

Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(0, 2)$, $B(3, 0)$, $\Gamma(6, 2)$ και $\Delta(3, 4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Delta}$ και να επιβεβαιώσετε ότι:
 $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $|\overrightarrow{B\Delta}| = |\overrightarrow{B\Gamma}|$. Ποιο είναι το σχήμα του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$;

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{OA} = (3,4) - (0,2) = (3-0, 4-2) = (3,2).$$

$$\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OB} = (6,2) - (3,0) = (6-3, 2-0) = (3,2).$$

$$\text{Άρα, } \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}.$$

$$\text{Επίσης, } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (0,2) - (3,0) = (-3,2).$$

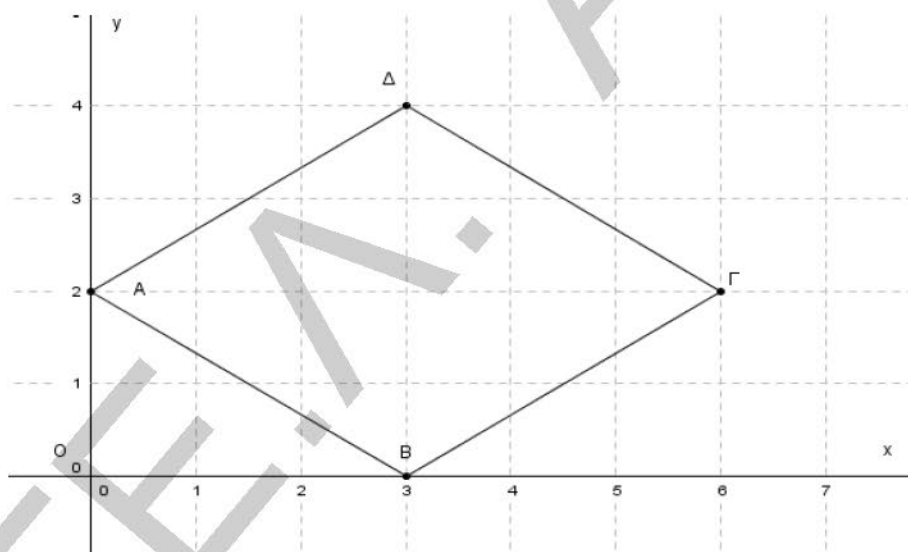
$$\beta) \text{ Από το α) ερώτημα έχουμε ότι } \overrightarrow{BA} = (-3,2). \text{ Οπότε } |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Επίσης,

$$\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OB} = (6,2) - (3,0) = (3,2), \text{ οπότε } |\overrightarrow{B\Gamma}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

$$\text{Άρα, } |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{B\Gamma}|.$$

Το τετράπλευρο ABΓΔ είναι ρόμβος καθώς η συνθήκη $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$ συνεπάγει ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, ενώ η συνθήκη $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{B\Gamma}|$ βεβαιώνει ότι το ABΓΔ είναι ρόμβος (τα μήκη δύο διαδοχικών πλευρών είναι ίσα).



ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-2, 5)$ και $\vec{\beta} = (1, -3)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (8, -21)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, αφού $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0$.

β) Το διάνυσμα $\vec{v} = (8, -21)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αν και μόνον αν υπάρχουν αριθμοί λ, μ ώστε $\vec{v} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ ή ισοδύναμα,

$(8, -21) = \lambda(-2, 5) + \mu(1, -3)$, δηλαδή

$$\begin{cases} 8 = -2\lambda + \mu \\ -21 = 5\lambda - 3\mu \end{cases}$$

το οποίο είναι 2×2 γραμμικό σύστημα με αγνώστους τα λ, μ .

Το σύστημα, με την μέθοδο των οριζουσών, έχει μοναδική λύση:

$$\lambda = \frac{D_\lambda}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -21 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{1} = -3 \text{ και}$$

$$\mu = \frac{D_\mu}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 5 & -21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Άρα,

$$(8, -21) = -3(-2, 5) + 2(1, -3).$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(4,0)$ και $\Gamma(5,1)$.

α) Να σχεδιάσετε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να τοποθετήσετε σε αυτό τα σημεία A, B, Γ .

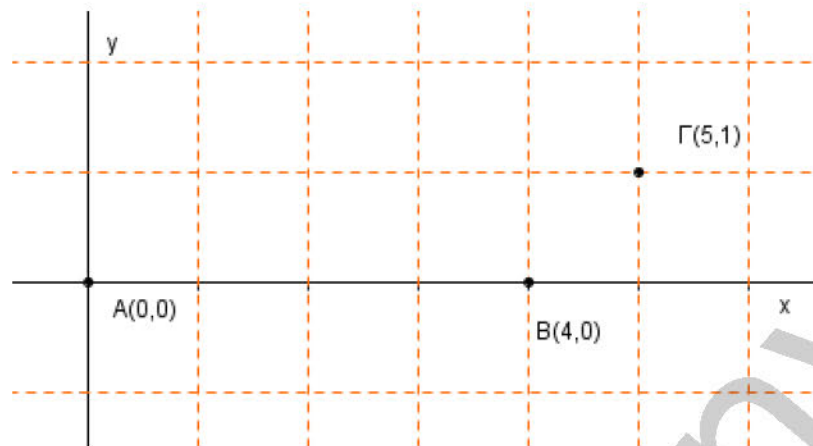
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός τέταρτου σημείου Δ έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

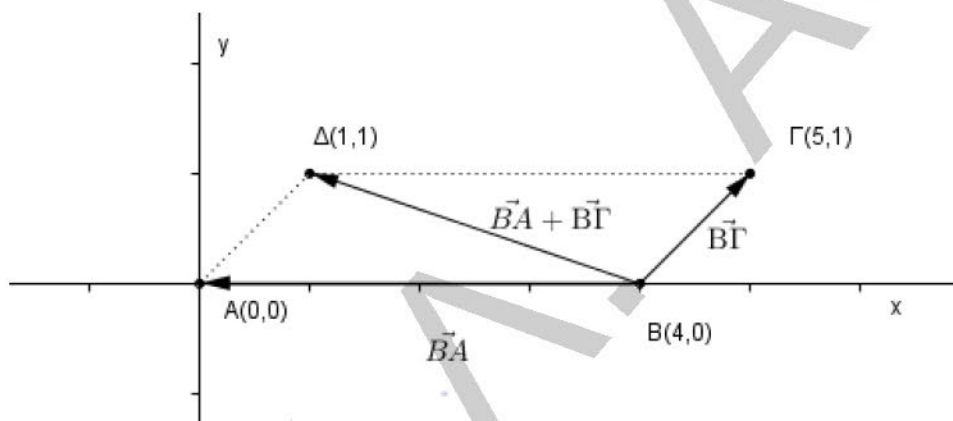
(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Τα σημεία A, B, Γ σημειώνονται στο ακόλουθο σύστημα αξόνων:



β) Το ζητούμενο τέταρτο σημείο Δ ορίζεται από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, ως το πέρας του διανύσματος $\vec{BA} + \vec{B\Gamma}$ (βλέπε ακόλουθο σχήμα).



Όμως,

$$\vec{BA} = (0 - 4, 0 - 0) = (-4, 0) \text{ και}$$

$$\vec{B\Gamma} = (5 - 4, 1 - 0) = (1, 1),$$

Άρα,

$$\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{B\Gamma} = (-4, 0) + (1, 1) = (-3, 1).$$

Συνεπώς,

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = (4, 0) + (-3, 1) = (1, 1).$$

Επομένως, το ζητούμενο σημείο είναι το σημείο Δ(1, 1).

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (5, -12)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι ομόρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 1.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι αντίρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 7.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Το διάνυσμα $\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$ είναι: i) ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ (αφού $\frac{1}{|\vec{\alpha}|} > 0$) και ii) μέτρου 1 (αφού

$\left| \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} \right| = \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\alpha}|} = 1$). Οπότε:

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} = \frac{(5, -12)}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{(5, -12)}{\sqrt{169}} = \frac{(5, -12)}{13} = \left(\frac{5}{13}, \frac{-12}{13} \right).$$

β) Αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ του α) ερωτήματος με -7.

Δηλαδή, $\vec{\gamma} = -7\vec{\beta} = -7\left(\frac{5}{13}, \frac{-12}{13}\right) = \left(\frac{-35}{13}, \frac{84}{13}\right)$. Το πρόσημο «-» δίνει το αντίρροπο και ο

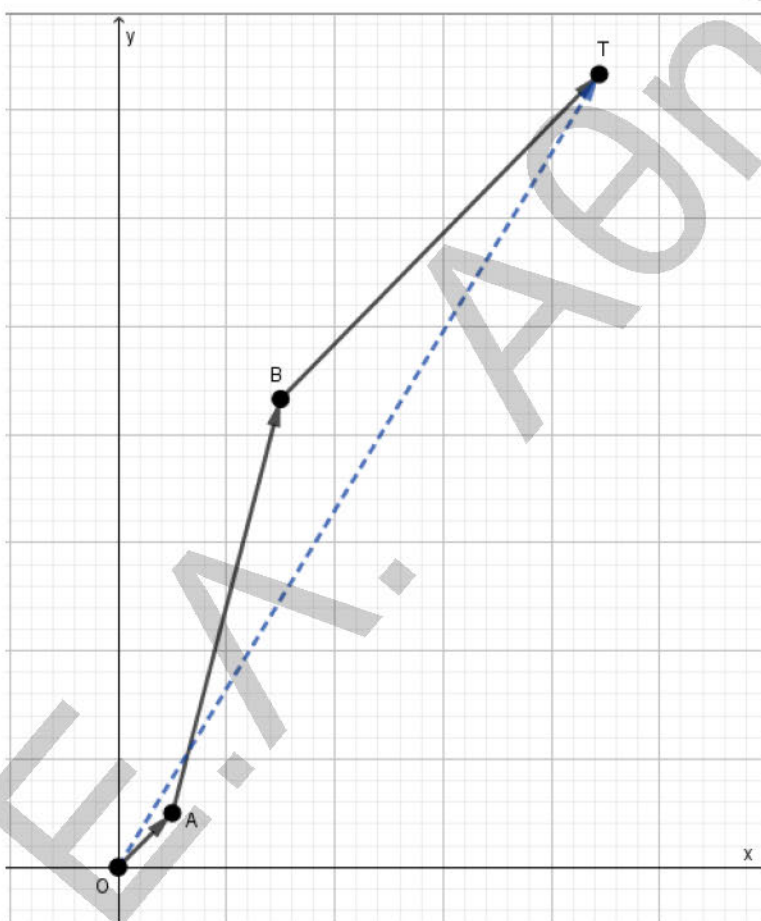
παράγοντας 7 το επιθυμητό μέτρο, αφού $|\vec{\gamma}| = |-7\vec{\beta}| = |-7||\vec{\beta}| = 7 \cdot 1 = 7$.

ΘΕΜΑ 2

Ένας εξερευνητής ξεκίνησε από την κατασκήνωσή του (σημείο O) τρεις μέρες πριν, για ένα ταξίδι μέσα στη ζούγκλα. Στο τέλος της πρώτης ημέρας έφθασε στο σημείο A , στο τέλος της δεύτερης ημέρας έφθασε στο σημείο B και στο τέλος της τρίτης ημέρας έφθασε στο σημείο T . Οι τρεις ημέρες του ταξιδιού του μπορούν να περιγραφούν από τα παρακάτω διανύσματα

$$\overrightarrow{OA} = (1, 1), \quad \overrightarrow{AB} = (2, 4), \quad \overrightarrow{BT} = (2, 5\sqrt{3} - 5),$$

όπως φαίνονται στο σχήμα:



Αν οι αποστάσεις εκφράζονται σε χιλιόμετρα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OT} = (5, 5\sqrt{3})$.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την απόσταση (OT) του εξερευνητή από την κατασκήνωση στο τέλος της τρίτης ημέρας.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Τα διανύσματα $\vec{OA}, \vec{AB}, \vec{BT}$ είναι διαδοχικά, επομένως ισχύει:

$$\vec{OT} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BT} = (1, 1) + (2, 4) + (2, 5\sqrt{3} - 5) = (5, 5\sqrt{3})$$

β) Η απόσταση (OT) του εξερευνητή από την κατασκήνωση στο τέλος της τρίτης ημέρας δίνεται από το μέτρο του διανύσματος $\vec{OT}$. Έτσι είναι:

$$|\vec{OT}| = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{25 + 75} = \sqrt{100} = 10$$

Επομένως, η απόσταση από την κατασκήνωση είναι 10 km.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$, $\Gamma(2, 5)$.

α) Να βρείτε σημείο Δ ώστε $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB}$.

(Μονάδες 10)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το κέντρο O του παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Αν υποθέσουμε ότι το σημείο Δ έχει συντεταγμένες (x, y) , τότε είναι $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (2 - x, 5 - y)$ και $\overrightarrow{AB} = (-3 - 1, 4 - 2) = (-4, 2)$, οπότε

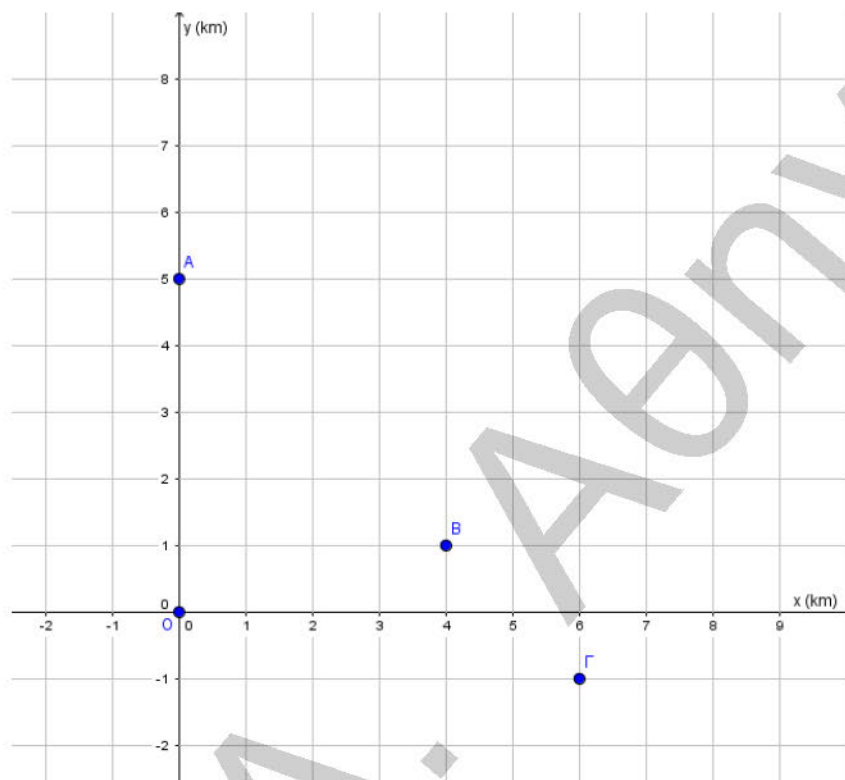
$$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (2 - x, 5 - y) = (-4, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = -4 \\ 5 - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

β) Από την ισότητα $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB}$, προκύπτει ότι στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ οι απέναντι πλευρές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες και έχουν ίδιο μήκος, οπότε το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το κέντρο Ο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του και είναι το μέσο κάθε διαγωνίου. Το μέσο της ΑΓ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{1+2}{2}, \frac{2+5}{2}\right)$ οπότε το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο $O\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ 2

Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής, η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία $A(0,5)$, $B(4,1)$ και $\Gamma(6,-1)$ παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στο χάρτη.



α)

- i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 06)

- ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και ως εκ τούτου υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιασθεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό A είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό Γ .

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α)

i. Είναι $\overrightarrow{AB} = (4 - 0, 1 - 5) = (4, -4)$ και $\overrightarrow{BF} = (6 - 4, -1 - 1) = (2, -2)$.

ii. Είναι $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BF}) = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0$.

Επομένως $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{BF}$ και αφού υπάρχει κοινό σημείο το B , τότε τα σημεία A, B, F είναι συνευθειακά.

β) Είναι:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{2 \cdot 16} = 4\sqrt{2} \text{ και } |\overrightarrow{BF}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2}.$$

Επομένως έχουμε ότι $|\overrightarrow{AB}| = 2 |\overrightarrow{BF}|$.

2^{ος} τρόπος:

$$\text{Επειδή } \overrightarrow{AB} = (4, -4) = 2 \cdot (2, -2) = 2 \overrightarrow{BF} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 2 |\overrightarrow{BF}|.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\beta} = -4\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι τετραπλάσιο του μέτρου του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι παράλληλα τότε $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$.

Άρα, $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (-4) - (-8) \cdot 1 = -8 + 8 = 0$, ισχύει.

β) Το διάνυσμα $\vec{\beta}$ γίνεται

$$\vec{\beta} = (-8, -4) = -4(2, 1) = -4\vec{\alpha}.$$

γ) Παίρνουμε τα μέτρα στη σχέση του ερωτήματος β).

Άρα, $|\vec{\beta}| = |-4||\vec{\alpha}| = 4|\vec{\alpha}|$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $\Delta(4,5)$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (3, -3)$ και $\overrightarrow{AF} = (3,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(3,6)$.

(Μονάδες 11)

β)

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Αν $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ τότε:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A\Gamma} = (3,1) &\Leftrightarrow (x_\Gamma - 0, y_\Gamma - 5) = (3,1) \Leftrightarrow \\ x_\Gamma = 3 \text{ και } y_\Gamma - 5 = 1 &\Leftrightarrow y_\Gamma = 6.\end{aligned}$$

Άρα, $\Gamma(3,6)$.

β)

i. Είναι

$$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = (4 - 3, 5 - 6) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} = (1, -1).$$

ii. Έχουμε ότι:

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - (-3) \cdot 1 = -3 + 3 = 0.$$

(Εναλλακτικά: $\overrightarrow{AB} = (3, -3) = 3(1, -1) = 3\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.)

Άρα, τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι παράλληλα.

ΘΕΜΑ 2

Το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει βάση $B\Gamma$ και ύψος AO . Η κορυφή A είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και οι κορυφές B και Γ είναι σημεία του άξονα $x'x$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έστω $(B\Gamma) = 12$, $(AO) = 8$ και M το μέσο της πλευράς $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $A(0, 8)$, $B(-6, 0)$ και $\Gamma(6, 0)$.

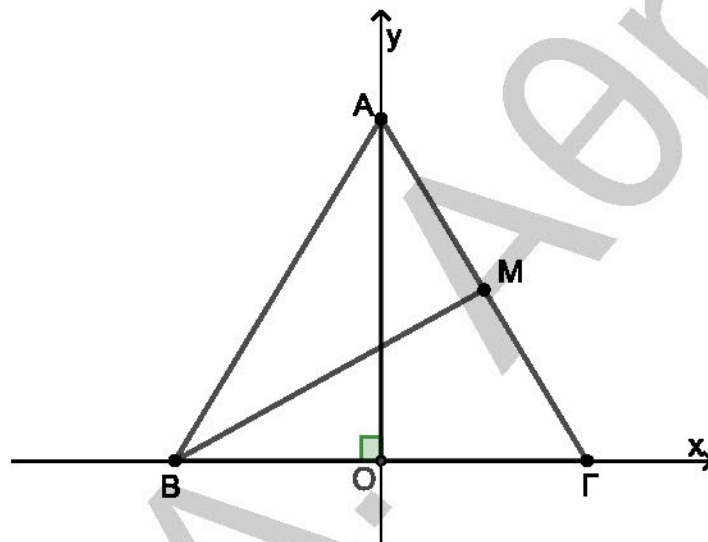
(Μονάδες 9)

ii. $M(3, 4)$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου BM .

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) i) Επειδή το Α είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Ογ και $(OA) = 8$ θα είναι $y_A = 8$, επομένως $A(0, 8)$.

Το Ο είναι το μέσο του ΒΓ και τα Β και Γ είναι σημεία του αρνητικού και του θετικού ημιάξονα των x, αντίστοιχα.

Επειδή $(B\Gamma) = 12$, θα είναι $|x_B| = |x_\Gamma| = \frac{(B\Gamma)}{2} = \frac{12}{2} = 6$, επομένως $B(-6, 0)$ και $\Gamma(6, 0)$.

ii) Οι συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΑΓ είναι:

$$x_M = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} = \frac{0 + 6}{2} = 3,$$

$$y_M = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} = \frac{8 + 0}{2} = 4,$$

άρα $M(3, 4)$.

β) Το μήκος της διαμέσου ΒΜ είναι

$$(BM) = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2} = \sqrt{(3 + 6)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{97}.$$

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -1)$ και ορίζουμε τα διανύσματα

$$\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}.$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

(Μονάδες 9)

β) Αν $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν τα $\vec{\beta}, \vec{w}, \vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων K, Λ, και Μ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ:

$$\alpha) \vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} = 3(1, -3) - 5(-2, -1) = (3, -9) - (-10, -5) = (13, -4)$$

και

$$\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta} = 5(1, -3) - 9(-2, -1) = (5, -15) - (-18, -9) = (23, -6).$$

$$\beta) \vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v} = 2(3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}) - (5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}) = 6\vec{\alpha} - 10\vec{\beta} - 5\vec{\alpha} + 9\vec{\beta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}.$$

$$\gamma) \quad \overrightarrow{KL} = \vec{w} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} \quad \text{και}$$

$$\overrightarrow{LM} = \vec{u} - \vec{w} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} - \vec{\alpha} + \vec{\beta} = 2\vec{\alpha} - 4\vec{\beta} = 2(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = 2 \cdot \overrightarrow{KL}$$

Άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{KL}$ και $\overrightarrow{LM}$ είναι παράλληλα, οπότε τα σημεία K, L, M είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,3)$, $\vec{\beta} = (-1,1)$ και $\vec{\gamma} = (-5,-5)$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ , μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Για τη γωνία ω που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$ είναι:

$$\varepsilon\phi\omega = \frac{y_{\beta}}{x_{\beta}} = \frac{1}{-1} = -1$$

Αφού είναι $x_{\beta} < 0$ και $y_{\beta} > 0$, για τη γωνία ω θα ισχύει:

$$\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$$

$$\text{Άρα, } \omega = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

β) Είναι:

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{x_{\gamma}^2 + y_{\gamma}^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|\vec{\beta}| = \sqrt{x_{\beta}^2 + y_{\beta}^2} = \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Επομένως, $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$.

γ) Ζητάμε τους πραγματικούς αριθμούς λ , μ για τους οποίους ισχύει η ισότητα:

$$\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$(-5, -5) = \lambda(2, 3) + \mu(-1, 1)$$

$$(-5, -5) = (2\lambda - \mu, 3\lambda + \mu)$$

Επομένως, είναι:

$$2\lambda - \mu = -5 \quad (1) \quad \text{και} \quad 3\lambda + \mu = -5 \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$5\lambda = -10 \quad \text{ή} \quad \lambda = -2$$

Αντικαθιστούμε στην (2), οπότε:

$$3(-2) + \mu = -5 \quad \text{ή} \quad \mu = -5 + 6 = 1$$

Άρα, το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ γράφεται ως εξής:

$$\vec{\gamma} = -2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

ΘΕΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(3, 4)$, $B(2, 1)$, $\Gamma(3, -1)$ και $\Delta(4, 2)$.

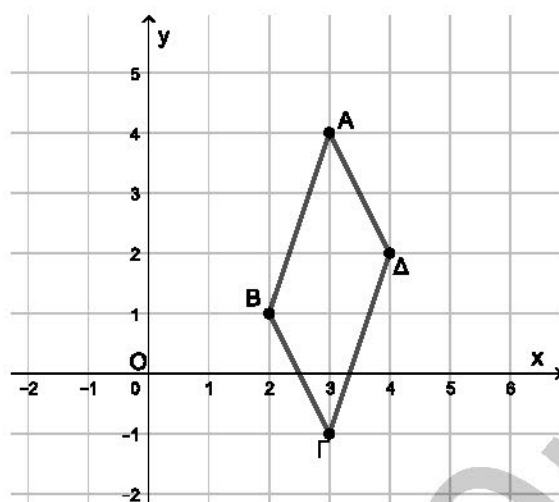
α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία A, B, Γ και Δ . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α)



β) Είναι $A(3, 4)$, $B(2, 1)$, $\Gamma(3, -1)$ και $\Delta(4, 2)$, οπότε οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ θα είναι

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (2 - 3, 1 - 4) = (-1, -3),$$

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (x_\Gamma - x_\Delta, y_\Gamma - y_\Delta) = (3 - 4, -1 - 2) = (-1, -3).$$

γ) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$. Άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ θα έχουν ίσα μέτρα και θα είναι παράλληλα χωρίς να συμπίπτουν. Επομένως οι πλευρές AB και $\Delta\Gamma$ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ θα είναι ίσες και παράλληλες, οπότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

ΘΕΜΑ 2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(-1, 6)$, $B(1, 2)$ και $\Gamma(3, -2)$.

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το B είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$. (Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (1 - (-1), 2 - 6) = (2, -4)$.

Επίσης $\overrightarrow{BG} = (x_G - x_B, y_G - y_B) = (3 - 1, -2 - 2) = (2, -4)$.

β) Από την απάντηση στο ερώτημα α) παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BG}$. Επομένως τα διανύσματα είναι συγγραμμικά και εφόσον το B είναι κοινό σημείο συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.

γ) Εφόσον $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BG}$ συμπεραίνουμε ότι το B είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

ΘΕΜΑ 2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(11,5)$, $\Gamma(3,7)$ και ένα σημείο Δ ώστε το $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

α) των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

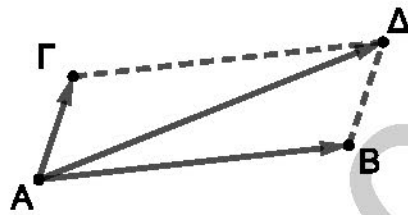
(Μονάδες 12)

β) του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$.

(Μονάδες 08)

γ) του σημείου Δ .

(Μονάδες 05)



ΛΥΣΗ

α) Για τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{AB}$ είναι:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (11 - 2, 5 - 4) = (9, 1).$$

Όμοια:

$$\overrightarrow{AI} = (x_I - x_A, y_I - y_A) = (3 - 2, 7 - 4) = (1, 3).$$

β) Το διάνυσμα $\overrightarrow{AD}$ είναι ίσο με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI}$.

$$\text{Άρα } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} = (9 + 1, 1 + 3) = (10, 4).$$

γ) Έχουμε $\overrightarrow{AD} = (x_D - x_A, y_D - y_A)$. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του σημείου A και τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AD}$, η τελευταία ισότητα γίνεται:

$$(10, 4) = (x_D - 2, y_D - 4) \text{ ή } \begin{cases} x_D - 2 = 10 \\ y_D - 4 = 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x_D = 12 \\ y_D = 8 \end{cases}$$

Άρα $D(12, 8)$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$ και $B(6,7)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.

(Μονάδες 07)

β) Αν $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$.

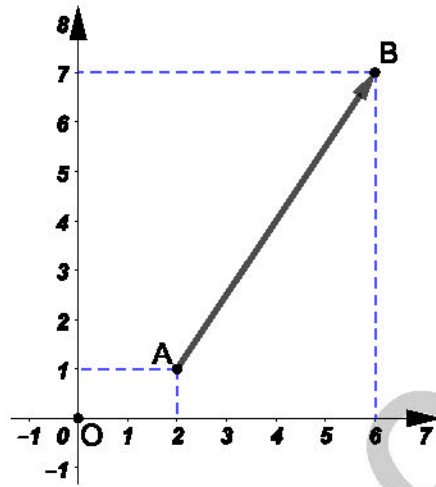
(Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = (-8, -12)$ και $\vec{v}$ του β) ερωτήματος είναι αντίρροπα.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Σχεδιάζουμε τους άξονες του καρτεσιανού επιπέδου και τα δύο σημεία $A(2,1)$ και $B(6,7)$. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με αρχή το A και πέρας το B.



β) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (6 - 2, 7 - 1) = (4, 6)$.

γ) Παρατηρούμε ότι $\vec{u} = (-8, -12) = (-2 \cdot 4, -2 \cdot 6) = -2 \cdot (4, 6) = -2 \cdot \vec{v}$.

Εφόσον υπάρχει αρνητικός πραγματικός αριθμός $\lambda = -2$, ώστε $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$, τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι αντίρροπα.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3,3)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσής των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 16)

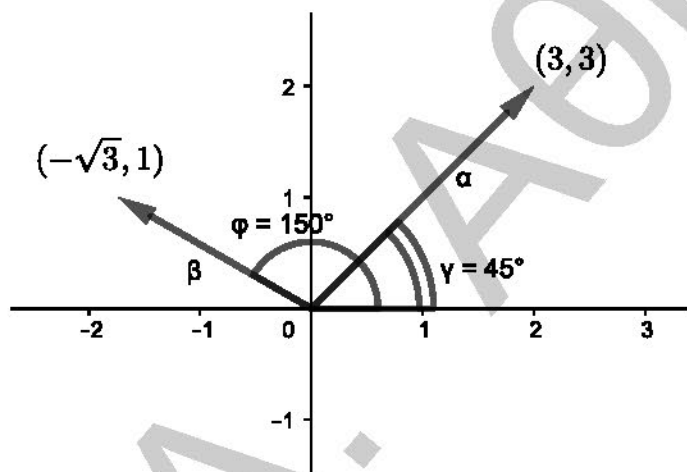
β) Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$. (Μονάδες 09)

ΛΥΣΗ

α) $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{3}{3} = 1$ και $\lambda_{\vec{\beta}} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$ και ϕ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$, τότε $\epsilon\phi\omega = \lambda_{\vec{\alpha}} = 1$ και $\epsilon\phi\phi = \lambda_{\vec{\beta}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο, άρα $\omega = 45^\circ$ και το διάνυσμα $\vec{\beta}$ βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο, άρα $\phi = 150^\circ$.

β) Η γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$ ισούται με τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$ αν αφαιρέσουμε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον $x'x$.

Δηλαδή $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 150^\circ - 45^\circ = 105^\circ$.



ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{\alpha} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$, $\vec{\beta} = \sqrt{2}\vec{i}$, $\vec{\gamma} = -3\vec{j}$ και $\vec{\delta} = (-1, 1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$.

(Μονάδες 09)

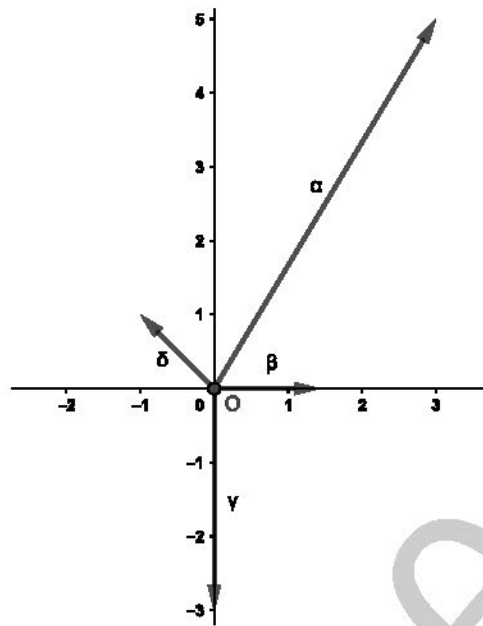
β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Οx.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

(Μονάδες 06)

ΛΥΣΗ



Τα διανύσματα που δίνονται έχουν συντεταγμένες $\vec{\alpha} = (3, 3\sqrt{3})$, $\vec{\beta} = (\sqrt{2}, 0)$, $\vec{\gamma} = (0, -3)$ και $\vec{\delta} = (-1, 1)$.

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος, όταν η τετμημένη του δεν είναι μηδέν, ορίζεται ως το πηλίκο τεταγμένη του διανύσματος προς τετμημένη του διανύσματος. Οπότε

$$\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}, \quad \lambda_{\vec{\beta}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0, \quad \lambda_{\vec{\delta}} = \frac{1}{-1} = -1.$$

β) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει ένα διάνυσμα με το θετικό ημιάξονα Ox ισούται με το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος.

Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με το θετικό ημιάξονα Ox , επειδή $\lambda_{\vec{\alpha}} = \sqrt{3}$ (από ερώτημα α), θα ισχύει $\tan \omega = \sqrt{3}$. Επιπλέον το πέρας του διανύσματος βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο, αφού έχει θετικές συντεταγμένες, άρα $\omega = 60^\circ$.

Το διάνυσμα $\vec{\beta} = (\sqrt{2}, 0)$, έχει τεταγμένη 0, άρα $\vec{\beta} // x'x$, και επειδή το $\vec{\beta}$ έχει θετική τετμημένη σχηματίζει με το θετικό ημιάξονα Ox γωνία 0° .

Το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (0, -3)$, έχει τετμημένη 0, άρα $\vec{\gamma} // y'y$, και επειδή το $\vec{\gamma}$ έχει αρνητική τεταγμένη σχηματίζει με το θετικό ημιάξονα Ox γωνία 270° .

Αν ϕ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Ox , επειδή $\lambda_{\vec{\delta}} = -1$ (από ερώτημα α), θα ισχύει $\tan \phi = -1$. Επιπλέον το διάνυσμα έχει αρνητική τετμημένη και θετική τεταγμένη, οπότε το πέρας του βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο, άρα $\phi = 145^\circ$.

$$\gamma) |\vec{\alpha}| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3.$$

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τρίγωνο OAB , με $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = (6,8)$. Για το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γνωρίζουμε ότι $\vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}| - 4, |\vec{\alpha}| - 2)$

α) Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 2$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε σημείο Γ έτσι, ώστε το τετράπλευρο $OAGB$ να αποτελεί παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η πλευρά OA με τη διαγώνιο AB του παραλληλογράμμου $OAGB$.

(Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $|\vec{\alpha}|^2 = (|\vec{\alpha}| - 4)^2 + (|\vec{\alpha}| - 2)^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 - 12|\vec{\alpha}| + 20 = 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = 2 \text{ ή } |\vec{\alpha}| = 10.$

Αν $|\vec{\alpha}| = 2$ τότε $\vec{\alpha} = (-2, 0)$ και τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha} = (-2, 0)$ και $\vec{OB} = (6, 8)$ δεν είναι παράλληλα (σχηματίζουν τρίγωνο), αφού $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$ επομένως η λύση είναι δεκτή.

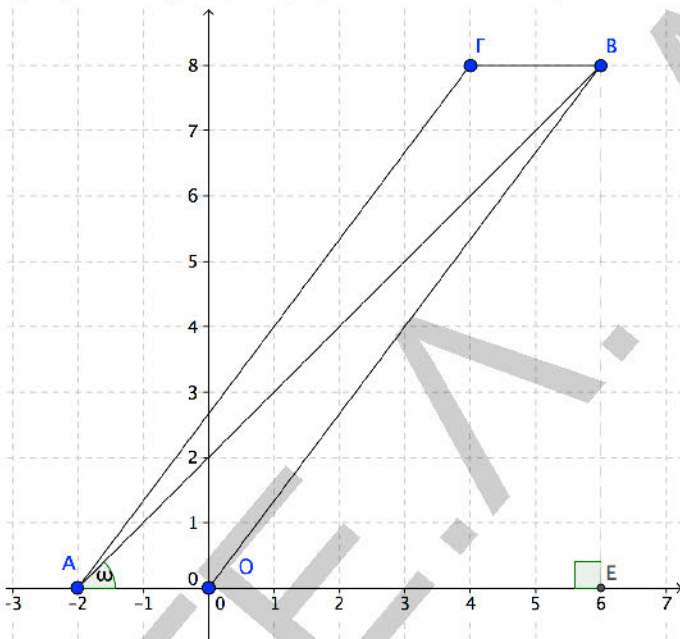
Αν $|\vec{\alpha}| = 10$, τότε $\vec{\alpha} = (6, 8) = \vec{OB}$ επομένως τα διανύσματα $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$ δεν σχηματίζουν τρίγωνο. Έτσι, η λύση αυτή απορρίπτεται.

β) Για να είναι το τετράπλευρο $OAGB$ παραλληλόγραμμο πρέπει και αρκεί

$\vec{OA} = \vec{BG}$ (1). Αν $G(x, y)$ τότε η σχέση (1) γράφεται:

$(-2, 0) = (x - 6, y - 8) \Leftrightarrow x - 6 = -2 \text{ και } y - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ και } y = 8$, δηλαδή $G(4, 8)$.

γ) Αρκεί να βρούμε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{AO}$ και $\vec{AB}$.



Α' τρόπος:

Το διάνυσμα $\vec{AB}$ είναι $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (8, 8)$. Επίσης $\vec{AO} = -\vec{OA} = (2, 0)$.

Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{AO}$ και $\vec{AB}$, τότε:

$$\cos \omega = \frac{\vec{AO} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AO}| \cdot |\vec{AB}|} = \frac{\vec{AO} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AO}| \cdot |\vec{AB}|} = \frac{16}{2 \cdot 8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$$

Β' τρόπος:

Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι, αν $E(6, 0)$ είναι η προβολή του σημείου B πάνω στον άξονα $x'x$ τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ABE έχουμε:

$$\cos \omega = \frac{BE}{EA} = \frac{8}{8} = 1 = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4}.$$

ΘΕΜΑ 4

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} \text{ και } \overrightarrow{OB} = (\lambda + 1)\vec{i} + (\lambda + 3)\vec{j}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (\lambda - 1)\vec{i} + 3\vec{j}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B ως συνάρτηση του λ . (Μονάδες 7)

γ) Για ποιές τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με 5; (Μονάδες 7)

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων A και B να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$

$$= (\lambda + 1)\vec{i} + (\lambda + 3)\vec{j} - 2\vec{i} - \lambda\vec{j} = (\lambda + 1 - 2)\vec{i} + (\lambda + 3 - \lambda)\vec{j} = (\lambda - 1)\vec{i} + 3\vec{j}.$$

β) Η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με

$$(AB) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 3^2} = \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 9}, \lambda \in$$

γ) Είναι $(AB) = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 9} = 5 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 + 9 = 25 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 16$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 4^2 \Leftrightarrow (\lambda - 1 = 4 \text{ ή } \lambda - 1 = -4) \Leftrightarrow \lambda = 5 \text{ ή } \lambda = -3.$$

δ) Για κάθε πραγματικό αριθμό λ έχουμε

$$(\lambda - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 + 9 \geq 9 \Leftrightarrow \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 9} \geq \sqrt{9} \Leftrightarrow (AB) \geq 3,$$

όπου η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $(\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

Άρα, για κάθε πραγματικό αριθμό $\lambda \neq 1$ η απόσταση των σημείων A και B είναι $(AB) > 3$.

Όταν $\lambda = 1$ η απόσταση των σημείων A και B είναι $(AB) = 3$ και αυτή είναι η μικρότερη δυνατή τιμή της.

(Άλλος τρόπος: Η απόσταση των σημείων A και B γράφεται:

$$(AB) = \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 9} = \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 10}, \lambda \in$$

και παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή, όταν το τριώνυμο $\lambda^2 - 2\lambda + 10$, παρουσιάζει ελάχιστο.

Αυτό συμβαίνει όταν $\lambda = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Είναι $\alpha = 1$, $\beta = -2$ και $\gamma = 10$, οπότε το τριώνυμο

$\lambda^2 - 2\lambda + 10$, παρουσιάζει ελάχιστο για $\lambda = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$.)

Επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(-3, -1)$, $B(0, 3)$ και $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AM}$, $\vec{MB}$ και $\vec{AB}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{AM}$, $\vec{MB}$ και $\vec{AB}$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\vec{AM}| + |\vec{MB}| \geq 5$. (Μονάδες 6)

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) τέτοιο ώστε να ισχύει $\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 4$.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AM}$, $\vec{MB}$ και $\vec{AB}$ είναι αντίστοιχα

$$\vec{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A) = (x + 3, y + 1),$$

$$\vec{MB} = (x_B - x_M, y_B - y_M) = (-x, 3 - y),$$

$$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (3, 4).$$

β) Τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{AM}$, $\vec{MB}$ και $\vec{AB}$ είναι αντίστοιχα

$$|\vec{AM}| = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(x + 3)^2 + (y + 1)^2},$$

$$|\vec{MB}| = \sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 3)^2},$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

γ) Για το μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων ισχύει

$$|\vec{AM} + \vec{MB}| \leq |\vec{AM}| + |\vec{MB}| \text{ ή } |\vec{AB}| \leq |\vec{AM}| + |\vec{MB}| \text{ ή } 5 \leq |\vec{AM}| + |\vec{MB}|, \text{ άρα}$$

$$|\vec{AM}| + |\vec{MB}| \geq 5.$$

δ) Από το γ) ερώτημα για οποιοδήποτε σημείο $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου ισχύει

$$|\vec{AM}| + |\vec{MB}| \geq 5, \text{ οπότε αντικαθιστώντας από το β) ερώτημα θα έχουμε}$$

$$\sqrt{(x + 3)^2 + (y + 1)^2} + \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} \geq 5.$$

Οπότε δεν υπάρχει ζεύγος (x, y) πραγματικών αριθμών ώστε να ισχύει

$$\sqrt{(x + 3)^2 + (y + 1)^2} + \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = 4.$$

Επομένως ο ισχυρισμός είναι ψευδής.