - 4$ είναι η τιμή του $P(x) - (ex + 4)$ για $x = e$.

Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα θα έχουμε $P(e) - e^2 - 4 > 0$, αφού $e > 1$.

6ο ΓΕΛ Αθηνών

21

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-9x^2+(\alpha-2)x-6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

(Μονάδες 6)

β) Για $\alpha=15$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x):\left(x^2-3x+2\right)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 6)

ii. αν $P(x)=\left(x^2-3x+2\right)\left(2x-3\right)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

(Μονάδες 7)

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2)<0$.

(Μονάδες 6)

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

21 A

ΛΥΣΗ

α) Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$, θα ισχύει ότι $P(1)=0$.

Είναι $P(1)=0 \Leftrightarrow 2-9+\alpha-2-6=0 \Leftrightarrow \alpha=15$.

β) Για $\alpha=15$ έχουμε $P(x)=2x^3-9x^2+13x-6$.

i. Η διαίρεση $P(x):\left(x^2-3x+2\right)$ φαίνεται παρακάτω.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3-9x^2+13x-6 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2}
-2x^3+6x^2-4x\phantom{{}-6} & 2x-3 \\ \cline{1-1}
-3x^2+9x-6 & \\
3x^2-9x+6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι η εξής: $P(x)=\left(x^2-3x+2\right)(2x-3)$.

ii. Αξιοποιώντας την παραπάνω ταυτότητα διαίρεσης έχουμε :

$P(x)<0 \Leftrightarrow \left(x^2-3x+2\right)(2x-3)<0$

Το πρόσημο του πολυωνύμου $P(x)=\left(x^2-3x+2\right)(2x-3)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	-		-	0	+	
$2x-3$		-		-	0	+		+	
$P(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Συνεπώς η ανίσωση $P(x)<0 \Leftrightarrow \left(x^2-3x+2\right)(2x-3)<0$ αληθεύει για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup\left(\frac{3}{2},2\right)$.

iii. Είναι $\ln 2<\ln e \Leftrightarrow \ln 2<1$ οπότε αφού δείξαμε παραπάνω ότι $P(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup\left(\frac{3}{2},2\right)$, είναι $P(\ln 2)<0$.

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

22

ΘΕΜΑ 4

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2-1$ δίνει πηλίκο $3x-2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=1$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $P(\log 5)\neq 1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

(Μονάδες 5)

6ο ΓΕΛ Αθηνών

22 A

ΛΥΣΗ

α) Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε $P(x)=(4x^2-1)(3x-2)+1$, οπότε η ζητούμενη εξίσωση γίνεται ισοδύναμα

$$P(x)=1 \Leftrightarrow (4x^2-1)(3x-2)+1=1 \Leftrightarrow (4x^2-1)(3x-2)=0$$

Εύκολα πλέον βρίσκουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί $\pm\frac{1}{2}$ και $\frac{2}{3}$.

β) Δείξαμε στο α) ότι αριθμοί που ικανοποιούν την εξίσωση $P(x)=1$ είναι οι $\pm\frac{1}{2}$ και $\frac{2}{3}$.

Συνεπώς για να ήταν $P(\log 5)=1$, θα έπρεπε $\log 5=\frac{1}{2}$ ή $\log 5=-\frac{1}{2}$ ή $\log 5=\frac{2}{3}$.

Όμως $\log 5 \neq -\frac{1}{2}$ αφού $5>1 \Leftrightarrow \log 5>0$.

Επίσης $\log 5=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 5=10^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 5=\sqrt{10}$ το οποίο είναι άτοπο.

Τέλος $\log 5=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 5=10^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow 5=\sqrt[3]{10^2}$ το οποίο επίσης είναι άτοπο.

Συνεπώς $P(\log 5)\neq 1$.

γ) Είναι $P(x)=(4x^2-1)(3x-2)+1$, οπότε $P(-1)=(4(-1)^2-1)(3(-1)-2)+1=-14$ και $P(0)=(-1)(-2)+1=3$.

Αφού οι τιμές $P(-1), P(0)$ είναι ετερόσημες, η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,0)$.

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

23

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2$, $\beta = \ln 4$, $\gamma = \ln 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $2\beta = \alpha + \gamma$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\beta + \gamma = 5\alpha$

(Μονάδες 13)

6ο ΓΕΛ Αθηνών

23 A

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$\alpha+\gamma=\ln 2+\ln 8=\ln(2\cdot 8)=\ln 16=\ln 4^2=2\ln 4=2\beta$.

β) Είναι $\beta+\gamma=\ln 4+\ln 8=\ln(4\cdot 8)=\ln 32=\ln 2^5=5\ln 2=5\alpha$.

Σημείωση :

Οι αριθμοί $2,4,8$ είναι με αυτή τη σειρά διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αφού $4^2=2\cdot 8$, ενώ οι αριθμοί $\alpha=\ln 2$, $\beta=\ln 4$, $\gamma=\ln 8$ είναι με αυτή τη σειρά διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αφού όπως δείξαμε $2\beta=\alpha+\gamma$.

Γενικά αν α,β,γ είναι με αυτή τη σειρά θετικοί διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε οι αριθμοί $\ln\alpha$, $\ln\beta$, $\ln\gamma$ είναι με αυτή τη σειρά διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

24

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A=\log_4 3+\log_4 α-\log_4 β$, όπου α, β θετικοί αριθμοί.

α) Να αποδείξετε ότι $A=\log_4 \frac{3α}{β}$

(Μονάδες 13)

β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $3α=16β$, να βρείτε την τιμή της παράστασης A.

(Μονάδες 12)

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

24 A

ΛΥΣΗ

α) Από τις ιδιότητες των λογαρίθμων, έχουμε:

$$A = \log_4 3 + \log_4 \alpha - \log_4 \beta = \log_4 (3\alpha) - \log_4 \beta = \log_4 \frac{3\alpha}{\beta}.$$

β) Η παράσταση Α με $3\alpha = 16\beta$, γράφεται:

$$A = \log_4 \frac{16\beta}{\beta} = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2\log_4 4 = 2.$$

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

25

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2)+f(\ln\frac{1}{2})$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta)+f(\eta\mu(\pi+\theta))=0$, για κάθε $\theta\in R$ με $\eta\mu\theta\neq 0$.

(Μονάδες 7)

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

25 A

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή του x για την οποία ισχύει $x \neq 0$.

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathrm{A} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β) Για κάθε $x \in \mathrm{A}$ και $-x \in \mathrm{A}$. Επίσης,

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2 + 1}{-x} = -\dfrac{x^2 + 1}{x} = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathrm{A}$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι περιττή, δηλαδή η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $\mathrm{O}(0,0)$.

γ) Είναι $\ln\dfrac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$ και αφού f περιττή είναι $f(\ln\dfrac{1}{2}) = f(-\ln 2) = -f(\ln 2)$,

δηλαδή $f(\ln 2) + f(\ln\dfrac{1}{2}) = 0$.

δ) Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ είναι $\eta\mu(\pi + \theta) = -\eta\mu\theta$ και αφού f περιττή είναι $f(\eta\mu(\pi + \theta)) = f(-\eta\mu\theta) = -f(\eta\mu\theta)$, δηλαδή $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi + \theta)) = 0$.

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών