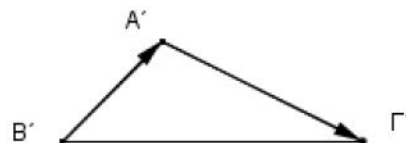
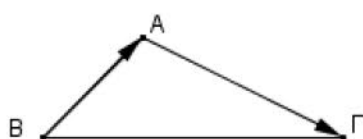


Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A'\Gamma'}$.



α) Να εξηγήσετε γιατί:

(i) το μήκος της πλευράς BA είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $B'A'$ και

(Μονάδες 3)

(ii) το μήκος της πλευράς $A\Gamma$ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $A'\Gamma'$.

(Μονάδες 3)

β) i. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{B'\Gamma'}$.

(Μονάδες 10)

ii. Να εξηγήσετε γιατί το μήκος της πλευράς $B\Gamma$ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $B'\Gamma'$.

(Μονάδες 3)

γ) Θα μπορούσε η ακόλουθη πρόταση να ήταν κριτήριο ισότητας τριγώνων;

«Αν για δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ ισχύει $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A'\Gamma'}$, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Από την υπόθεση έχουμε $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$ και $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{A'T'}$. Όμως, ίσα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα, άρα

(i) το μήκος της πλευράς BA είναι ίσο με το μήκος της πλευράς B'A' και

(ii) το μήκος της πλευράς AG είναι ίσο με το μήκος της πλευράς A'T'.

β) i. Από την υπόθεση έχουμε $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$ και $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{A'T'}$. Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

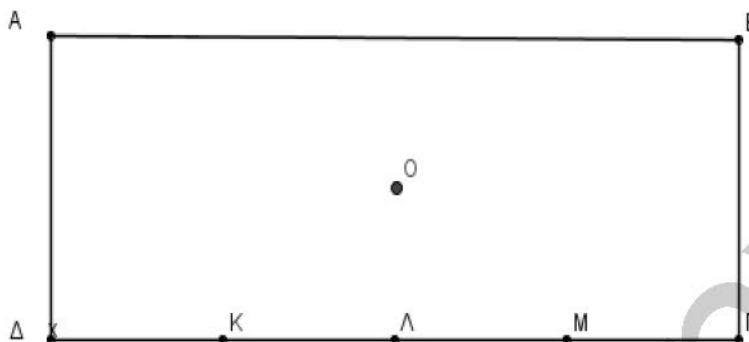
$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'T'} \text{ δηλαδή } \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{B'T'}.$$

ii. Από το β)i ερώτημα έχουμε $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{B'T'}$. Όμως, ίσα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα, άρα το μήκος της πλευράς BG είναι ίσο με το μήκος της πλευράς B'T'.

γ) Ναι, αφού, από τα ερωτήματα α) και β), τα δύο τρίγωνα έχουν και τις τρεις πλευρές τους μία προς μία ίσες (τα μήκη τους) και συνεπώς, από το κριτήριο ΠΠΠ, τα τρίγωνα θα είναι ίσα.

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα φαίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Τα σημεία Κ, Λ, Μ χωρίζουν την πλευρά ΔΓ σε τέσσερα ίσα τμήματα.



Αν $\overrightarrow{ΔΚ} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{ΔΑ} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε καθένα από τα ακόλουθα διανύσματα ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) $\overrightarrow{ΔΓ}$

(Μονάδες 8)

β) $\overrightarrow{ΜΑ}$

(Μονάδες 8)

γ) $\overrightarrow{ΟΔ}$

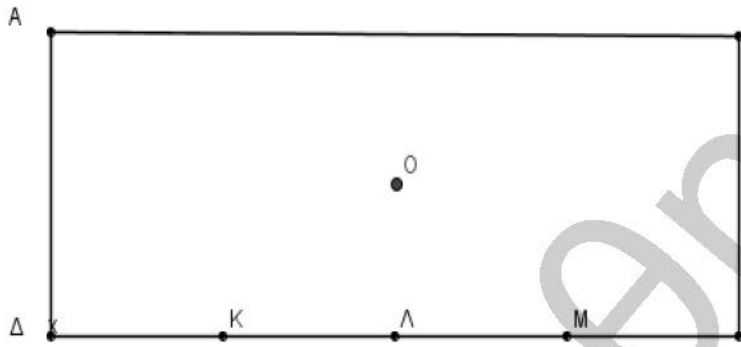
(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \overrightarrow{\Delta\Gamma} = 4\overrightarrow{\Delta K} = 4\vec{\alpha}.$$

$$\beta) \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{M\Delta} + \overrightarrow{\Delta A} = -3\vec{\alpha} + \vec{\beta}.$$

$$\gamma) \overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{O\Lambda} + \overrightarrow{\Lambda\Delta} = -\frac{1}{2}\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}.$$



ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$.

α) Να σημειώσετε πάνω στο σχήμα τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ όπου O η αρχή των αξόνων.

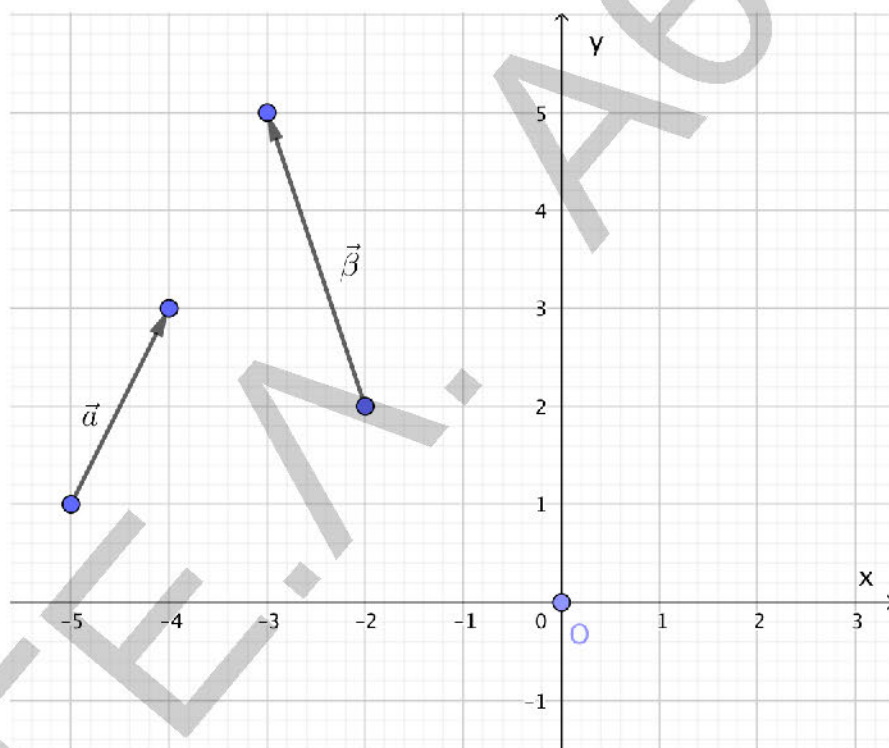
(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ και $\overrightarrow{AB}$.

(Μονάδες 09)

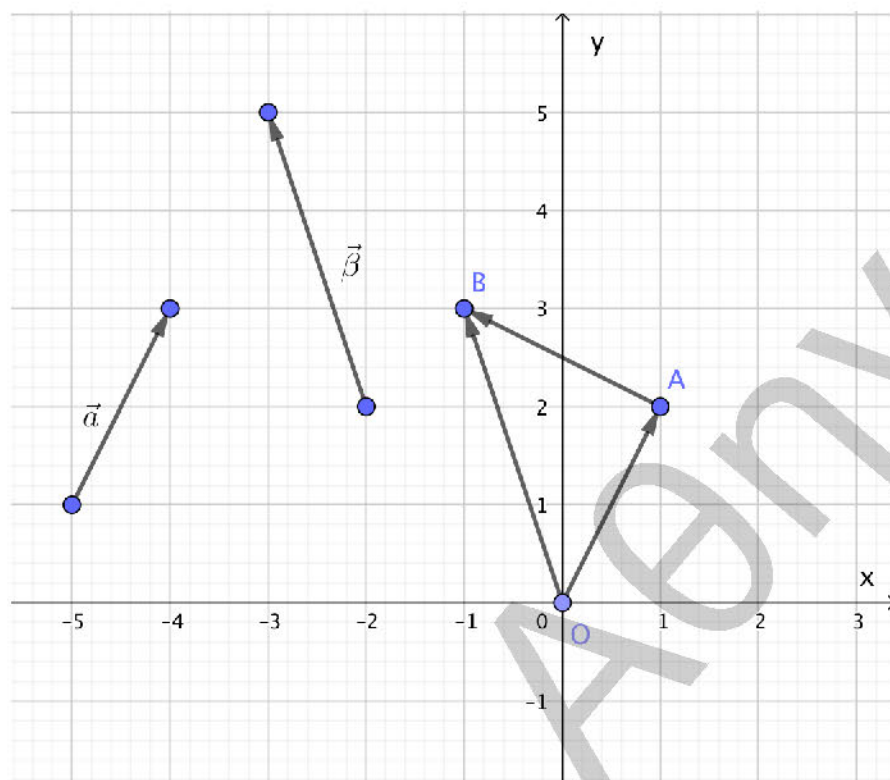
γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 08)



ΛΥΣΗ

α)



β) Από το παραπάνω σχήμα έχουμε:

$$\vec{\alpha} = \vec{OA} = (1, 2), \vec{\beta} = \vec{OB} = (-1, 3) \text{ και } \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-1, 3) - (1, 2) = (-2, 1).$$

γ) Έχουμε: $\vec{OA} \cdot \vec{AB} = (1, 2) \cdot (-2, 1) = 0$, επομένως $\vec{OA} \perp \vec{AB}$.

Επομένως το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο.

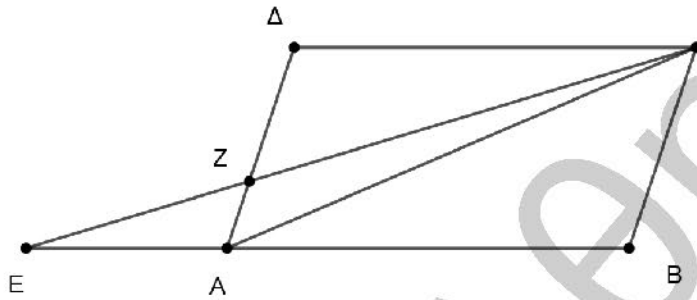
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AD} = \vec{\beta}$. Τα σημεία E και Z είναι τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AD}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} + \frac{1}{3} \cdot \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{Z\Gamma} = 2\overrightarrow{EZ}$. (Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία Z , E και Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

α) Αφού είναι $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AD} = \vec{\beta}$, τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{AZ}$ γράφονται:

$$\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} \text{ και } \overrightarrow{AZ} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \cdot \vec{\beta}.$$

τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{EZ}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma}$ έχουμε ότι:

$$\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \cdot \vec{\beta} - \left(-\frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} \right) = \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} + \frac{1}{3} \vec{\beta} \text{ και}$$

$$\overrightarrow{Z\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AZ} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} - \frac{1}{3} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3} \cdot \vec{\beta}$$

β) Επειδή $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} + \frac{1}{3} \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3} \cdot \vec{\beta}$ έχουμε ότι:

$$\overrightarrow{Z\Gamma} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3} \cdot \vec{\beta} = 2 \left(\frac{1}{2} \vec{\alpha} + \frac{1}{3} \cdot \vec{\beta} \right) = 2\overrightarrow{EZ} \text{ ή } \overrightarrow{Z\Gamma} = 2\overrightarrow{EZ}.$$

γ) Επειδή είναι $\overrightarrow{Z\Gamma} // \overrightarrow{EZ}$ και τα διανύσματα έχουν κοινό άκρο το σημείο Z έχουμε το συμπέρασμα ότι τα σημεία Z, E και Γ είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου A, B, Γ και τα διανύσματα $\vec{B\Delta}$ και $\vec{\Gamma E}$ τέτοια ώστε $\vec{B\Delta} = \vec{BA} + \vec{B\Gamma}$ και $\vec{\Gamma E} = \vec{\Gamma A} + \vec{\Gamma B}$.

α)

i. Να δείξετε ότι $\vec{A\Delta} = \vec{B\Gamma}$ και $\vec{AE} = \vec{\Gamma B}$.

(Μονάδες 8)

ii. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$ και $\vec{AE}$ είναι αντίθετα.

(Μονάδες 8)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα σημεία A, Δ και E είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α)

$$\text{i. Είναι } \vec{A\Delta} = \vec{AB} + \vec{B\Delta} = \vec{AB} + (\vec{BA} + \vec{B\Gamma}) = \vec{B\Gamma} \quad (1)$$

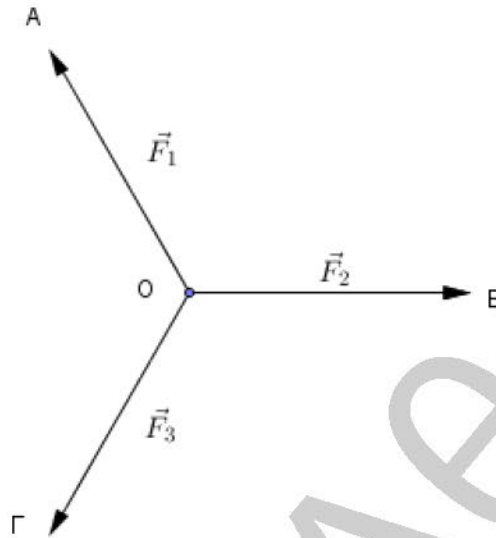
$$\text{και } \vec{AE} = \vec{AG} + \vec{GE} = \vec{AG} + (\vec{GA} + \vec{GB}) = \vec{GB} \quad (2).$$

ii. Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\vec{A\Delta} = -\vec{AE}$ δηλαδή τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$ και $\vec{AE}$ είναι αντίθετα.

β) Από το α) ερώτημα είναι $\vec{A\Delta} = (-1)\vec{AE}$, οπότε τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$ και $\vec{AE}$ είναι παράλληλα. Επιπλέον έχουν κοινό σημείο το A, άρα τα A, Δ και E είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα υλικό σημείο O εφαρμόζονται τρεις δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ οι οποίες σχηματίζουν ανά δύο γωνία 120° , έτσι ώστε το υλικό σημείο O να ισορροπεί.



α) Ποια σχέση ανάμεσα στα διανύσματα $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ εκφράζει την συνθήκη ισορροπίας;

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$ είναι αντίθετα.

(Μονάδες 5)

γ) Αν A, B, Γ, Δ είναι τα πέρατα των διανυσμάτων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ και $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, αντίστοιχα (θεωρούμενων ως διανυσμάτων με αρχή το σημείο O), τότε να αποδείξετε ότι:

i. $\widehat{AO\Delta} = \widehat{BO\Delta} = 60^\circ$.

(Μονάδες 5)

ii. $\widehat{O\Delta B} = 60^\circ$.

(Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι: $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$.

(Μονάδες 5)

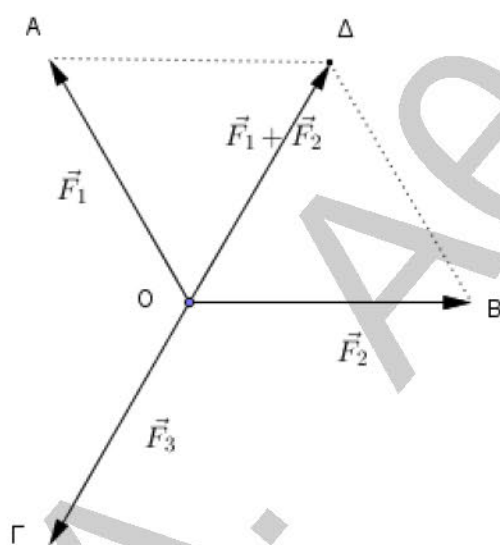
ΛΥΣΗ

α) Η συνθήκη ισορροπίας εκφράζεται από την διανυσματική ισότητα: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$.

β) Από το α) ερώτημα έχουμε $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$, οπότε $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$. Άρα, τα διανύσματα $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$ είναι αντίθετα.

γ)

i. Από το β) ερώτημα, τα σημεία Γ, Ο, Δ είναι συνευθειακά. Οπότε, οι γωνίες $\widehat{ΑΟΔ}$ και $\widehat{ΒΟΔ}$ είναι 60° , ως παραπληρωματικές των γωνιών $\widehat{ΑΟΓ}$, $\widehat{ΒΟΓ}$, αντίστοιχα, που εξ υποθέσεως είναι ίσες με 120° η κάθε μία.



ii. Από τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος δύο διανυσμάτων, το τετράπλευρο ΟΑΔΒ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι γωνίες $\widehat{ΑΟΔ}$ και $\widehat{ΟΔΒ}$ είναι ίσες, ως εντός εναλλάξ και άρα, από το γι' ερώτημα, έχουμε $\widehat{ΟΔΒ} = 60^\circ$.

δ) Από το ερώτημα γ), έπεται ότι το τρίγωνο ΟΒΔ είναι ισόπλευρο, καθώς $\widehat{ΒΟΔ} = \widehat{ΟΔΒ} = 60^\circ$, οπότε και η τρίτη του γωνία $\widehat{ΟΒΔ}$ αναγκαστικά θα είναι 60° (μια και το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με 180°). Συνεπώς, $|\vec{ΟΒ}| = |\vec{ΒΔ}| = |\vec{ΟΔ}|$, δηλαδή $|\vec{F}_2| = |\vec{F}_1| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2|$. Όμως, από το β) ερώτημα, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$. Επομένως, $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |-\vec{F}_3|$, ή ισοδύναμα $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ, E σημεία εσωτερικά των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\overrightarrow{AB} = \kappa \cdot \overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \cdot \overrightarrow{AE}$, όπου κ και λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, τότε:

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

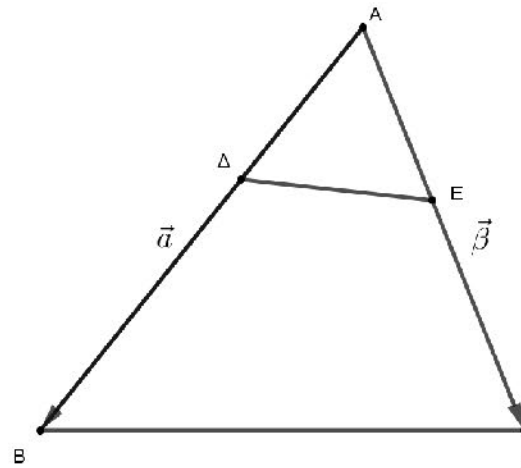
(Μονάδες 8)

β)

i. Αν $\kappa = \lambda$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} \parallel \overrightarrow{\Delta E}$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}| = \kappa |\overrightarrow{\Delta E}|$. (Μονάδες 10)

ii. Αν $\kappa = \lambda = 2$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ και να διατυπώσετε λεκτικά ποιο γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ



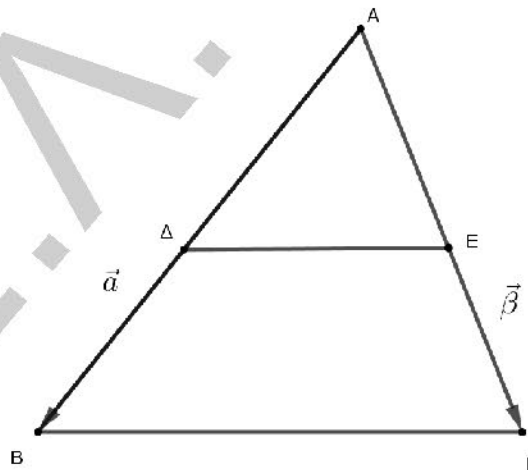
α) Είναι $\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{\kappa} \cdot \vec{\alpha} + \frac{1}{\lambda} \cdot \vec{\beta}$

$$\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Gamma} = -\vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

β)

i. Αν $\kappa = \lambda$ τότε $\overrightarrow{B\Gamma} = -\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \kappa \left(-\frac{1}{\kappa} \vec{\alpha} + \frac{1}{\kappa} \vec{\beta} \right) = \kappa \cdot \overrightarrow{\Delta E}$ άρα $\overrightarrow{B\Gamma} // \overrightarrow{\Delta E}$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}| = \kappa \cdot |\overrightarrow{\Delta E}|$

ii.



Αν $\kappa = \lambda = 2$ τότε τα σημεία Δ και Ε είναι μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, οπότε $\overrightarrow{B\Gamma} // \overrightarrow{\Delta E}$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}| = 2 \cdot |\overrightarrow{\Delta E}|$, επομένως $\Delta E // B\Gamma$ και $B\Gamma = 2 \cdot \Delta E$. Αποδείξαμε δηλαδή ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο με την τρίτη πλευρά του τριγώνου και ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς.