

Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

1

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x-1)$.

(Μονάδες 6)

β) $P(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$.

(Μονάδες 7)

γ) $1 < \log 20 < 2$.

(Μονάδες 6)

δ) $P(\log 20) < 0$.

(Μονάδες 6)

1 Α

ΛΥΣΗ

α) Είναι $P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$ που σημαίνει ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$. Το σχήμα Horner για τη διαίρεση $P(x) : (x - 1)$ φαίνεται παρακάτω:

1	-2	-1	2	1
	1	-1	-2	
1	-1	-2	0	

Συνεπώς $P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 2)$.

β) Το πρόσημο του $P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 2)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$x - 1$	-	-	+	+	+
$x^2 - x - 2$	+	+	-	-	+
$(x - 1)(x^2 - x - 2)$	-	+	-	+	+

Συνεπώς $P(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$.

γ) Είναι $10 < 20 < 100 \Rightarrow \log 10 < \log 20 < \log 100 \Rightarrow 1 < \log 20 < 2$.

δ) Αφού $P(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$ και $1 < \log 20 < 2$ συμπεραίνουμε ότι $P(\log 20) < 0$.

2

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \sqrt{10^x - 2}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (\log 2, +\infty)$.

(Μονάδες 07)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \log \sqrt{\frac{10^x}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{\frac{10^x}{3}} = \sqrt{10^x - 2}$ με $x \in (\log 2, +\infty)$.

(Μονάδες 09)

ii. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων, των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 09)

2 A

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνα μόνο τα x για τα οποία ισχύει $10^x - 2 > 0 \Leftrightarrow 10^x > 2 \Leftrightarrow x > \log 2$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (\log 2, +\infty)$.

β)

i. Με $x \in (\log 2, +\infty)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{10^x}{3}} &= \sqrt{10^x - 2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{10^x}{3}}\right)^2 = (\sqrt{10^x - 2})^2 \Leftrightarrow \\ \frac{10^x}{3} &= 10^x - 2 \Leftrightarrow 10^x = 3 \cdot 10^x - 6 \Leftrightarrow \\ 6 &= 2 \cdot 10^x \Leftrightarrow 10^x = 3 \Leftrightarrow x = \log 3\end{aligned}$$

ii. Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g , επιλύουμε την εξίσωση $g(x) = f(x)$ για τα κοινά x στα οποία αυτές ορίζονται, δηλαδή για $x \in (\log 2, +\infty)$.

Είναι:

$$g(x) = f(x) \Leftrightarrow \log \sqrt{\frac{10^x}{3}} = \log \sqrt{10^x - 2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{10^x}{3}} = \sqrt{10^x - 2} \stackrel{(\beta i)}{\Leftrightarrow} x = \log 3 \text{ και}$$

$$y = f(\log 3) = \log \sqrt{10^{\log 3} - 2} = \log \sqrt{3 - 2} = \log 1 = 0$$

Έτσι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα κοινό σημείο, το $(\log 3, 0)$.

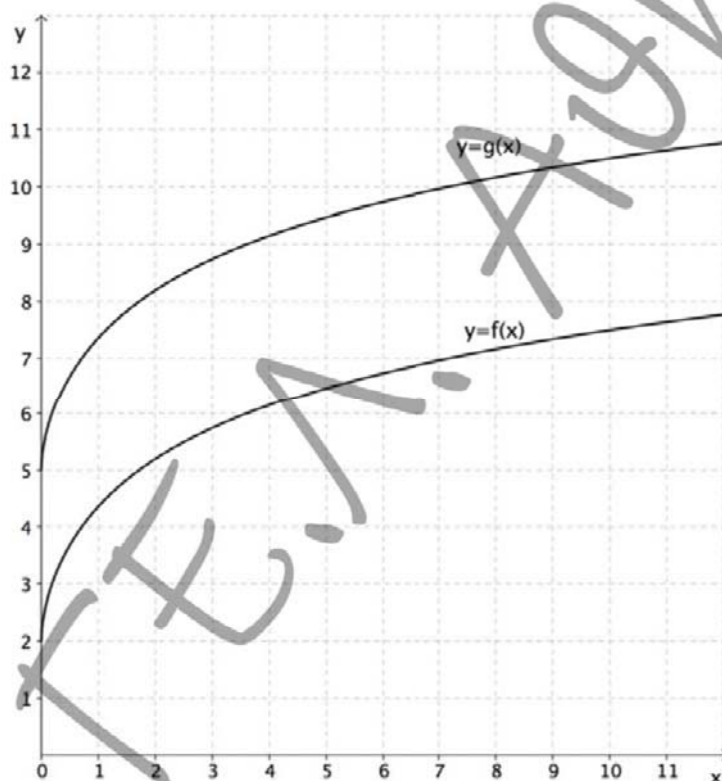
3 ΘΕΜΑ 4

Ένας ερευνητής πραγματοποίησε μια στατιστική μελέτη για την μεταβολή του βάρους των Ελληνοπαίδων. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, όπου παριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g . Στον οριζόντιο άξονα $x'x$ καταγράφεται η ηλικία σε μήνες και στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ το βάρος σε κιλά. Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει τις ελάχιστες φυσιολογικές τιμές και η γραφική παράσταση της g τις μέγιστες φυσιολογικές τιμές που μπορεί να έχει ένα παιδί κατά την διάρκεια του πρώτου έτους της ηλικίας του.

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο

$$f(x) = a\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) + \beta, \quad x \geq 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

και ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(e^2 - 1, 2\sqrt{2} + 4)$ ενώ για την γραφική παράσταση της g , γνωρίζουμε ότι προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.



α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 2$. Στην συνέχεια να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g . (Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε γραφικά (κατά προσέγγιση) την ηλικία κατά την οποία η ελάχιστη φυσιολογική τιμή του βάρους ενός παιδιού είναι τα 5 κιλά. Στη συνέχεια, με αλγεβρικό τρόπο, να βρείτε με ακρίβεια την ηλικία. (Μονάδες 8)

γ) Το βάρος ενός παιδιού στο τέλος του 12^ο μήνα βρέθηκε 13 κιλά. Πως θα το χαρακτηρίζατε:

υπέρβαρο, φυσιολογικό ή λιποβαρές; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με αλγεβρικό τρόπο. (Μονάδες 7)

3 A

ΛΥΣΗ

$$\alpha) A(0,2) \in C_f \Rightarrow f(0) = 2 \Rightarrow \beta = 2 \text{ και}$$

$$B(e^2 - 1, 2\sqrt{2} + 4) \in C_f \Rightarrow f(e^2 - 1) = 2\sqrt{2} + 4 \Rightarrow$$

$$a\sqrt{\ln(e^2 - 1 + 1)} + \ln(e^2 - 1 + 1) + 2 = 2\sqrt{2} + 4 \Rightarrow a\sqrt{2} + 4 = 2\sqrt{2} + 4 \Rightarrow a = 2$$

$$\text{Επομένως } f(x) = 2\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) + 2 \text{ και}$$

$$g(x) = f(x) + 3 = 2\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) + 5.$$

β) Η $y = 5$ τέμνει την C_f σε ένα σημείο $\Gamma(x, 5)$ που από τη γραφική παράσταση φαίνεται

ότι $\frac{3}{2} < x < 2$. Αλγεβρικά:

$$f(x) = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) + 2 = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) - 3 = 0 \quad (1),$$

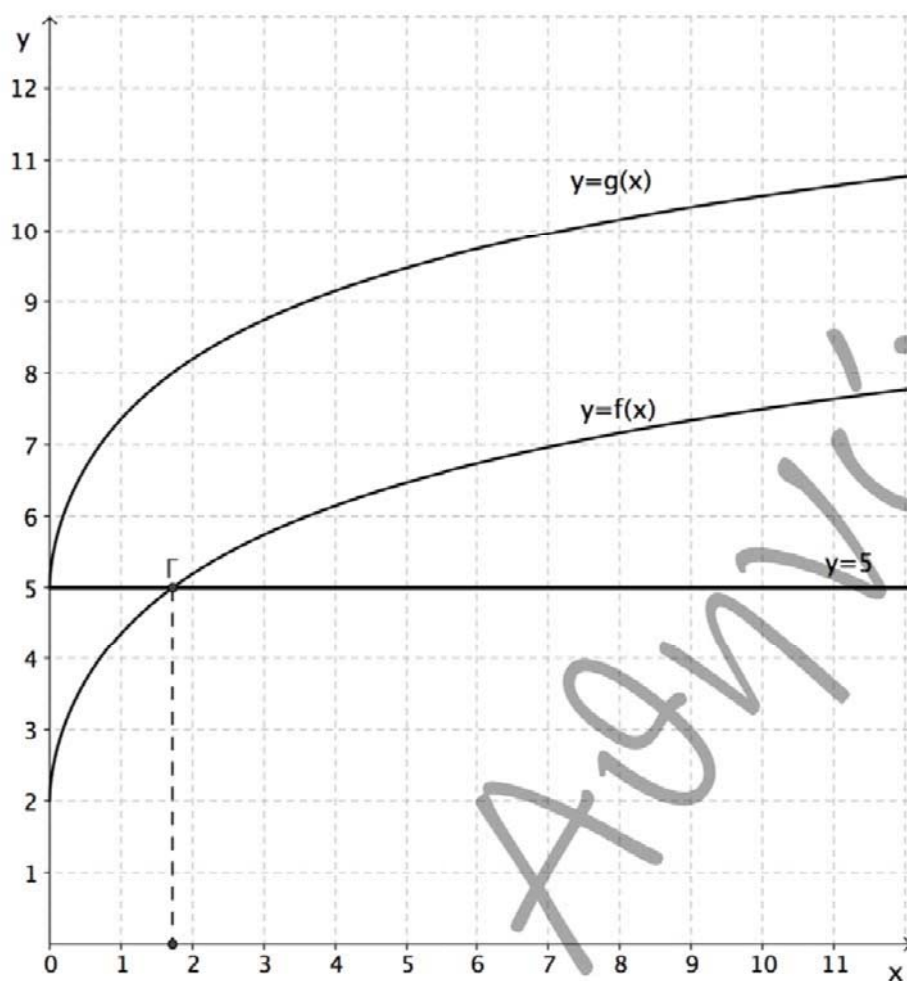
$$\text{θέτω } \omega = \sqrt{\ln(x+1)} \quad (2) \text{ και η επιλύουσα της (1) είναι: } \omega^2 + 2\omega - 3 = 0,$$

με ρίζες $\omega_1 = 1$ και $\omega_2 = -3$.

Για $\omega = \omega_2$, η (2) είναι αδύνατη.

Για $\omega = \omega_1$, έχουμε

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{\ln(x+1)} = 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 1 \Leftrightarrow x+1 = 3 \Leftrightarrow x = e - 1.$$



γ) Παρατηρούμε από την C_g ότι για $x=12$, $g(12) < 13$, δηλαδή το παιδί είναι υπέρβαρο.

Για να το δικαιολογήσουμε αυτό αλγεβρικά αρκεί να δείξουμε ότι

$$g(12) - 13 < 0 \quad \text{ή} \quad 2\sqrt{\ln 13} + \ln 13 - 8 < 0.$$

Γι' αυτό, θέτουμε $\omega = \sqrt{\ln 13} > 0$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι το ω επαληθεύει την ανίσωση $x^2 + 2x - 8 < 0$ (3).

Το τριώνυμο $x^2 + 2x - 8$ έχει ρίζες $x_1 = -4$ και $x_2 = 2$.

$$(3) \Leftrightarrow (x+4)(x-2) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4, 2).$$

Επομένως αρκεί $\omega < 2$, ή $\ln 13 < 4$, ή $13 < e^4$ που ισχύει.

4

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = 2 \log 5 + 3 \log 2 - \log 20$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(e^x - 1) = A$.

(Μονάδες 13)

60 ΤΕΛΟΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

4 Α

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$A = 2 \log 5 + 3 \log 2 - \log 20 = \log 5^2 + \log 2^3 - \log 20 = \log 25 + \log 8 - \log 20 = \log \frac{25 \cdot 8}{20} = \log 10 = 1$$

β) Για $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ είναι

$$\ln(e^x - 1) = A \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x - 1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x - 1 = e \Leftrightarrow$$

$$e^x = e + 1 \Leftrightarrow$$

$$x = \ln(e + 1)$$

που είναι δεκτή αφού $\ln(e + 1) > \ln 1 \Leftrightarrow \ln(e + 1) > 0$.

5

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - ax^2 + 7x - \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x - 3$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$ είναι $v = -16$, τότε:

α) Να υπολογισθούν οι τιμές των α, β .

(Μονάδες 06)

Αν είναι $\alpha = 5$, $\beta = 3$,

β) να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 07)

γ) να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 06)

δ) Αν $P(\ln k) < 0$, τότε να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού k .

(Μονάδες 06)

5 A

ΛΥΣΗ

α) Το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x - 3$ αν και μόνο αν $P(3) = 0$.

Επίσης, αφού το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$ είναι $v = -16$, τότε $P(-1) = -16$.

$$\text{Είναι: } \begin{cases} P(3) = 0 \\ P(-1) = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\alpha + \beta = 48 \\ \alpha + \beta = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\alpha = 40 \\ \alpha + \beta = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

Επομένως, το πολυώνυμο γίνεται: $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$.

β) Η εξίσωση: $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$ (1)

Εφαρμόζοντας το σχήμα Horner για $\rho = 3$, είναι:

1	-5	7	-3	$\rho = 3$
	3	-6	3	
1	-2	1	0	

Άρα $P(x) = (x - 3)(x^2 - 2x + 1) = (x - 3)(x - 1)^2$.

Η (1) ισοδύναμα γράφεται: $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = 1$.

γ) Είναι

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 1)^2 < 0 \stackrel{(x-1)^2 \geq 0}{\Leftrightarrow} x - 3 < 0 \text{ και } x \neq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (1, 3).$$

δ) Έστω $P(\ln k) < 0$ (2).

Καταρχάς πρέπει $k > 0$.

Θέτοντας $\ln k = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ η ανίσωση (2) γίνεται ισοδύναμα

$$P(\lambda) < 0 \stackrel{\gamma)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda < 3 \\ \lambda \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln k < 3 \\ \ln k \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln k < \ln e^3 \\ \ln k \neq \ln e \end{cases} \stackrel{\ln x \uparrow}{\Leftrightarrow} \begin{cases} k < e^3 \\ k \neq e \end{cases}.$$

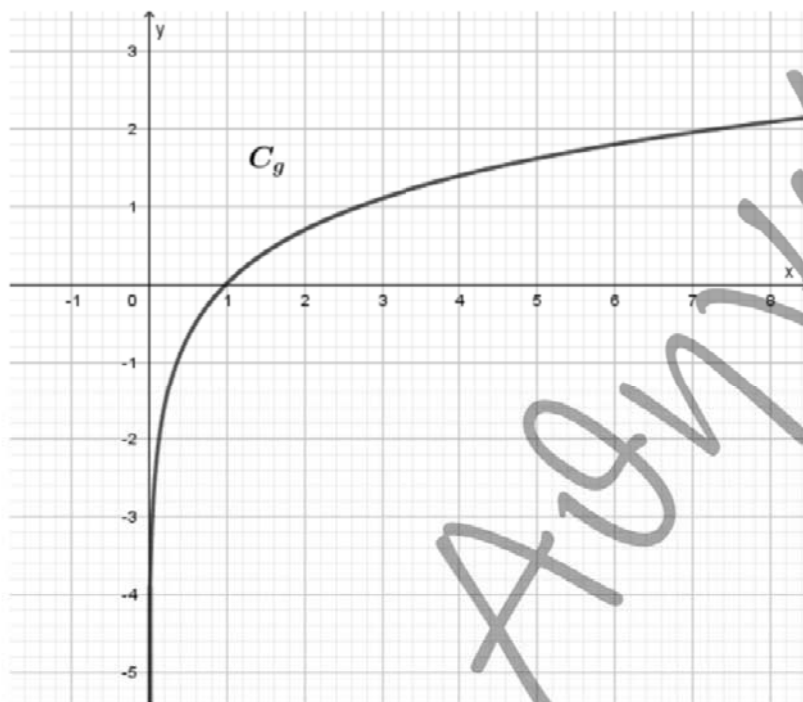
Επομένως, είναι: $k \in (0, e) \cup (e, e^3)$.

6

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x - 1)$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = \ln x, \quad x > 0.$$



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 05)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε το διάστημα, στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 12)

6 A

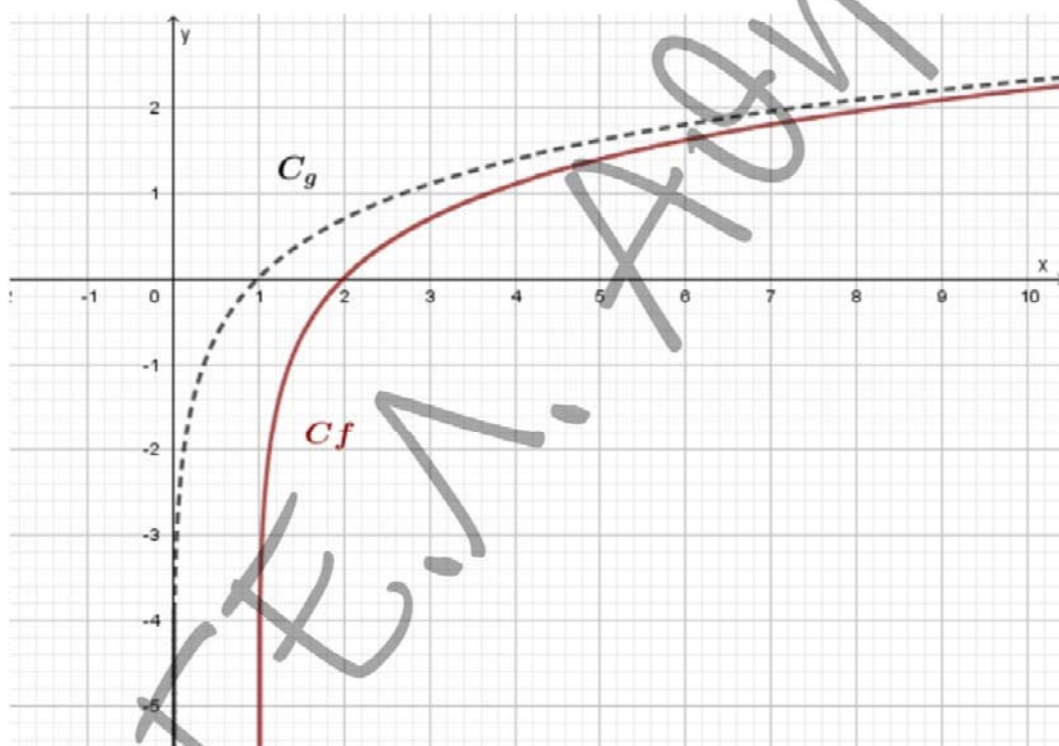
ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνα μόνο τα x για τα οποία ισχύει: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Επομένως, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $A = (1, +\infty)$.

β) Είναι $f(x) = g(x - 1)$.

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά. Έτσι, το σημείο τομής της με τον άξονα $x'x$ θα είναι το $(2,0)$ και η κατακόρυφη ασύμπτωτη $x = 0$ της C_g θα είναι η $x = 1$ για την C_f . Δηλαδή, είναι:



γ) Α' Τρόπος: (η αλγεβρική επίλυση)

Αρκεί να λύσουμε την ανίσωση $f(x) < 0$, με $x > 1$.

Είναι λοιπόν: $f(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x - 1) < 0 \Leftrightarrow \ln(x - 1) < \ln 1 \xrightarrow{\ln x \uparrow} x - 1 < 1 \Leftrightarrow x < 2$.

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ όταν $x \in (1,2)$.

Β' Τρόπος: (η γραφική επίλυση)

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί η γραφική παράσταση του προηγούμενου ερωτήματος.

7

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 12)

β) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(1 - x) = \ln(x^2 + 1)$.

(Μονάδες 13)

7 A

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ως λογαριθμική ορίζεται για $1 - x > 0$ τότε $x < 1$.

Επομένως, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $D_f = (-\infty, 1)$.

β) Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα των λογαρίθμων για $x < 1$ και θα λύσουμε την λογαριθμική εξίσωση.

Άρα,

$$\begin{aligned}\ln(1 - x) = \ln(x^2 + 1) &\Leftrightarrow 1 - x = x^2 + 1 \Leftrightarrow -x = x^2 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1.\end{aligned}$$

Οι δύο λύσεις που βρήκαμε είναι δεκτές, διότι $x_1 = -1 < 1$ και $x_2 = 0 < 1$.

8

ΘΕΜΑ 2

Δίνετε η συνάρτηση $f(x) = \ln(x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

γ) Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

8 A

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ως λογαριθμική ορίζεται για $x - 1 > 0$, δηλαδή για $x > 1$.

Επομένως, πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $D_f = (1, +\infty)$.

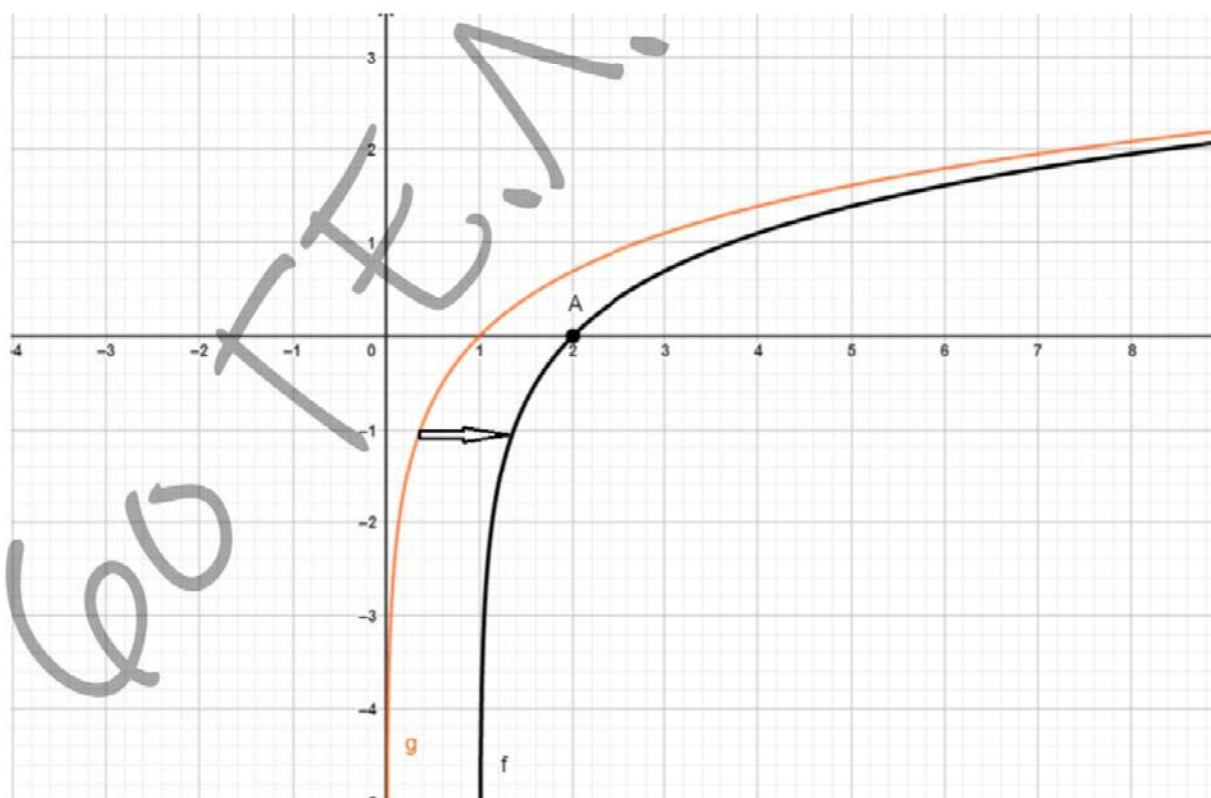
β) Για να βρούμε τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ έχουμε $y = 0$, δηλαδή αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x - 1) = \ln 1 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(2,0)$.

γ) Παρατηρούμε πως η συνάρτηση $f(x) = \ln(x - 1)$ προκύπτει από την συνάρτηση

$g(x) = \ln x$ με οριζόντια μετατόπιση προς τα δεξιά κατά μία μονάδα. Αρχικά κάνουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης g που γνωρίζουμε πως τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $(1,0)$ και είναι γνησίως αύξουσα. Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση της f χρειαζόμαστε τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ που βρήκαμε στα προηγούμενα ζητούμενο, δηλαδή το $A(2,0)$, και με παράλληλη οριζόντια μετατόπιση προς τα δεξιά κατά μία μονάδα έχουμε το παρακάτω σχήμα:



9

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log x$ και $g(x) = \ln(x - 1)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $\log x = 3$.

(Μονάδες 7)

ii. $\ln(x - 1) = 1$.

(Μονάδες 8)

9 A

ΛΥΣΗ

α) Οι συναρτήσεις f και g ως λογαριθμικές ορίζονται για $x > 0$ και $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ αντίστοιχα.

Επομένως, πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $D_f = (0, +\infty)$ και πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $D_g = (1, +\infty)$.

β) i. Για να βρούμε το $x > 0$ (περιορισμός από το α) ερώτημα) τέτοιο ώστε $\log x = 3$ θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του λογαρίθμου με βάση 10. Άρα $\log x = 3 \Leftrightarrow x = 10^3 \Leftrightarrow x = 1000$.

ii. Ομοίως με το ερώτημα i. θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του λογαρίθμου με βάση e για $x > 1$.

Άρα, $\ln(x - 1) = 1 \Leftrightarrow x - 1 = e^1 \Leftrightarrow x = e + 1$.

Η λύση γίνεται δεκτή διότι $e + 1 > 1$.

10

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log x$ και $g(x) = \log(x + 2)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $f(x) = 2$.

(Μονάδες 7)

ii. $g(x) = 2f(x)$.

(Μονάδες 8)

10 A

ΛΥΣΗ

α) Οι συναρτήσεις f και g ως λογαριθμικές ορίζονται για $x > 0$ και $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$ αντίστοιχα. Επομένως, πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $D_f = (0, +\infty)$ και πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $D_g = (-2, +\infty)$.

β) i. Η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\log x = 2$. Για να βρούμε το $x > 0$ (περιορισμός από το α) ερώτημα) τέτοιο ώστε $\log x = 2$ θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του λογαρίθμου με βάση 10. Άρα $\log x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 \Leftrightarrow x = 100$.

ii. Η εξίσωση $g(x) = 2f(x)$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\log(x + 2) = 2\log x$.

Η $\log(x + 2) = 2\log x$ ορίζεται για $x > 0$ και $x > -2$, άρα για $x > 0$.

Η εξίσωση $\log(x + 2) = 2\log x$ ισοδύναμα γράφεται $\log(x + 2) = \log x^2$.

Συνεπώς, $x + 2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$. Το τριώνυμο έχει λύσεις -1 και 2. Μόνο η $x=2$ είναι δεκτή.

11

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1-x}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 12)

60 ΤΕΛΟΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

11 A

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για τις τιμές του x για τις οποίες $x \neq 0$ και $\frac{1-x}{x} > 0$ ή ισοδύναμα $(1-x)x > 0$. Ο πίνακας προσήμων του τριωνύμου $P(x) = (1-x)x$ είναι ο ακόλουθος:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	-	0	+	+
$1-x$	+	+	0	-
$P(x)$	-	0	+	-

Άρα, $(1-x)x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$. Οπότε, το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $(0,1)$.

β) Για $0 < x < 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\Leftrightarrow \ln \frac{1-x}{x} = 0 \Leftrightarrow \\
 \ln \frac{1-x}{x} &= \ln 1 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} = 1 \Leftrightarrow \\
 1-x &= x \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow \\
 x &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Η λύση $x = \frac{1}{2}$ γίνεται δεκτή διότι ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

12

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα x' .

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x - 1$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι αν $\alpha > 0$, τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y = x + \alpha$.

(Μονάδες 8)

12 A

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται μόνο όταν $e^x - 1 > 0$. Είναι:

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Άρα $A = (0, +\infty)$.

Η τετμημένη του κοινού σημείου της γραφικής παράστασης C_f της f με τον $x'x$ είναι η λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$. Είναι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = \ln 1 \Leftrightarrow e^x - 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

Επομένως η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(\ln 2, 0)$.

β) Με $x > 0$ έχουμε:

$$f(x) = x - 1 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = x - 1 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = \ln e^{x-1} \Leftrightarrow e^x - 1 = e^{x-1}$$

$$\Leftrightarrow e^{x+1} - e = e^x \Leftrightarrow (e-1)e^x = e \Leftrightarrow e^x = \frac{e}{e-1} \Leftrightarrow x = \ln \frac{e}{e-1} \Leftrightarrow x = 1 - \ln(e-1)$$

που περιέχεται στο $A = (0, +\infty)$, αφού

$$e > e-1 \Rightarrow \ln e > \ln(e-1) \Rightarrow 1 - \ln(e-1) > 0$$

γ) Έστω $\alpha > 0$. Αν υποθέσουμε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y = x + \alpha$, τότε η εξίσωση $f(x) = x + \alpha$ έχει λύση στο A . Είναι:

$$f(x) = x + \alpha \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = \ln e^{x+\alpha} \Leftrightarrow e^x - 1 = e^{x+\alpha} \Leftrightarrow e^{x+\alpha} - e^x = -1$$

που είναι άτοπο, αφού με $\alpha > 0$ ισχύει

$$x + \alpha > x \Rightarrow e^{x+\alpha} > e^x \Rightarrow e^{x+\alpha} - e^x > 0.$$

Επομένως, αν $\alpha > 0$ τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y = x + \alpha$.

13

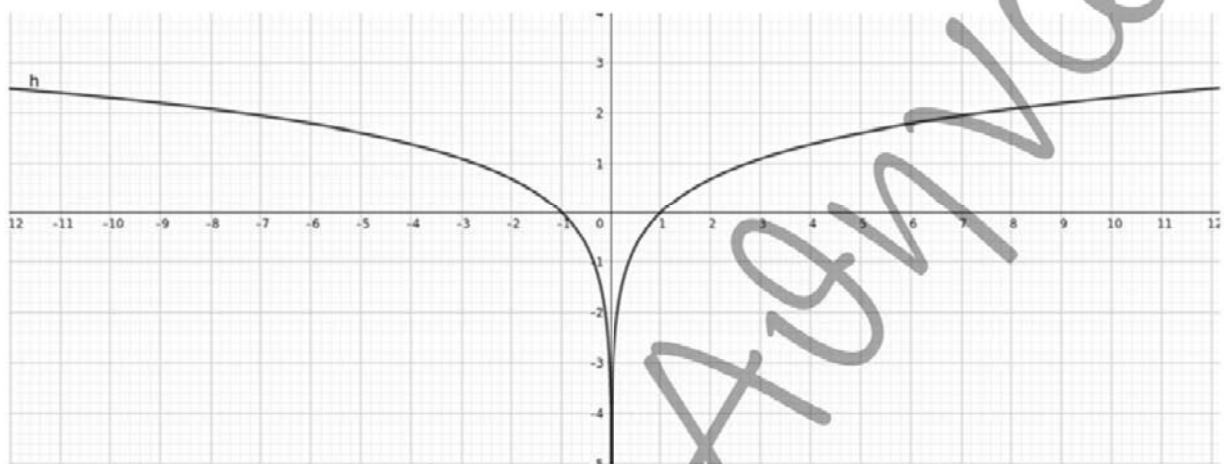
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1}{|x|}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -\ln|x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(Μονάδες 10)

β) i) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.



Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

ii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και $g(x) = \ln x$, $x > 0$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο για $x = 1$.

(Μονάδες 8)

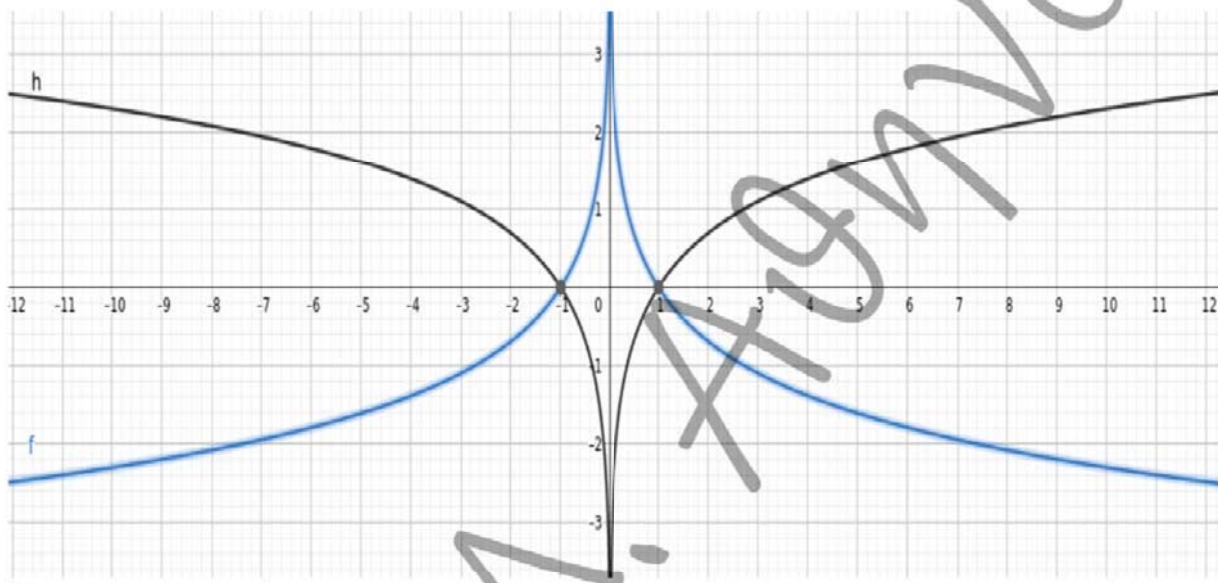
13 A

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι

$$f(x) = \ln \frac{1}{|x|} = \ln 1 - \ln|x| = 0 - \ln|x| = -\ln|x|.$$

β) i) Η γραφική παράσταση της $f(x) = -\ln|x|$ είναι η συμμετρική της γραφικής παράστασης της $h(x) = \ln|x|$ ως προς τον άξονα x' και φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

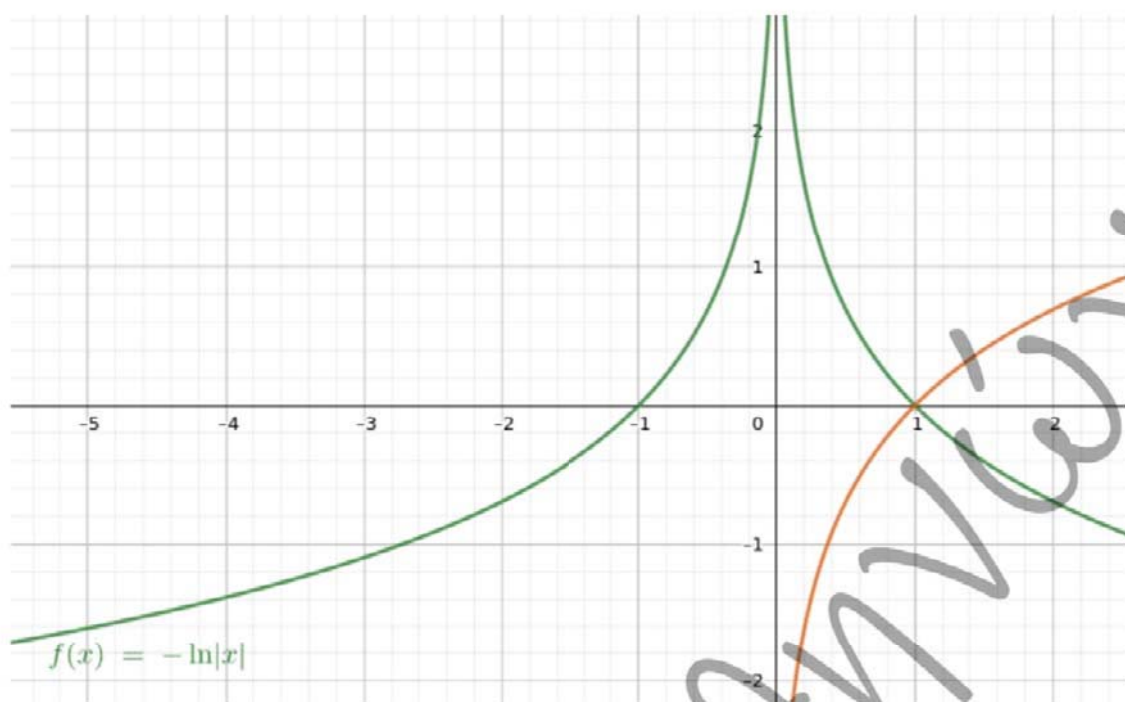


ii)

Οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο, διότι, πρέπει να ισχύει:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -\ln|x| = \ln x, x > 0 \Leftrightarrow -\ln x = \ln x \Leftrightarrow 0 = 2\ln x \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Αυτό φαίνεται και στο επόμενο σχήμα:



14

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = \ln(\ln e) + \log(\log 10^{10})$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. $\log 10^{10} = 10$

(Μονάδες 6)

ii. $A = 1$.

(Μονάδες 6)

β) Να λυθεί η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = A$.

(Μονάδες 13)

14 A

ΛΥΣΗ

α)

i. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x > 0$, $a > 0$ και $a \neq 1$ ισχύει ότι $\log_a a^x = x$.

Οπότε για $x = a = 10$ έχουμε ότι $\log 10^{10} = 10$.

Εναλλακτικά, $\log 10^{10} = 10 \cdot \log 10 = 10 \cdot 1 = 10$.

ii. Είναι $A = \ln(\ln e) + \log(\log 10^{10}) = \ln 1 + \log 10 = 0 + 1 = 1$.

β) Η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = A$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 1 > 0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ισοδύναμα έχουμε :

$$\log(x^2 + 1) = A \Leftrightarrow \log(x^2 + 1) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 10 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

15

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x$, $x > 0$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(4) = \frac{1}{3}f(8)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα $x'x$ και πάνω.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε:

i. Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία.

(Μονάδες 4)

ii. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία.

(Μονάδες 5)

15 A

ΛΥΣΗ

α) Από τον τύπο της συνάρτησης σε συνδυασμό με τις ιδιότητες των λογαρίθμων, έχουμε:

$$f(2) + f(4) = \ln 2 + 3\ln 4 = \ln 2 + 3\ln 2^2 = \ln 2 + 6\ln 2 = 7\ln 2$$

και

$$\frac{1}{3}f(8) = \frac{1}{3} \cdot 7\ln 8 = \frac{1}{3} \cdot 7\ln 2^3 = \frac{3}{3}(7\ln 2) = 7\ln 2$$

$$\text{οπότε } f(2) + f(4) = \frac{1}{3}f(8).$$

β) Διακρίνουμε τις παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

- Αν $0 < x \leq 1$, τότε $x - 1 \leq 0$ και $\ln x \leq 0$, οπότε $(x - 1)\ln x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$.
- Αν $x > 1$, τότε $x - 1 > 0$ και $\ln x > 0$, οπότε $(x - 1)\ln x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, ισχύει $f(x) \geq 0$, οπότε η γραφική παράσταση της f είναι από τον άξονα $x'x$ και πάνω.

γ) i. Οι τετμημένες των κοινών σημείων προσδιορίζονται από τη λύση της εξίσωσης

$f(x) = 2x - 2$, $x > 0$. Είναι:

$$f(x) = 2x - 2 \Leftrightarrow (x - 1)\ln x = 2(x - 1) \Leftrightarrow (x - 1)(\ln x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ή } \ln x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = e^2$$

Εύκολα πλέον βρίσκουμε ότι τα κοινά σημεία είναι τα $A(1, 0)$ και $B(e^2, 2e^2 - 2)$.

ii. Η C_f είναι κάτω από την ευθεία (ε) για όλες τις θετικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$f(x) < 2(x - 1)$. Είναι:

$$f(x) < 2(x - 1) \Leftrightarrow (x - 1)\ln x - 2(x - 1) < 0 \Leftrightarrow (x - 1)(\ln x - 2) < 0$$

Το πρόσημο κάθε παράγοντα και του γινομένου φαίνεται στον επόμενο πίνακα.

x	0	1	e^2	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+	+
$\ln x - 2$	-	-	0	+
$(x - 1)(\ln x - 2)$	+	0	-	+

Από την τελευταία γραμμή του πίνακα συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία (ε) για κάθε x με $x \in (1, e^2)$

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 2 \log 6 - \log 12 \text{ και } B = \log 5 + \log 2$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = \log 3$ και $B = 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $A < B$.

(Μονάδες 05)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\log x < 1$.

(Μονάδες 08)

16 A

ΛΥΣΗ

α) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες λογαρίθμων, έχουμε:

$$A = 2 \log 6 - \log 12 = \log 6^2 - \log 12 = \log 36 - \log 12 = \log \frac{36}{12} = \log 3$$

$$B = \log 5 + \log 2 = \log(5 \cdot 2) = \log 10 = 1$$

β) Είναι:

$$A < B \Leftrightarrow \log 3 < 1 \Leftrightarrow \log 3 < \log 10 \xrightarrow{\log x \uparrow} 3 < 10$$

Επομένως, αποδείξαμε την ζητούμενη σχέση.

γ) Η ανίσωση αυτή ορίζεται εφόσον $x > 0$. Τότε έχουμε ισοδύναμα:

$$\log x < 1 \Leftrightarrow \log x < \log 10 \xrightarrow{\log x \text{ γν. αύξουσα}} x < 10.$$

Επομένως, είναι $0 < x < 10$.

17

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{a}{a+5}\right)^x$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 8)

γ) Για τη μεγαλύτερη τιμή του $a \in \mathbb{Z}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα εκθετική με βάση ακέραιο αριθμό, να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + f(x+1) = 14$$

(Μονάδες 9)

17 A

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η εκθετική συνάρτηση πρέπει η βάση

$$\frac{a}{a+5} > 0 \Leftrightarrow a(a+5) > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty, -5) \cup (0, +\infty).$$

Επιπλέον πρέπει $\frac{a}{a+5} \neq 1$. Όμως, αν $\frac{a}{a+5} = 1 \Leftrightarrow a = a+5 \Leftrightarrow 0 = 5$, το οποίο δε συμβαίνει για

κανέναν πραγματικό αριθμό a .

β) Για να είναι η συνάρτηση γνησίως αύξουσα πρέπει

$$\frac{a}{a+5} > 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+5} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{a-a-5}{a+5} > 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{a+5} > 0 \Leftrightarrow a+5 < 0 \Leftrightarrow a < -5.$$

γ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα όταν $a < -5$.

Η μεγαλύτερη ακέραια τιμή του $a = -6$, για την οποία η συνάρτηση f είναι εκθετική και

$$\text{γνησίως αύξουσα και γίνεται } f(x) = \left(\frac{-6}{-6+5} \right)^x = 6^x.$$

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$f(x) + f(x+1) = 14 \Leftrightarrow 6^x + 6^{x+1} = 14 \Leftrightarrow 6^x + 6 \cdot 6^x = 14 \Leftrightarrow 7 \cdot 6^x = 14 \Leftrightarrow 6^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_6 2.$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η εξίσωση:

$$\log(x+1) = -\log 2 - \log(1-x) \quad (1).$$

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\log(x+1) = \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log(1-x)$.

(Μονάδες 15)

18 A

Λύση

α) Για να ορίζεται η εξίσωση (1) πρέπει να είναι $x+1>0$ και $1-x>0$.

Ισοδύναμα πρέπει $x>-1$ και $x<1$. Οπότε η εξίσωση ορίζεται για $x \in (-1, 1)$.

β) Για $x \in (-1, 1)$ η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $\log(x+1) = \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log(1-x) \Leftrightarrow$

$$\log(x+1) + \log(1-x) = \log(1) - \log(2) \Leftrightarrow \log[(x+1)(1-x)] = \log\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow (x+1)(1-x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$1-x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x^2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \in (-1, 1) \text{ δεκτές και οι δύο λύσεις.}$$

19

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = e^{\ln 2} + 10^{2 \log \sqrt{5}}$. Να αποδείξετε ότι

α) $A = 7$.

(Μονάδες 12)

β) $0 < \log A < 1$.

(Μονάδες 13)

60 ΤΕΛΟΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

19 A

ΛΥΣΗ

α) Είναι $A = e^{\ln 2} + 10^{2 \log \sqrt{5}} = e^{\ln 2} + 10^{\log(\sqrt{5})^2} = e^{\ln 2} + 10^{\log 5} = 2 + 5 = 7.$

β) Είναι $1 < 7 < 10 \Leftrightarrow \log 1 < \log 7 < \log 10 \Leftrightarrow 0 < \log A < 1.$

60 FEV. Αθηνών

20

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = \ln \sqrt{e} + \log \sqrt[3]{100}$. Να αποδείξετε ότι

α) $A = \frac{7}{6}$.

(Μονάδες 12)

β) $0 < \ln A < 1$.

(Μονάδες 13)

Δίνεται $e \approx 2.71$.

20 A

ΛΥΣΗ

α) Είναι $A = \ln \sqrt{e} + \log \sqrt[3]{100} = \ln e^{\frac{1}{2}} + \log 10^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$.

β) Είναι $1 < \frac{7}{6} < e \Leftrightarrow \ln 1 < \ln \frac{7}{6} < \ln e \Leftrightarrow 0 < \ln A < 1$.

60 TEN. Αθηνών

21

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$ είναι το $(-6, 2) \cup (2, +\infty)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα xx' .

(Μονάδες 9)

21 Α

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $\omega^2 + 4\omega - 12$ έχει ρίζες τις $\omega = 2$ και $\omega = -6$. Για $\omega \neq 2$ και $\omega \neq -6$ έχουμε ισοδύναμα

$$\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0 \Leftrightarrow \frac{(\omega - 2)(\omega^2 + 2\omega + 4)}{(\omega - 2)(\omega + 6)} > 0 \Leftrightarrow (\omega^2 + 2\omega + 4)(\omega + 6) > 0 \text{ και επειδή}$$

το τριώνυμο $\omega^2 + 2\omega + 4$ έχει αρνητική διακρίνουσα θα είναι για κάθε $\omega \in \mathbb{R}$ ομόσημο του συντελεστή του ω^2 , δηλαδή θετικό, έχουμε τελικά ότι $\omega + 6 > 0 \Leftrightarrow \omega > -6$.

Το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης $\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$ είναι το $(-6, 2) \cup (2, +\infty)$.

β) Η συνάρτηση ορίζεται για τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$\frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} > 0. \text{ Αν θέσουμε } e^x = \omega \text{ η τελευταία ανίσωση γίνεται}$$

$$\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0 \text{ που όπως δείξαμε στο α) αληθεύει για κάθε } \omega \in (-6, 2) \cup (2, +\infty).$$

Συνεπώς θα πρέπει $e^x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \ln 2$ και $e^x > -6$ που ισχύει. Τελικά το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$.

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφική παράσταση της με τον άξονα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ με $x \neq \ln 2$. Είναι

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \\ \ln \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} &= \ln 1 \Leftrightarrow \\ \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} &= 1 \Leftrightarrow \\ e^{3x} - 8 &= e^{2x} + 4e^x - 12 \Leftrightarrow \\ e^{3x} - e^{2x} - 4e^x + 4 &= 0 \Leftrightarrow \\ e^{2x}(e^x - 1) - 4(e^x - 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ (e^x - 1)(e^{2x} - 4) &= 0 \Leftrightarrow \\ (e^x - 1)(e^x - 2)(e^x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς θα πρέπει $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ που είναι δεκτή ή

$$e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2 \text{ που απορρίπτεται ή}$$

$$e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = -2 \text{ που είναι αδύνατη.}$$

Τελικά το μοναδικό σημείο τομής της γραφική παράσταση της f με τον άξονα xx' είναι το $(0, 0)$.

Ένα ζεστό ρόφημα τη στιγμή που σερβίρεται, σε θερμοκρασία του περιβάλλοντος που είναι $T_a = 25^\circ\text{C}$, έχει θερμοκρασία $T_0 = 73^\circ\text{C}$. Η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από t λεπτά δίνεται, σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, από την συνάρτηση

$$T(t) = T_a + ce^{-\kappa t}$$

όπου όπου c , κ κατάλληλες σταθερές και $t \in [0, 60]$. Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από 10 λεπτά είναι 61°C , τότε:

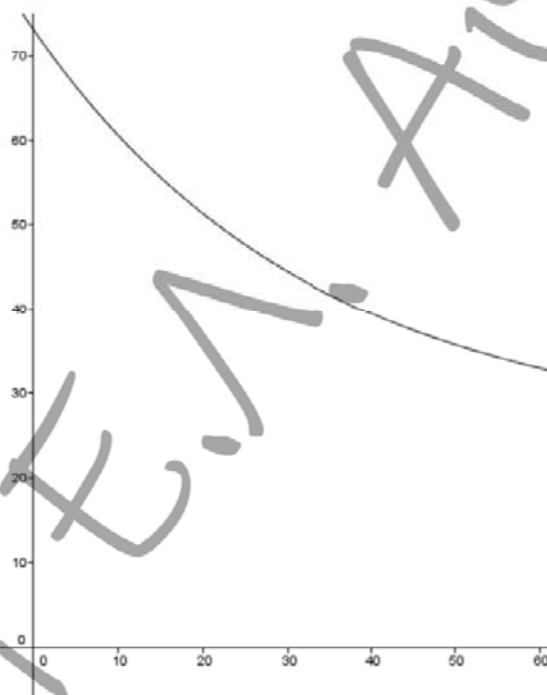
α) Να αποδείξετε ότι $c = 48$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την σταθερά κ . (Θεωρήστε $\ln 0,75 = -0,3$).

(Μονάδες 8)

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t)$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



γ) Να βρείτε την θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμα. (Θεωρήστε $e^{-1,2} = 0,3$).

(Μονάδες 5)

δ) Αν θεωρήσουμε ότι ο καταναλωτής έχει την αίσθηση του ζεστού όταν η θερμοκρασία του ροφήματος είναι μεγαλύτερη από 40°C , να αιτιολογήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση και το αποτέλεσμα του ερωτήματος γ), γιατί πριν περάσουν 40 λεπτά ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό.

(Μονάδες 6)

22 Α

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$T(0) = T_{\alpha} + ce^{-k \cdot 0} \Leftrightarrow 73 = 25 + ce^0 \Leftrightarrow 73 = 25 + c \Leftrightarrow c = 48$$

β) Δεδομένου ότι $T(10) = 61$, έχουμε:

$$61 = 25 + 48e^{-10k} \Leftrightarrow 48e^{-10k} = 36 \Leftrightarrow e^{-10k} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow e^{-10k} = 0,75 \Leftrightarrow -10k = \ln(0,75) \Leftrightarrow -10k = -0,3 \Leftrightarrow k = 0,03$$

Επομένως η σταθερά k είναι ίση με $0,03$.

γ) Η θερμοκρασία $T(40)$ του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμά του είναι

$$\begin{aligned} T(40) &= 25 + 48e^{-0,03 \cdot 40} = 25 + 48e^{-1,2} = 25 + 48 \cdot 0,3 \\ &= 25 + 14,4 = 39,4 \end{aligned}$$

Επομένως η θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμά του είναι $39,4^{\circ}\text{C}$.

δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t) = 25 + 48e^{-0,3t}$, όπως φαίνεται και στο δοσμένο σχήμα είναι γνησίως φθίνουσα και από το ερώτημα γ) ισχύει $T(40) = 39,4$, οπότε αν $T(t_0) = 40$, τότε $T(t_0) > T(40)$ και λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης παίρνουμε $t_0 < 40$.

Επομένως, πριν περάσουν 40 λεπτά, η θερμοκρασία του ροφήματος έχει ήδη πέσει κάτω από τους 40° και ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό.

23

ΘΕΜΑ 4

Ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού λέμε τον χρόνο που απαιτείται για να διασπασθεί η μισή από την αρχική του ποσότητα, οπότε να απομείνει το 50% από αυτή.

Αν Q_0 είναι η αρχική ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού, τότε η ποσότητα $Q(t)$ που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο $Q(t) = Q_0 e^{ct}$, όπου c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το υλικό.

α) Να αποδείξετε ότι ο χρόνος ημιζωής t' δίνεται από τον τύπο $t' = -\frac{\ln 2}{c}$.

(Μονάδες 8)

Το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας -14 έχει χρόνο ημιζωής 5730 χρόνια.

β) Να αποδείξετε ότι η ποσότητα του άνθρακα -14 που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730} t}$$

(Μονάδες 8)

γ) Κατά την εξέταση ενός οστού που ανακάλυψαν οι παλαιοντολόγοι διαπιστώθηκε ότι έχει απομείνει σ' αυτό το 25% της ποσότητας του άνθρακα -14 που περιείχε αρχικά. Να βρείτε την ηλικία του οστού.

(Μονάδες 9)

23 A

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$Q(t') = \frac{1}{2} Q_0 \Leftrightarrow Q_0 e^{ct'} = \frac{1}{2} Q_0 \Leftrightarrow e^{ct'} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow ct' = \ln \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow ct' = -\ln 2 \Leftrightarrow t' = -\frac{\ln 2}{c}$$

που είναι το ζητούμενο.

β) Για το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας -14 ισχύει $t' = 5730$, οπότε έχουμε

$$-\frac{\ln 2}{c} = 5730 \Leftrightarrow 5730c = -\ln 2 \Leftrightarrow c = -\frac{\ln 2}{5730}$$

οπότε ο τύπος που μας δίνει την ποσότητα του άνθρακα -14 που απομένει t χρόνια μετά δίνεται από τον τύπο

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730} t}$$

γ) Αν στον προηγούμενο τύπο θέσουμε $Q(t) = \frac{25}{100} Q_0 = \frac{1}{4} Q_0$, έχουμε:

$$Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730} t} = \frac{1}{4} Q_0 \Leftrightarrow e^{-\frac{\ln 2}{5730} t} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{\ln 2}{5730} t = \ln \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow -\frac{\ln 2}{5730} t = -\ln 4 \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{5730} t = 2\ln 2 \Leftrightarrow t = 11460$$

οπότε το οστό εκτιμάται ότι είναι ηλικίας 11.460 χρόνων.

24

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = 1 - \log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $1 - \log 2 = \log 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

(Μονάδες 13)

60 FEV. Αθηνών

24 A

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$1 - \log 2 = \log 10 - \log 2 = \log \frac{10}{2} = \log 5$$

β) Επειδή $x^2 + 1 > 0$ η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Με τη βοήθεια του ερωτήματος, α) έχουμε:

$$\log(x^2 + 1) = 1 - \log 2 \Leftrightarrow \log(x^2 + 1) = \log 5 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 2$$

Άρα η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς -2 και 2 .

25

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log x, x > 0$.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(100), f(\sqrt{10})$

(Μονάδες 12)

β) Για $x > 1$, να επιλύσετε την εξίσωση $f(x+1) + f(x-1) = \log 10 - \log 5$.

(Μονάδες 13)

25 A

ΛΥΣΗ

α) $f(100) = \log 100 = 2$ διότι η βάση του λογαρίθμου είναι το 10, άρα από τον ορισμό έχουμε $10^2 = 100$.

$$f(\sqrt{10}) = \log(\sqrt{10}) = \log(10^{1/2}) = \frac{1}{2}.$$

β) Η εξίσωση γράφεται $\log(x+1) + \log(x-1) = \log 10 - \log 5 \Leftrightarrow$

$$\log[(x+1)(x-1)] = \log\left(\frac{10}{5}\right) \Leftrightarrow \log(x^2 - 1^2) = \log 2.$$

Ωστε $x^2 - 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 3$. Αλλά $x > 1$, οπότε $x = \sqrt{3}$. (η λύση $x = -\sqrt{3}$ απορρίπτεται).

26

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 7)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

(Μονάδες 10)

26 A

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται μόνο όταν ισχύει $x+1 > 0$. Είναι: $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = (-1, +\infty)$

β) Με $x=0$ έχουμε:

$$f(0) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$$

Άρα η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή O .

γ) Με $x > -1$ έχουμε:

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 2 \Leftrightarrow x+1 = e^2 \Leftrightarrow x = e^2 - 1$$

που είναι αποδεκτή αφού περιέχεται στο διάστημα $A = (-1, +\infty)$.

27

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε το είδος της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 6)

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x$, με $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ μπορεί να περιγράψει το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου $A(1,0)$, $B(x,0)$ και $\Gamma(x,\ln x)$.

(Μονάδες 10)

27 Α

ΛΥΣΗ

α) Αφού το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών, για τους οποίους το $f(x)$ έχει νόημα, είναι:

$$|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Επομένως $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β) Είναι: $f(-x) = \ln|-x| = \ln|x| = f(x)$.

Έτσι για κάθε $x \in D_f$ το $-x \in D_f$ και ισχύει $f(-x) = f(x)$.

Επομένως η συνάρτηση είναι άρτια και ως εκ τούτου συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

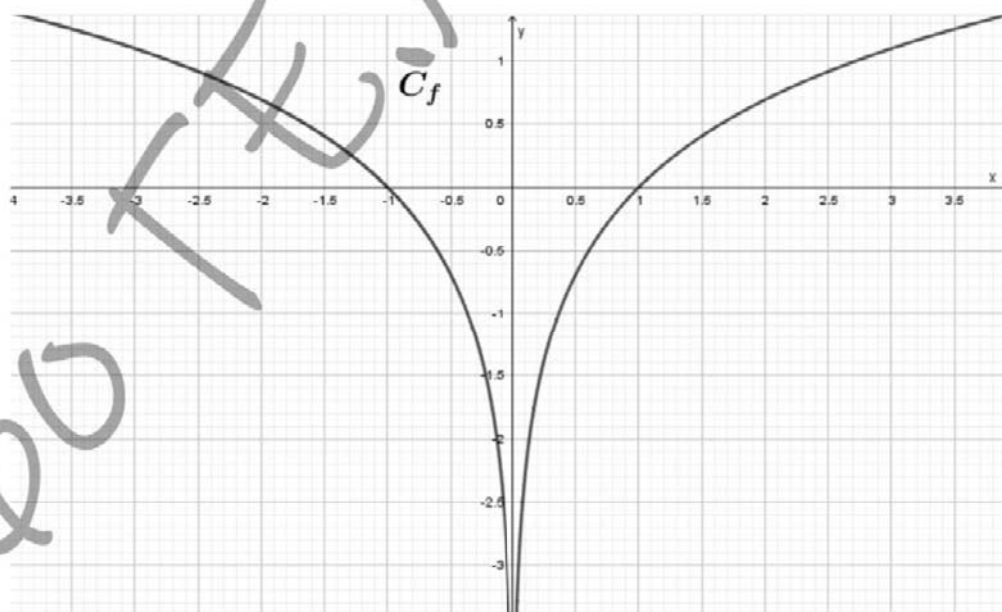
γ) Είναι: $f(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{αν } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f αποτελείται από δύο κλάδους.

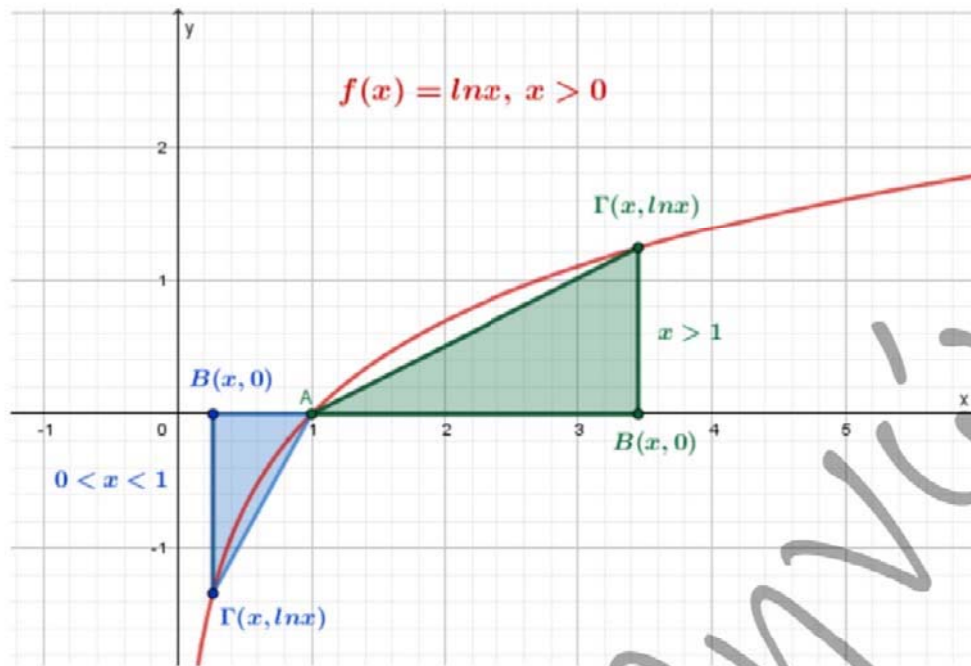
Αν $x > 0$, τότε έχουμε τη γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = \ln x$.

Αν $x < 0$, παίρνουμε την συμμετρική καμπύλη της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = \ln x$ ως προς τον άξονα $y'y$.

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η ακόλουθη:



δ) Υπάρχουν δύο περιπτώσεις, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



➤ Αν $x > 1$:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB)(B\Gamma), \text{ όπου } (AB) = |x - 1| = x - 1 \text{ και } (B\Gamma) = |\ln x| = \ln x.$$

$$\text{Άρα } (AB\Gamma) = \frac{(x-1)\ln x}{2}.$$

➤ Αν $0 < x < 1$:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB)(B\Gamma), \text{ όπου } (AB) = |x - 1| = 1 - x \text{ και } (B\Gamma) = |\ln x| = -\ln x.$$

$$\text{Άρα } (AB\Gamma) = \frac{(x-1)\ln x}{2}.$$

Επομένως η ζητούμενη συνάρτηση είναι:

$$E(x) = \frac{(x-1)\ln x}{2}, \quad x \in (0,1) \cup (1,+\infty).$$

Στην Αστρονομία, οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με την λαμπρότητα τους με βάση την σχέση $m - M = 5 \cdot \log\left(\frac{d}{10}\right)$, (I) όπου d η απόσταση του αστέρα από τον παρατηρητή, m είναι το φαινόμενο μέγεθός τους (το πόσο λαμπροί φαίνονται) και M το απόλυτο μέγεθός τους. Το απόλυτο μέγεθος ορίζεται να είναι το φαινόμενο μέγεθος σε απόσταση 10 parsec από τον παρατηρητή, όπου 1 parsec είναι η μονάδα μέτρησης της απόστασης d και ισούται με $3,26$ έτη φωτός $= 30,9 \cdot 10^{12} \text{ Km}$.

α) Για ποιες τιμές της απόστασης d το φαινόμενο μέγεθος ενός αστέρα είναι μικρότερο από το απόλυτο μέγεθός του;

(Μονάδες 7)

β) Ένας αστέρας έχει φαινόμενο μέγεθος $m = 1,157$ και βρίσκεται σε απόσταση $d = 100$ parsec από έναν παρατηρητή. Ποιο είναι το απόλυτο μέγεθος αυτού του αστέρα;

(Μονάδες 6)

γ) Να επιλύσετε την σχέση (I) ως προς d .

(Μονάδες 7)

δ) Ο αστέρας Betelgeuse έχει φαινόμενο μέγεθος 0,46 και απόλυτο μέγεθος $-5,14$. Ποια είναι η απόστασή του από τον παρατηρητή; Δίνεται ότι $\sqrt[25]{10^{53}} \cong 131$.

(Μονάδες 5)

28 Α

ΛΥΣΗ

α) Θέλουμε να είναι $m - M < 0 \Leftrightarrow 5 \cdot \log\left(\frac{d}{10}\right) < 0 \Leftrightarrow \log\left(\frac{d}{10}\right) < 0 \Leftrightarrow \log\left(\frac{d}{10}\right) < \log 1$
επομένως $\frac{d}{10} < 1 \Leftrightarrow d < 10$, αφού η συνάρτηση $f(x) = \log x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Έχουμε $M = m - 5 \cdot \log\left(\frac{d}{10}\right) = 1,157 - 5 \cdot \log\left(\frac{100}{10}\right) =$
 $= 1,157 - 5 \cdot \log 10 = 1,157 - 5 = -3,843$.

γ) Είναι $\log\left(\frac{d}{10}\right) = \frac{m-M}{5} \Leftrightarrow \frac{d}{10} = 10^{\frac{m-M}{5}}$, άρα $d = 10 \cdot 10^{\frac{m-M}{5}} = 10^{1+\frac{m-M}{5}} = 10^{\frac{5+m-M}{5}}$.

δ) Με χρήση της παραπάνω σχέσης, έχουμε

$$d = 10^{\frac{5+0,46+5,14}{5}} = 10^{\frac{10,6}{5}} = 10^{\frac{53}{25}} = \sqrt[25]{10^{53}} \cong 131 \text{ parsec.}$$

29

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 λίτρα ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της 1^{ης} και στο τέλος της 2^{ης} εβδομάδας.

(Μονάδες 8)

β) Ο όγκος V του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t) = V_0 \cdot \alpha^t$, όπου V_0 και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και α .

(Μονάδες 8)

γ) Αν ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη σχέση $V(t) = 10 \cdot (0,85)^t$, να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής. (Δίνεται ότι: $\log(0,5) \approx -0,3$ και $\log(0,85) \approx -0,07$).

(Μονάδες 9)

29 A

ΛΥΣΗ

α) Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο στο τέλος της 1^{ης} εβδομάδας είναι:

$$10 - \frac{15}{100} \cdot 10 = 10 \cdot (1 - 0,15) = 10 \cdot 0,85 = 8,5 \text{ λίτρα.}$$

Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο στο τέλος της 2^{ης} εβδομάδας είναι:

$$(10 \cdot 0,85) - \frac{15}{100} \cdot (10 \cdot 0,85) = (10 \cdot 0,85) \cdot (1 - 0,15) = 10 \cdot (0,85)^2 = 7,225 \text{ λίτρα.}$$

β) Η αρχική ποσότητα του υγρού στο δοχείο (δηλαδή η ποσότητα τη χρονική στιγμή $t = 0$) είναι 10 λίτρα, οπότε $V(0) = V_0 = 10$.

Από το α) ερώτημα, ο όγκος V του υγρού μετά από 1 εβδομάδα είναι $V(1) = 10 \cdot 0,85 \Leftrightarrow V_0 \cdot \alpha^1 = 10 \cdot 0,85 \Leftrightarrow 10 \cdot \alpha = 10 \cdot 0,85 \Leftrightarrow \alpha = 0,85$.

γ) Θα βρούμε μετά από πόσες εβδομάδες ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής, δηλαδή θα βρούμε τις τιμές του t ώστε:

$$V(t) < \frac{V_0}{2} \Leftrightarrow$$

$$10 \cdot (0,85)^t < \frac{10}{2} \Leftrightarrow$$

$$(0,85)^t < 0,5 \Leftrightarrow$$

$$\log(0,85)^t < \log(0,5) \Leftrightarrow$$

$$t \cdot (-0,07) < -0,3 \Leftrightarrow$$

$$t > \frac{0,3}{0,07} \Leftrightarrow t > \frac{30}{7} \Leftrightarrow t > 4\frac{2}{7}.$$

Άρα μετά από $4\frac{2}{7}$ εβδομάδες (4 εβδομάδες και 2 ημέρες) ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής.

30

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση

$$A = \ln x + \ln(x+6).$$

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$\ln x + \ln(x+6) = \ln 7.$$

(Μονάδες 15)

30 A

ΛΥΣΗ

α) Η παράσταση A ορίζεται για τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ισχύει:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \text{και} \\ x + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \text{και} \\ x > -6 \end{cases}, \text{ δηλαδή } x > 0.$$

β) Γνωρίζουμε ότι για $a > 0, a \neq 1$ και $x_1, x_2 > 0$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Οπότε για $x > 0$ έχουμε:

$$\ln x + \ln(x+6) = \ln 7 \Leftrightarrow$$

$$\ln[x \cdot (x+6)] = \ln 7 \Leftrightarrow$$

$$x \cdot (x+6) = 7 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1) \cdot (x+7) = 0 \Leftrightarrow$$

$x = 1 > 0$, που είναι δεκτή ή $x = -7$ (απορρίπτεται).

Τελικά η λύση της εξίσωσης είναι $x = 1$.

31

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(x+1) = \ln(2x)$.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x+1) > \ln(2x)$.

(Μονάδες 12)

60 T.E.A. Αθηνών

31 A

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι για $a > 0, a \neq 1$ και $x_1, x_2 > 0$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Επίσης η εξίσωση ορίζεται για $\begin{cases} x+1 > 0 \\ \text{και} \\ 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \text{και} \\ x > 0 \end{cases}$, δηλαδή $x > 0$.

Οπότε έχουμε:

$$\ln(x+1) = \ln(2x) \Leftrightarrow$$

$$x+1 = 2x \Leftrightarrow$$

$$x = 1, \text{ που είναι δεκτή γιατί } x > 0.$$

β) Η ανίσωση ορίζεται επίσης για $x > 0$. Οπότε έχουμε:

$$\ln(x+1) > \ln(2x) \Leftrightarrow x+1 > 2x \Leftrightarrow x < 1$$

Επειδή $x > 0$, η ανίσωση αληθεύει για $0 < x < 1$.

32

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο

$$P(t) = 200 \cdot e^{ct},$$

Όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος ($t=0$). Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328.

(Δίνεται ότι $\ln(1,64) \cong 0,5$ και $\ln 10 \cong 2,3$)

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $c = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

(Μονάδες 9)

32 A

ΛΥΣΗ

α) Ο αριθμός των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα ήταν $P(0) = 200 \cdot e^{c \cdot 0} = 200$ βακτήρια.

β) Έχουμε:

$$P(1) = 328 \Leftrightarrow 200 \cdot e^{c \cdot 1} = 328 \Leftrightarrow e^c = \frac{328}{200} \Leftrightarrow e^c = 1,64 \Leftrightarrow c = \ln(1,64) \Leftrightarrow c = 0,5.$$

$$\text{Άρα } c = \frac{1}{2}.$$

γ) Ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής, δηλαδή

$$10 \cdot P(0) < P(t) < 100 \cdot P(0) \Leftrightarrow$$

$$10 \cdot 200 < 200 \cdot e^{\frac{1}{2}t} < 100 \cdot 200 \Leftrightarrow$$

$$10 < e^{\frac{1}{2}t} < 100 \Leftrightarrow$$

$$\ln 10 < \ln(e^{\frac{1}{2}t}) < \ln 100 \Leftrightarrow$$

$$\ln 10 < \frac{1}{2} \cdot t < \ln 10^2 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot \ln 10 < t < 4 \cdot \ln 10 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot 2,3 < t < 4 \cdot 2,3 \Leftrightarrow$$

$$4,6 < t < 9,2.$$

Άρα το ζητούμενο χρονικό διάστημα (σε ώρες) είναι $4,6 < t < 9,2$.

ΘΕΜΑ 4

Μια ποσότητα Q ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$. Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας και μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό.

α) Να δείξετε ότι $Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε (για $t = 0$).

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

(Μονάδες 9)

33 A

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας,

δηλαδή:

$$Q(2) = \frac{1}{3} \cdot Q_0 \Leftrightarrow Q_0 \cdot e^{2c} = \frac{Q_0}{3} \Leftrightarrow (e^c)^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow e^c = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Οπότε}$$

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct} \Leftrightarrow$$

$$Q(t) = Q_0 \cdot (e^c)^t \Leftrightarrow$$

$$Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t.$$

β) Γνωρίζουμε ότι μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό ραδιενεργού υλικού και

από το α) ερώτημα γνωρίζουμε επίσης ότι $Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$. Ζητούμενη είναι η αρχική ποσότητα που θάφτηκε, δηλαδή το Q_0 .

$$\text{Επομένως: } Q(4) = 1 \Leftrightarrow Q_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow Q_0 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) = 1 \Leftrightarrow Q_0 = 9 \text{ κιλά.}$$

γ) Στα ερωτήματα α) και β) δείξαμε ότι $Q(t) = 9 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$. Έχουμε

$$Q(t) = \frac{1}{81} \Leftrightarrow$$

$$9 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t = \frac{1}{81} \Leftrightarrow$$

$$3^2 \cdot \left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^t = 3^{-4} \Leftrightarrow$$

$$3^{2-\frac{t}{2}} = 3^{-4} \Leftrightarrow$$

$$2 - \frac{t}{2} = -4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{t}{2} = 6 \Leftrightarrow t = 12.$$

Συνεπώς μετά από 12 χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

34

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x^2 + 4)$ και $g(x) = \ln x + \ln 4$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 13)

34 A

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει $x^2 + 4 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x , οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A_f = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση g ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $x > 0$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A_g = (0, +\infty)$.

β) Γνωρίζουμε ότι για $a > 0, a \neq 1$ και $x_1, x_2 > 0$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Οπότε έχουμε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$\ln(x^2 + 4) = \ln x + \ln 4 \Leftrightarrow$$

$$\ln(x^2 + 4) = \ln(4x) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 4 = 4x \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 2 > 0, \text{ δεκτή.}$$

35

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 10)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y = \ln x$.

(Μονάδες 7)

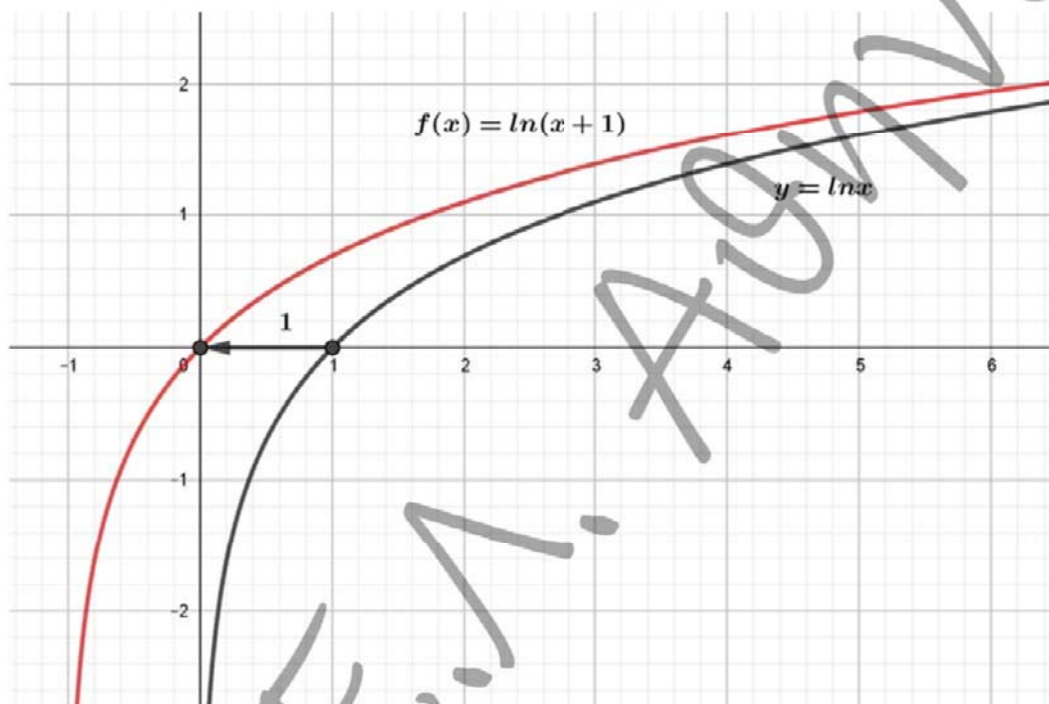
35 A

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (-1, +\infty)$.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων $(0,0)$, αφού για $x=0$, έχουμε $f(0) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$. Δεν τέμνει τον $x'x$ σε άλλο σημείο, αφού για $y=0$, έχουμε $\ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από μετατόπιση της $y = \ln x$ κατά 1 μονάδα αριστερά, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



36

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 3 \ln 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x \geq 3 \ln 2$.

(Μονάδες 9)

36 A

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $e^x - 2 > 0$

Δηλαδή: $e^x > 2 \Leftrightarrow \ln e^x > \ln 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A = (\ln 2, +\infty)$.

β) Έχουμε

$$f(x) + x = 3 \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x - 2) + x = \ln 2^3 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x - 2) + \ln e^x = \ln 8 \Leftrightarrow$$

$$\ln[(e^x - 2) \cdot e^x] = \ln 8 \Leftrightarrow$$

$$(e^x)^2 - 2e^x = 8 \Leftrightarrow$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36 > 0$ και ρίζες

$y = 4$, $y = -2$. Άρα $e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$ (η εξίσωση $e^x = -2$ είναι αδύνατη, διότι $e^x > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x). Η λύση $x = \ln 4$ είναι δεκτή, διότι $\ln 4 > \ln 2$.

Τελικά η εξίσωση $f(x) + x = 3 \ln 2$ έχει λύση $x = \ln 4$.

γ) Έχουμε

$$f(x) + x \geq 3 \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x - 2) + x \geq \ln 2^3 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x - 2) + \ln e^x \geq \ln 8 \Leftrightarrow$$

$$\ln[(e^x - 2) \cdot e^x] \geq \ln 8 \Leftrightarrow$$

$$(e^x)^2 - 2e^x \geq 8 \Leftrightarrow$$

$$y^2 - 2y - 8 \geq 0 \quad (1).$$

Από το β) ερώτημα γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο $y^2 - 2y - 8$ έχει ρίζες $y = 4$ και $y = -2$. Άρα η ανίσωση (1) αληθεύει για $y \leq -2$ ή $y \geq 4$, δηλαδή $e^x \leq -2$ (που είναι αδύνατη) ή $e^x \geq 4 \Leftrightarrow \ln e^x \geq \ln 4 \Leftrightarrow x \geq \ln 4$. Πρέπει και $x > \ln 2$, οπότε τελικά η ανίσωση $f(x) + x \geq 3 \ln 2$ αληθεύει για $x \geq \ln 4$.

37

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{4^x - 1}{2^x + 5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 3 - \log 7$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \log 3 - \log 7$.

(Μονάδες 9)

37 Α

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει

$$\frac{4^x - 1}{2^x + 5} > 0 \stackrel{2^x + 5 > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$4^x - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$4^x > 1 \Leftrightarrow$$

$$4^x > 4^0 \Leftrightarrow$$

$$x > 0.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (0, +\infty)$.

β) Γνωρίζουμε ότι για $a > 0, a \neq 1$ και $x_1, x_2 > 0$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2. \text{ Οπότε έχουμε:}$$

$$f(x) = \log 3 - \log 7 \Leftrightarrow$$

$$\log \frac{4^x - 1}{2^x + 5} = \log \frac{3}{7} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4^x - 1}{2^x + 5} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow$$

$$7 \cdot 4^x - 7 = 3 \cdot 2^x + 15 \Leftrightarrow$$

$$7 \cdot (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 22 = 0 \stackrel{2^x = y}{\Leftrightarrow}$$

$$7 \cdot y^2 - 3 \cdot y - 22 = 0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-22) = 625 > 0$ και

$$\text{ρίζες } y_1 = \frac{3+25}{14} = \frac{28}{14} = 2, \quad y_2 = \frac{3-25}{14} = \frac{-22}{14} = -\frac{11}{7}.$$

Οπότε $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$, που είναι δεκτή διότι $x > 0$ (η εξίσωση $2^x = -\frac{11}{7}$ είναι αδύνατη).

γ) Έχουμε

$$f(x) > \log 3 - \log 7 \Leftrightarrow$$

$$\log \frac{4^x - 1}{2^x + 5} > \log \frac{3}{7} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4^x - 1}{2^x + 5} > \frac{3}{7} \stackrel{2^x + 5 > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$7 \cdot 4^x - 7 > 3 \cdot 2^x + 15 \Leftrightarrow$$

$$7 \cdot (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 22 > 0 \stackrel{2^x = y}{\Leftrightarrow}$$

$$7 \cdot y^2 - 3 \cdot y - 22 > 0 \quad (1)$$

Από το β) ερώτημα γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο $7 \cdot y^2 - 3 \cdot y - 22$ έχει ρίζες $y = 2$ και $y = -\frac{11}{7}$. Οπότε η ανίσωση (1) αληθεύει για $y < -\frac{11}{7}$ ή $y > 2$, δηλαδή $2^x < -\frac{11}{7}$ (αδύνατη διότι $2^x > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x) ή $2^x > 2 \Leftrightarrow x > 1$.

Τελικά η ανίσωση αληθεύει για $x > 1$.

60 ΤΕΛ. Αθηνών

38

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+2)$.

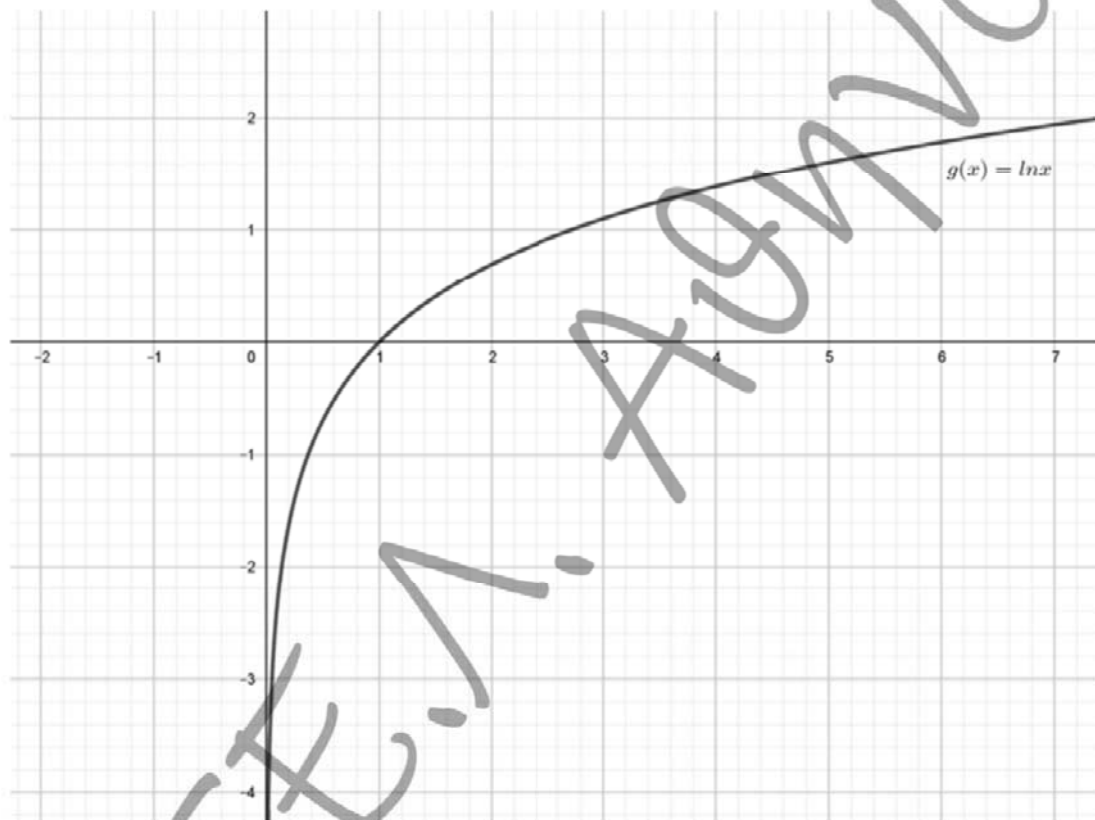
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 8)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$.



Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \ln(x+2)$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g .

(Μονάδες 10)

38 A

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για όλες τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$x+2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$x > -2$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $(-2, +\infty)$.

β) Η τετμημένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx' , είναι η λύση της εξίσωσης:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$$

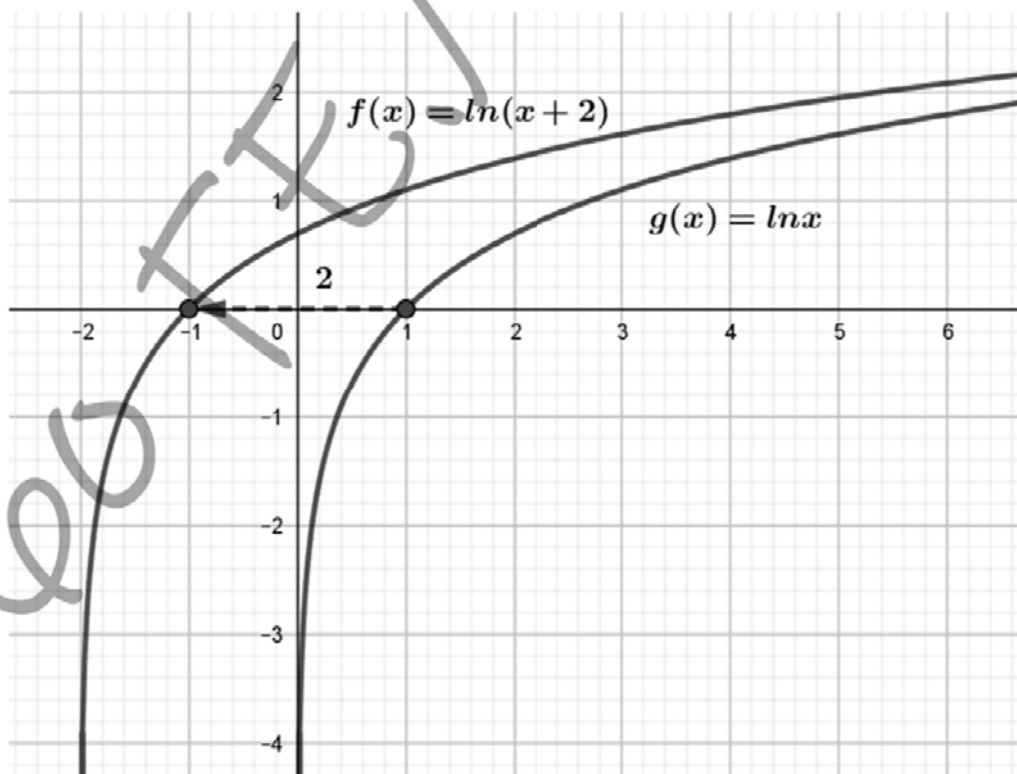
$$x+2 = e^0 \Leftrightarrow$$

$$x+2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$x = -1.$$

Συνεπώς το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx' είναι το $(-1, 0)$.

γ) Η γραφική παράσταση της $f(x) = g(x+2) = \ln(x+2)$ θα προκύψει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά δυο μονάδες αριστερά, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



39

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(10^x - 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) + x = \log(10^{2x} - 10^x)$, $x > 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = -x$.

(Μονάδες 6)

39 A

ΛΥΣΗ

α) Καθώς υπάρχουν λογάριθμοι μόνο θετικών αριθμών, απαιτούμε $10^x - 1 > 0$, άρα $10^x > 1 \Leftrightarrow 10^x > 10^0 \Leftrightarrow x > 0$, αφού η συνάρτηση $g(x) = 10^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Πρέπει $f(x) > 0 \Leftrightarrow \log(10^x - 1) > 0 \Leftrightarrow \log(10^x - 1) > \log 1$ και καθώς η συνάρτηση $h(x) = \log x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ παίρνουμε $10^x - 1 > 1 \Leftrightarrow 10^x > 2$ σχέση που γράφεται $10^x > 10^{\log 2}$. Όστε $x > \log 2$, δηλαδή $x \in (\log 2, +\infty)$.

γ) Έχουμε $f(x) + x = \log(10^x - 1) + \log 10^x = \log[10^x(10^x - 1)] = \log(10^x \cdot 10^x - 10^x) = \log(10^{2x} - 10^x)$.

δ) Πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) + x = 0 \Leftrightarrow \log(10^{2x} - 10^x) = 0$ άρα $10^{2x} - 10^x = 1 \Leftrightarrow (10^x)^2 - 10^x - 1 = 0$. Θέτοντας $10^x = y > 0$, παίρνουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση $y^2 - y - 1 = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$, οπότε $y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Έτσι $y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, αφού $y > 0$.

Τελικά $10^x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Leftrightarrow x = \log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$.

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $\left(\log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right), -\log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\right)$.

40

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$ και δύο άλλων συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x), x \in \mathbb{R}$ που προέκυψαν από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $f(x)$.

α) Να εξηγήσετε με τι είδους μετατοπίσεις προέκυψαν οι γραφικές παραστάσεις των $g(x)$ και $h(x)$ από την γραφική παράσταση της $f(x)$.

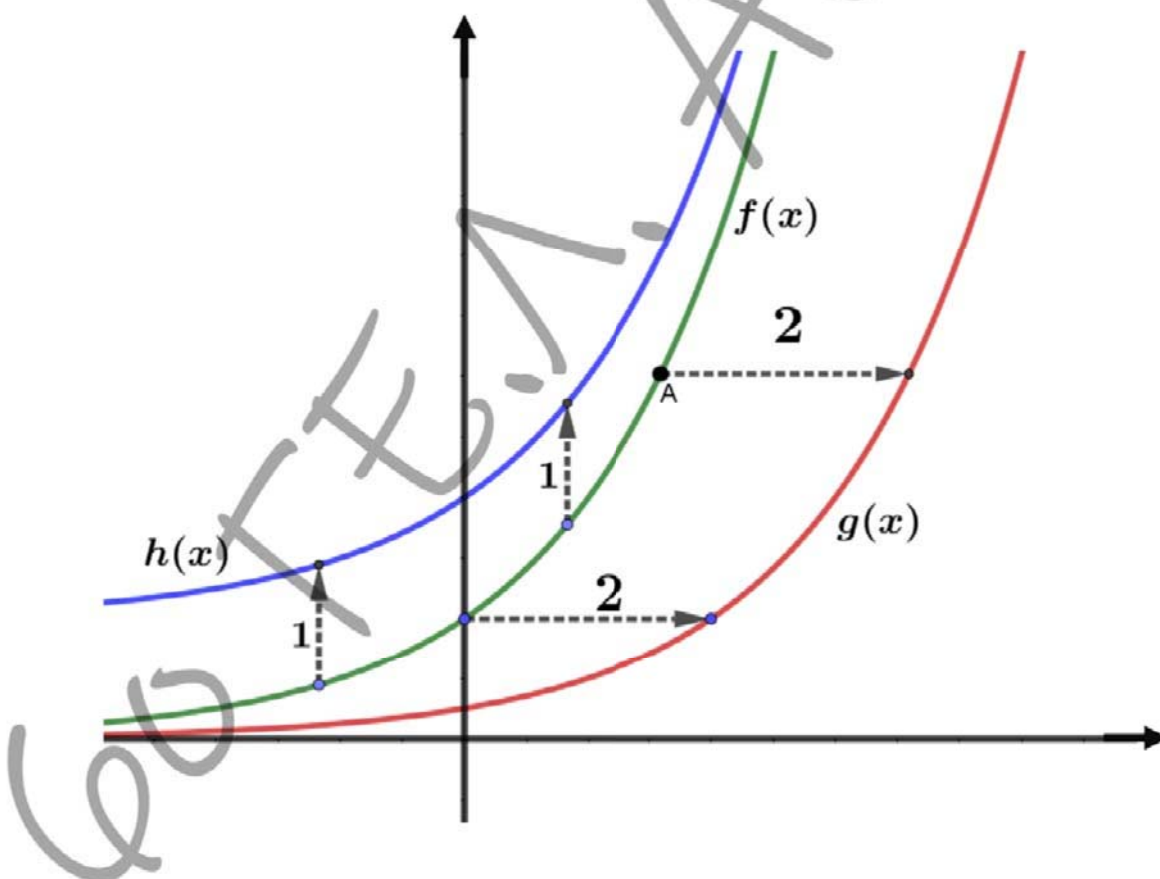
(Μονάδες 8)

β) Να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου A της γραφικής παράστασης της f του οποίου η τεταγμένη είναι 16.

(Μονάδες 9)



40 A

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ προέκυψε από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)$ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.

Επίσης, η γραφική παράσταση της $h(x)$ προέκυψε από μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

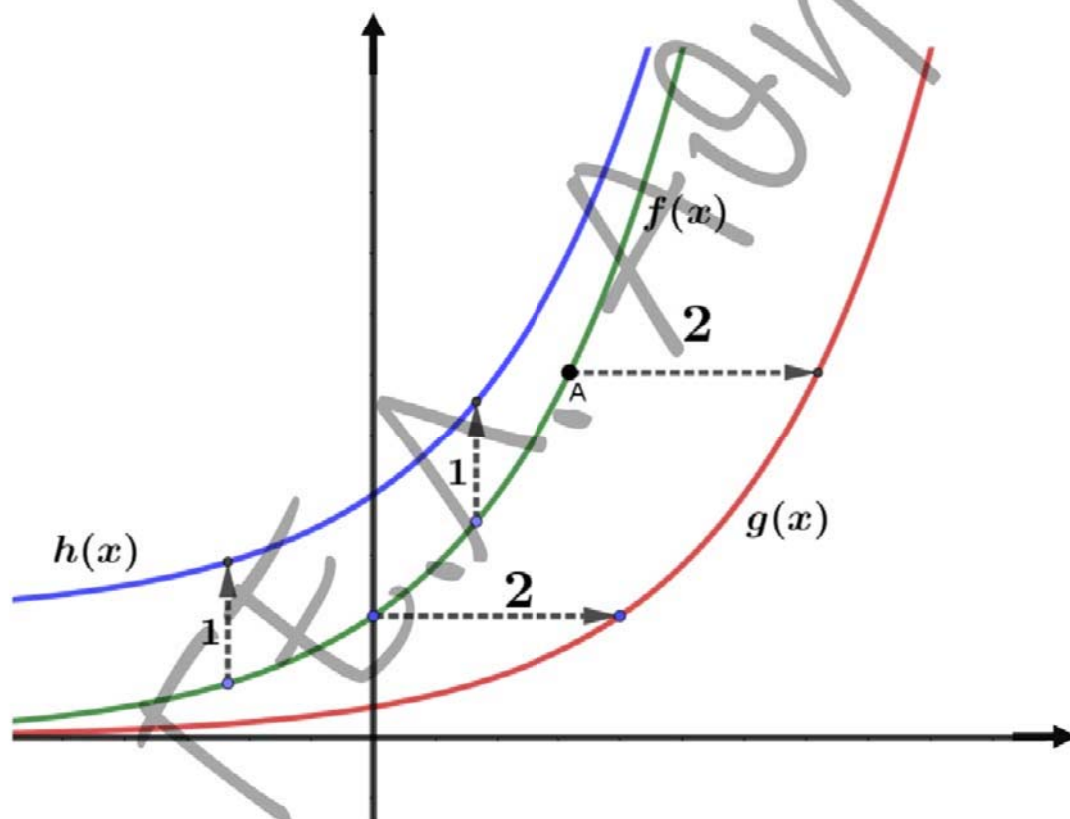
β) Με βάση τα παραπάνω, έχουμε:

$$g(x) = f(x - 2), \text{ άρα } g(x) = 2^{x-2} = \frac{2^x}{2^2} = \frac{1}{4} \cdot f(x).$$

$$\text{και } h(x) = f(x) + 1 = 2^x + 1.$$

γ) Ζητάμε την τιμή του x , ώστε $f(x) = 16 \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$.

Έτσι, το ζητούμενο σημείο είναι $A(4,16)$.



41

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(3)$.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $\ln 3 + 3\ln 2 - f(3) = \ln 4$.

(Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 4$.

(Μονάδες 13)

41 A

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f(3) = \ln(3^2 - 2 \cdot 3 + 3) = \ln 6$.

β) Είναι $\ln 3 + 3\ln 2 - f(3) = \ln 3 + \ln 2^3 - \ln 6 = \ln \frac{2^4}{6} = \ln 4$.

γ) Με $x \in \mathbb{R}$, είναι:

$$f(x) = \ln 4 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 3) = \ln 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2x - 1$ είναι: $\Delta = 4 + 4 = 8 = 4 \cdot 2$ και

οι ρίζες: $x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{2})}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Άρα: $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ και $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

42

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x \ln x}$ και $g(x) = \sqrt{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

(Μονάδες 4)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

(Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f .

γ) i. Να βρείτε τη μονοτονία της.

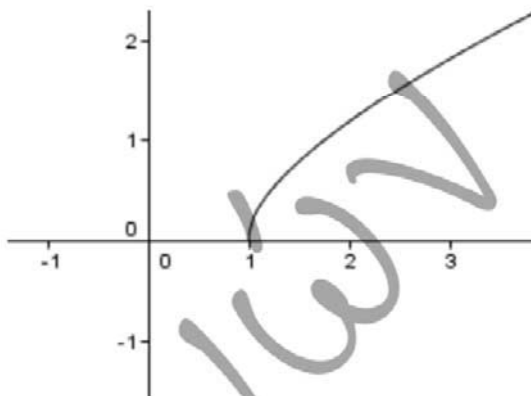
(Μονάδες 4)

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$.

(Μονάδες 5)

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y = 1 - x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x) = 1 - x$.

(Μονάδες 7)



42 A

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται μόνο όταν $x > 0$ και $x \ln x \geq 0$, δηλαδή μόνο όταν $x \geq 1$, οπότε $A_f = [1, +\infty)$. Ομοίως η g ορίζεται μόνο όταν $x > 0$ και $\ln x \geq 0$, δηλαδή μόνο όταν $x \geq 1$, οπότε $A_g = [1, +\infty)$.

β) Με $x \geq 1$ έχουμε:

$$f(x) - g(x) = \sqrt{x \ln x} - \sqrt{\ln x} = (\sqrt{x} - 1)\sqrt{\ln x} \geq 0$$

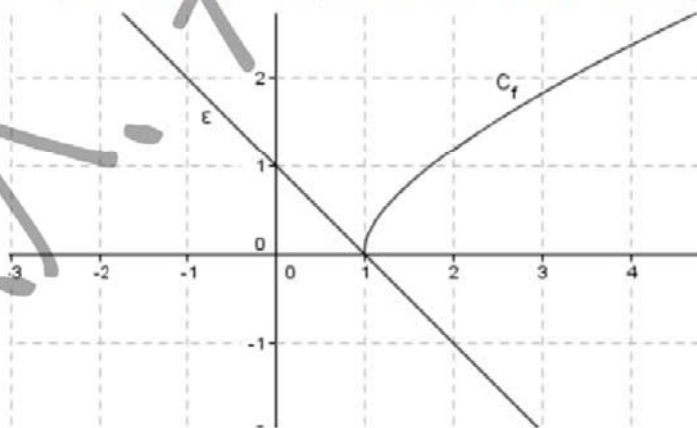
αφού καθένας από τους όρους του γινομένου είναι μη αρνητικός. Επομένως, η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

γ) i. Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $A_f = [1, +\infty)$.

ii. Επειδή $\frac{5}{3} - \frac{7}{5} = \frac{25-21}{15} = \frac{4}{15} > 0$, ισχύει $\frac{5}{3} > \frac{7}{5}$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα

συμπεραίνουμε ότι $f\left(\frac{5}{3}\right) > f\left(\frac{7}{5}\right)$.

δ) Η ευθεία $\epsilon: y = 1 - x$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $(1,0)$ και $(0,1)$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, απ' όπου προκύπτει ότι το μοναδικό κοινό σημείο της με την C_f είναι το $(1,0)$. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x) = 1 - x$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$.



Επισήμανση.

Στο πλαίσιο μιας αλγεβρικής λύσης θα μπορούσαμε να αναζητήσουμε ρίζες στο διάστημα $[1, +\infty)$, να διαπιστώσουμε ότι ο αριθμός 1 είναι η μία ρίζα της και να αποδείξουμε ότι αν $x > 1$ έχουμε $f(x) > f(1)$, δηλαδή $f(x) > 0$ και $1 - x < 0$, οπότε η εξίσωση δεν έχει ρίζα μεγαλύτερη από τη μονάδα.

43

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$, $x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = \ln x$.

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$, $x \neq 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y = 2$.

(Μονάδες 7)

43 A

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = \mathbb{R} - \{0\}$.

Για κάθε $x \in A$, είναι φανερό ότι $-x \in A$ και

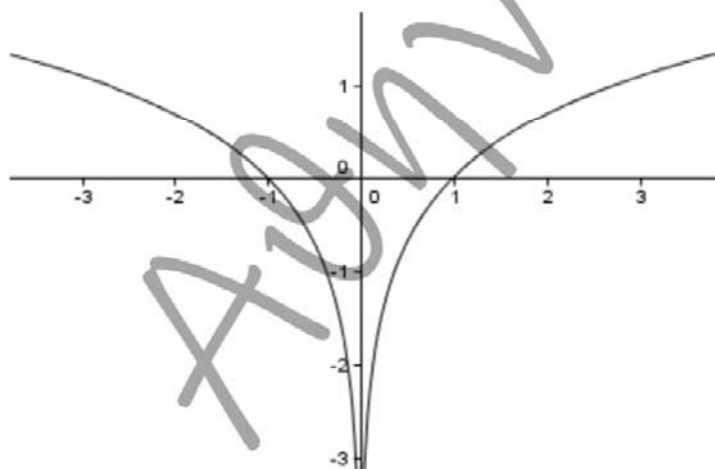
$$f(-x) = \frac{1}{2} \ln(-x)^2 = \frac{1}{2} \ln x^2 = f(x)$$

Επομένως η f είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y/y .

β) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2 = \frac{1}{2} \ln |x|^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln |x| = \ln |x| = \ln x$$

γ) Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα και, σύμφωνα με τα προηγούμενα ερωτήματα, προκύπτει αν σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x, x > 0$ και στη συνέχεια θεωρήσουμε το συμμετρικό του σχήματος ως προς τον άξονα y/y .



δ) Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία $y=2$, μόνο όταν $f(x) < 2$. Με $x \neq 0$ έχουμε:

$$f(x) < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln x^2 < 2 \Leftrightarrow \ln x^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 < e^4 \Leftrightarrow |x| < e^2 \Leftrightarrow -e^2 < x < e^2$$

Άρα, η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία $y=2$ για κάθε x με $x \in (-e^2, 0) \cup (0, e^2)$.

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

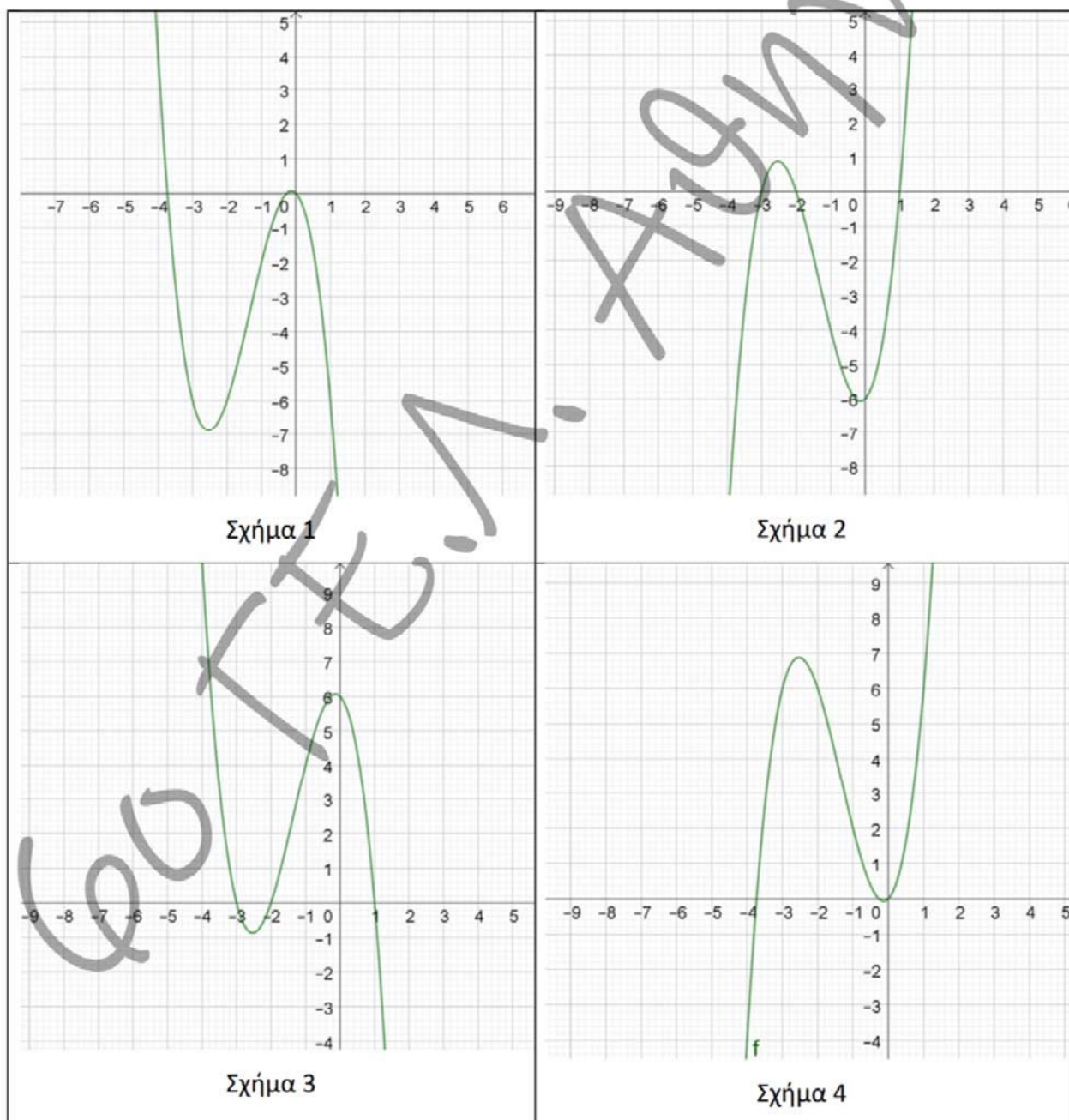
(Μονάδες 10)

β) Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

(Μονάδες 8)



44 A

ΛΥΣΗ

α) Το $P(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$ έχει άθροισμα συντελεστών ίσο με το 0, οπότε έχει ρίζα το 1.

Το σχήμα Horner για τη διαίρεση $P(x) : (x-1)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

-1	-4	-1	6	1
	-1	-5	-6	
-1	-5	-6	0	

Συνεπώς η ανίσωση $P(x) < 0$ γίνεται ισοδύναμα $(x-1)(-x^2-5x-6) < 0$.

Ο πίνακας προσήμου του $(x-1)(-x^2-5x-6)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα προσήμων

x	$-\infty$	-3	-2	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	+	+
$-x^2-5x-6$	-	+	-	-	-
$(x-1)(-x^2-5x-6)$	+	-	+	-	-

Συνεπώς η ανίσωση $P(x) < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in (-3, -2) \cup (1, +\infty)$.

β) Με βάση το α) ερώτημα, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ θα πρέπει να είναι κάτω από τον άξονα xx' , για κάθε $x \in (-3, -2) \cup (1, +\infty)$. Το μόνο από τα δοσμένα σχήματα που ικανοποιεί αυτήν την απαίτηση είναι το γ.

Εναλλακτικά, αφού $P(0) = 6$ θα πρέπει η γραφική παράσταση να διέρχεται από το σημείο $(0, 6)$ και το μόνο σχήμα που ικανοποιεί αυτήν την απαίτηση είναι το γ.

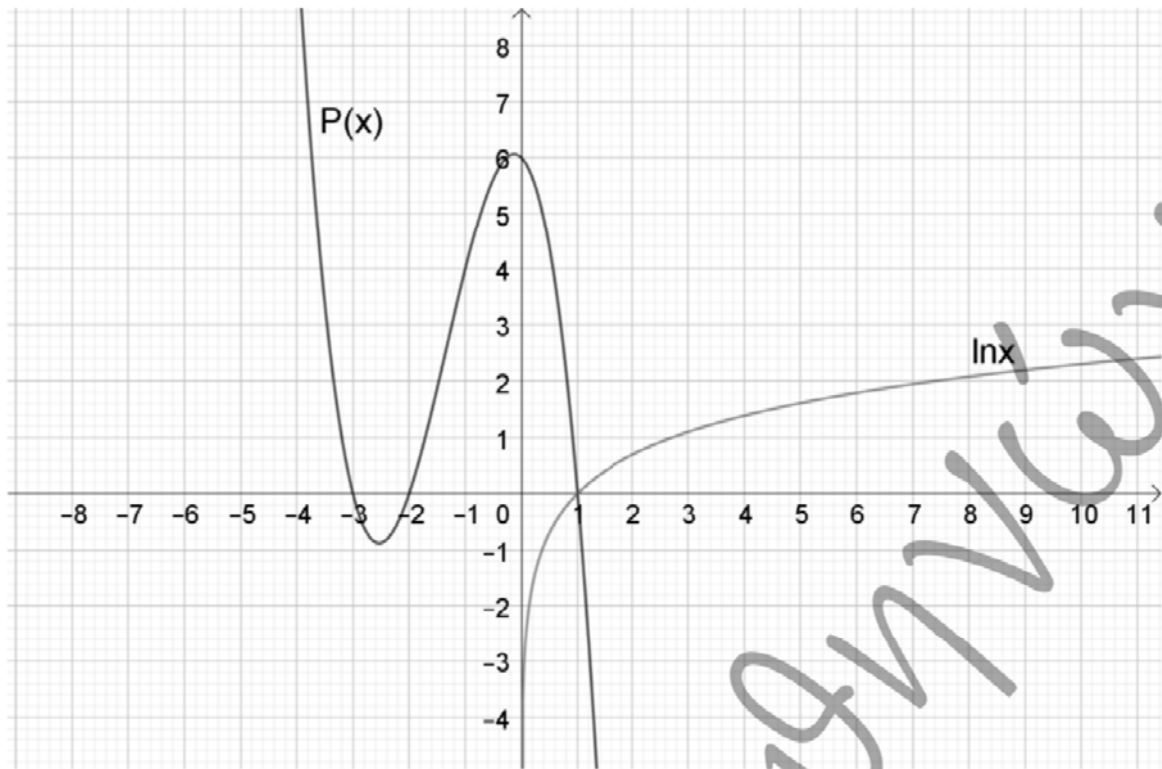
γ) Αν στο σχήμα γ συμπληρώσουμε τη γραφική παράσταση της $\ln x$ όπως φαίνεται παρακάτω, θα διαπιστώσουμε ότι έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη 1, που σημαίνει ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

Εναλλακτικά, η εξίσωση $P(x) = \ln x$ ορίζεται για $x > 0$.

Για $x > 1$ έχουμε ότι $P(x) < 0 < \ln x$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ δεν έχει ρίζα στο $(1, +\infty)$.

Επίσης για $0 < x < 1$ έχουμε ότι $\ln x < 0 < P(x)$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ δεν έχει ρίζα στο $(0, 1)$.

Τέλος $P(1) = \ln 1 = 0$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.



45

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx' .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον xx' .

(Μονάδες 10)

45 A

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για όλες τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x > 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x > e^0 \Leftrightarrow$$

$$x > 0$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0, +\infty)$.

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx' , είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x - 1) = \ln 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x = 2 \Leftrightarrow$$

$$x = \ln 2$$

Η λύση $\ln 2$ είναι δεκτή αφού $\ln 2 > \ln 1 \Leftrightarrow \ln 2 > 0$.

Συνεπώς το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx' είναι το $(\ln 2, 0)$.

γ) Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα xx' , για όλες τις τιμές του x που είναι λύσεις της ανίσωσης

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x - 1) < \ln 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x - 1 < 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x < 2 \Leftrightarrow$$

$$x < \ln 2$$

Όμως πρέπει εξ αρχής $x > 0$, οπότε τελικά η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον xx' όταν $0 < x < \ln 2$.

46

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 15)

60 ΤΕΛΟΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

46 A

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για όλες τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x > 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x > e^0 \Leftrightarrow$$

$$x > 0$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0, +\infty)$.

β) Είναι

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x - 1) = \ln 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x = 2 \Leftrightarrow$$

$$x = \ln 2$$

Η λύση $\ln 2$ είναι δεκτή αφού $\ln 2 > \ln 1 \Leftrightarrow \ln 2 > 0$.

47

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παράσταση $A = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3}\right)$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\omega^2 - 1}{\omega - 3} > 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = -\ln 3$.

(Μονάδες 9)

47 A

ΛΥΣΗ

α) Η ανίσωση $\frac{\omega^2 - 1}{\omega - 3} > 0$ με $\omega \neq 3$ είναι ισοδύναμη με την $(\omega^2 - 1)(\omega - 3) > 0$.

Το πρόσημο του $(\omega^2 - 1)(\omega - 3)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

ω	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$\omega - 3$	-	-	-	0	+
$\omega^2 - 1$	+	0	-	0	+
$(\omega - 3)(\omega^2 - 1)$	-	0	+	0	+

Συνεπώς η ανίσωση $\frac{\omega^2 - 1}{\omega - 3} > 0$ αληθεύει για κάθε $\omega \in (-1, 1) \cup (3, +\infty)$.

β) Η παράσταση A ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή του x για την οποία ισχύει

$\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3} > 0$. Αν θέσουμε $e^x = \omega$ η ανίσωση $\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3} > 0$ γίνεται $\frac{\omega^2 - 1}{\omega - 3} > 0$ που όπως δείξαμε

στο α) αληθεύει για $\omega \in (-1, 1) \cup (3, +\infty)$.

Συνεπώς θα πρέπει $-1 < \omega < 1 \Leftrightarrow -1 < e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$ ή $\omega > 3 \Leftrightarrow e^x > 3 \Leftrightarrow x > \ln 3$

Τελικά η παράσταση A ορίζεται για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (\ln 3, +\infty)$.

γ) Η εξίσωση $A = -\ln 3$ ορίζεται για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (\ln 3, +\infty)$ και γίνεται ισοδύναμα

$$\ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3}\right) = \ln 3^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$3e^{2x} - 3 = e^x - 3 \Leftrightarrow$$

$$3e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x(3e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$x = \ln \frac{1}{3}$$

και επειδή $\frac{1}{3} < 1 \Leftrightarrow \ln \frac{1}{3} < 0$ η λύση $x = \ln \frac{1}{3}$ είναι δεκτή.

48

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = 1 + \log 3 - \log 6$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log(x^2 + 1) = \log 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 13)

60 FEV. Αθηνών

48 A

ΛΥΣΗ

α) Από τις ιδιότητες των λογαρίθμων έχουμε:

$$1 + \log 3 - \log 6 = \log 10 + \log 3 - \log 6 = \log \frac{10 \cdot 3}{6} = \log 5$$

οπότε η εξίσωση γράφεται $\log(x^2 + 1) = \log 5$.

β) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $x^2 + 1 > 0$. Έτσι με $x \in \mathbb{R}$ και με τη βοήθεια του ερωτήματος α) η εξίσωση γράφεται:

$$\log(x^2 + 1) = \log 5 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2$$

49

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2 \ln x = 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2 \ln x > 0$.

(Μονάδες 10)

49 A

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) = 0$. Οπότε $x = 0$ ή $x^2 - x - 2 = 0$ που έχει $\Delta = 9$ και ρίζες $x = -1$ και $x = 2$. Τελικά ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$ είναι οι $x = 0$, $x = -1$ και $x = 2$.

β) Για να ορίζεται η εξίσωση, πρέπει $x > 0$. Θέτουμε $\ln x = \omega$ και η εξίσωση γίνεται $P(\omega) = 0$.

Από το α) ερώτημα έχουμε τις ρίζες $\omega = 0$, $\omega = -1$, $\omega = 2$. Οπότε προκύπτουν τρεις εξισώσεις:

i) $\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1$ δεκτή.

ii) $\ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-1} \Leftrightarrow x = e^{-1}$ δεκτή.

iii) $\ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^2 \Leftrightarrow x = e^2$ δεκτή.

γ) Η ανίσωση $x^3 - x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow P(x) > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) > 0$ αληθεύει για $x \in (-1, 0) \cup (2, +\infty)$, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	○	-	○	+
x	-	-	○	+	+
$P(x)$	-	○	+	○	+

Οπότε για την ανίσωση $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 2(\ln x) > 0 \Leftrightarrow P(\ln x) > 0$, προκύπτει ότι $\ln x \in (-1, 0) \cup (2, +\infty)$. Λύνουμε τις δύο ανισώσεις:

i) $-1 < \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln e^{-1} < \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e} < x < 1$

ii) $2 < \ln x \Leftrightarrow \ln e^2 < \ln x \Leftrightarrow e^2 < x$.

Τελικά $x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right) \cup (e^2, +\infty)$.