Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-4, 3)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 1.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Παίρνουμε $\vec{\beta}=(3{,}4)$.

$\vec{\beta}\perp\vec{\alpha}$ καθώς $\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}=(3{,}4)\cdot(-4,3)=3\cdot(-4)+4\cdot3=-12+12=0$.

β) Αν $\vec{\beta}$ είναι το διάνυσμα του α) ερωτήματος, τότε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ είναι:

i. κάθετο στο $\vec{\alpha}$, αφού $\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}\cdot\vec{\alpha}=\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}}{|\vec{\beta}|}=0$ και

ii. μέτρου 1 (αφού $\left|\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}\right|=\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\beta}|}=1$).

Οπότε:

$\vec{\gamma}=\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}=\frac{(3{,}4)}{\sqrt{3^2+4^2}}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$.

## ΘΕΜΑ 2

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δυο διανύσματα για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(11,\, 2)$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(-5,\, -10)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}=(3,\, -4)$ και να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 14)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$.

(Μονάδες 11)

ΛΥΣΗ

α) Αν προσθέσουμε τις δοσμένες διανυσματικές ισότητες, παίρνουμε

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(11,\,2)+(-5,\,-10)$$

δηλαδή $2\vec{\alpha}=(6,\,-8)$, οπότε $\vec{\alpha}=(3,\,-4)$.

Με $\vec{\alpha}=(3,\,-4)$ η πρώτη ισότητα δίνει

$$\vec{\beta}=(11,\,2)-(3,\,-4)=(8,\,6)$$

β) Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,\,-4)$ και $\vec{\beta}=(8,\,6)$ έχουμε

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=(3,\,-4)(8,\,6)=24-24=0$$

οπότε $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$. Επιπλέον,

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5,\ |\vec{\beta}|=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$$

οπότε $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία Α(1,2), Β(3,4) και Γ(5,-2).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$ είναι ορθή. (Μονάδες 9)

β) Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$. (Μονάδες 8)

γ) Να γραφεί το $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3-1, 4-2) = (2,2)$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = (5-1, -2-2) = (4,-4)$.

Οπότε $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) = 0$. Άρα $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$, οπότε $\widehat{\mathrm{A}} = 90^{\circ}$.

β) Το Μ είναι το μέσο του ΒΓ, άρα οι συντεταγμένες του είναι $\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+4}{2}\right)$, δηλαδή $\mathrm{M}(4,1)$

και $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = (3,-1)$, άρα $\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α και η ΑΜ είναι διάμεσος, άρα (ΒΓ)=2(ΑΜ) και επομένως $\left|\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\right| = 2\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right| = 2\sqrt{10}$.

γ) $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = 2\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}} = 2\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right) = -2\overrightarrow{\mathrm{AM}} + 2\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1\,,-2)$ και $\vec{\beta} = (2\,,3)$

α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

(Μονάδες 08)

β) Αν $\vec{u} = (4\,,-1)$ να βρείτε την τιμή του $\kappa \in R$ ώστε το διάνυσμα $\vec{u}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{v} = (1\,,\kappa)$.

(Μονάδες 09)

γ) Για $\kappa = 4$ να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}$ του προηγούμενου ερωτήματος.

(Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} = 2\cdot(1\,,-2) + (2\,,3) = (2\,,-4) + (2\,,3) = (4\,,-1)$

β) Για να είναι κάθετα τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{u}\,,\vec{v}$ πρέπει και αρκεί να ισχύει

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow (4\,,-1)\cdot(1\,,\kappa) = 0 \Leftrightarrow 4\cdot 1 + (-1)\cdot\kappa = 0 \Leftrightarrow 4 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 4$

γ) Για $\kappa = 4$ έχουμε $\vec{v} = (1\,,4)$ και το μέτρο του είναι $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$ .

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ , $\vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ και $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

α) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$ συναρτήσει του διανύσματος $\vec{\beta}$ .

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

α) Το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ μπορεί να γραφεί ως διαφορά των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$, δηλαδή

$\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ τότε $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 2 \cdot \vec{\beta}$.

β) Για να υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ αρκεί να αντικαταστήσουμε αντίστοιχα τα διανύσματα και να κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\beta}|^2 = 0$.

γ) Επειδή το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων είναι μηδέν τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ είναι κάθετα.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διάνυσμα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{\beta}| = 4|\vec{\alpha}|$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) $\vec{\alpha} = (2,1)$, $\vec{\beta} = (-8,-4) = -4\vec{\alpha}$. Άρα, $\vec{\beta} = -4\,\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.

Επειδή $\vec{\beta} = -4\,\vec{\alpha}$ τότε $|\vec{\beta}| = |-4\,\vec{\alpha}| = 4|\vec{\alpha}|$.

β) Επειδή, $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ η μεταξύ τους γωνία θα είναι $180°$.

γ) Το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (-4\vec{\alpha}) = -4 \cdot \vec{\alpha}^2 = -4 \cdot |\vec{\alpha}^2| < 0$ αφού $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(2,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,-1)$.

α) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma}=(1,-2)$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την ΑΓ.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,-1)-(2,1) = (1,-2)$.

β) Είναι $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = (2,1)\cdot(1,-2) = 2-2 = 0$ οπότε $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$.

Επίσης $\left|\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\right| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$ και $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$.

Αφού $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ και $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\right|$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την ΑΓ.

γ) Είναι $(\mathrm{AB\Gamma}) = \dfrac{(\mathrm{AB})\cdot(\mathrm{B\Gamma})}{2} = \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\right|}{2} = \dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{2} = \dfrac{5}{2}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3,2)$, $\overrightarrow{\beta} = (-2,1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το διάνυσμα $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.

(Μονάδες 7)

β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$ .

(Μονάδες 6)

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{v}$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Δίνονται οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τότε

$$\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = 2(3,2) + 3(-2,1) = (0,7).$$

β) Υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -6 + 2 = -4.$
- $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$

γ) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{v}$ υπολογίζεται

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \left(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}\right) = 2|\vec{\alpha}|^2 + 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 \cdot 13 + 3(-4) = 26 - 12 = 14.$$

ΘΕΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο $Oxy$, με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$, $y'y$ τα $\vec{i}, \vec{j}$ αντίστοιχα, τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ και $\overrightarrow{OB} = 6\vec{i} - \vec{j}$.

Έστω M ένα σημείο τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}\left(2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$, (Μονάδες 8)

ii. $\overrightarrow{OM} = \vec{j}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM}$. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι

i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 6\vec{i} - \vec{j} - (3\vec{i} + 2\vec{j}) = 6\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{i} - 2\vec{j} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$.

ii) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}\left(2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{5}\left(2(3\vec{i} + 2\vec{j}) - (6\vec{i} - \vec{j})\right) = \frac{1}{5}(6\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{i} + \vec{j}) = \frac{1}{5}(5\vec{j}) = \vec{j}$.

β) Για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ ισχύουν $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ και $\vec{j}^2 = 1$. Επομένως,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM} = (3\vec{i} - 3\vec{j}) \cdot \vec{j} = (3\vec{i}) \cdot \vec{j} - (3\vec{j}) \cdot \vec{j} = 3(\vec{i} \cdot \vec{j}) - 3 \cdot \vec{j}^2 = 3 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (-1,3), $\vec{\beta}$ = (-2, $-\frac{1}{2}$ ) και $\vec{v} = (x^2, x-1)$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u}$ = (3,4) και $\vec{v}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά;

(Μονάδες 09)

ΛΥΣΗ

α) $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ = (-1,3) – 2(-2, -$\frac{1}{2}$ ) = (-1,3) + $(4,1)$ = (-1+4,3+1) = (3,4)

β) Για να είναι κάθετα τα διανύσματα θα πρέπει το εσωτερικό τους γινόμενο να είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή $\vec{u} \cdot \vec{v}$ = 0 ή (3,4)·$(x^2, x-1) = 0$ ή $3x^2+4(x-1)$ = 0 ή $3x^2+4x-4$ = 0. Η διακρίνουσα είναι 64 και οι ρίζες x = $\frac{2}{3}$ και x = -2.

γ) Για να είναι τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ συγγραμμικά πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών τους να είναι μηδέν.

$\begin{vmatrix} x^2 & x-1 \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$ ή $-\frac{1}{2}x^2 - (-2)(x-1) = 0$ ή $-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 = 0$ ή $x^2 - 4x + 4 = 0$ ή χ = 2.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ . Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ . (Μονάδες 10)

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$ (1) και $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - \vec{\gamma} = 0$ (2).

Οπότε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot$συν$(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$, από την οποία λόγω των (1) παίρνουμε:

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 4\cdot5\cdot$συν$\frac{2\pi}{3} = 20\cdot(-\frac{1}{2}) = -10$.

β) Έχουμε: $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} \Longrightarrow \vec{\gamma}^2 = (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})^2 \Longrightarrow$

$|\vec{\gamma}|^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2 \Longrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 9|\vec{\beta}|^2$,

η οποία λόγω της (1) και του ερωτήματος (α) γράφεται:

$|\vec{\gamma}|^2 = 4\cdot4^2 + 12\cdot(-10) + 9\cdot5^2 \Longrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 64 - 120 + 225 \Longrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 169 \Longrightarrow |\vec{\gamma}| = 13$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1,1)$, $\vec{w} = (-10,2)$ και τα σημεία Α$(-1,2)$, Β$(\beta, 0)$, Γ$(0, \gamma)$. Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και να αποδείξετε ότι $\beta = 1$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{9}{5}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι $\overrightarrow{AB}=(\beta-(-1),0-2)=(\beta+1,-2)$.

Αφού τα διανύσματα $\vec{u},\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα θα ισχύει $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

Άρα $1\cdot(\beta+1)+1\cdot(-2)=0 \Leftrightarrow \beta+1-2=0 \Leftrightarrow \beta=1$.

β) Οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι $\overrightarrow{A\Gamma}=(0-(-1),\gamma-2)=(1,\gamma-2)$.

Αφού τα διανύσματα $\vec{w},\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι παράλληλα, η ορίζουσά τους θα ισούται με μηδέν, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} -10 & 2 \\ 1 & \gamma-2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -10(\gamma-2)-2\cdot 1=0 \Leftrightarrow \gamma=\frac{9}{5}.$$

γ) Από τα ερωτήματα α), β) έχουμε ότι $\overrightarrow{AB}=(2,-2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\left(1,-\frac{1}{5}\right)$.

Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=2\cdot 1+(-2)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=2+\frac{2}{5}=\frac{12}{5}.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(6,3)$, $\Delta(1,-2)$ και $\Gamma(9,2)$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το μέσο $M$ του τμήματος $AB$ έχει συντεταγμένες $(4,2)$ και το μέσο $N$ του τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(5,0)$.

(Μονάδες 8)

β) $\overrightarrow{MN} = (1,-2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (8,4)$.

(Μονάδες 8)

γ) $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Αν $M(x_M, y_M)$ και $N(x_N, y_N)$, είναι

$$x_M = \frac{6+2}{2} = 4, \qquad y_M = \frac{3+1}{2} = 2$$

και

$$x_N = \frac{9+1}{2} = 5, \qquad y_N = \frac{2-2}{2} = 0.$$

β) Είναι $\overrightarrow{MN} = (5-4, 0-2) = (1,-2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \big(9-1, 2-(-2)\big) = (8,4)$.

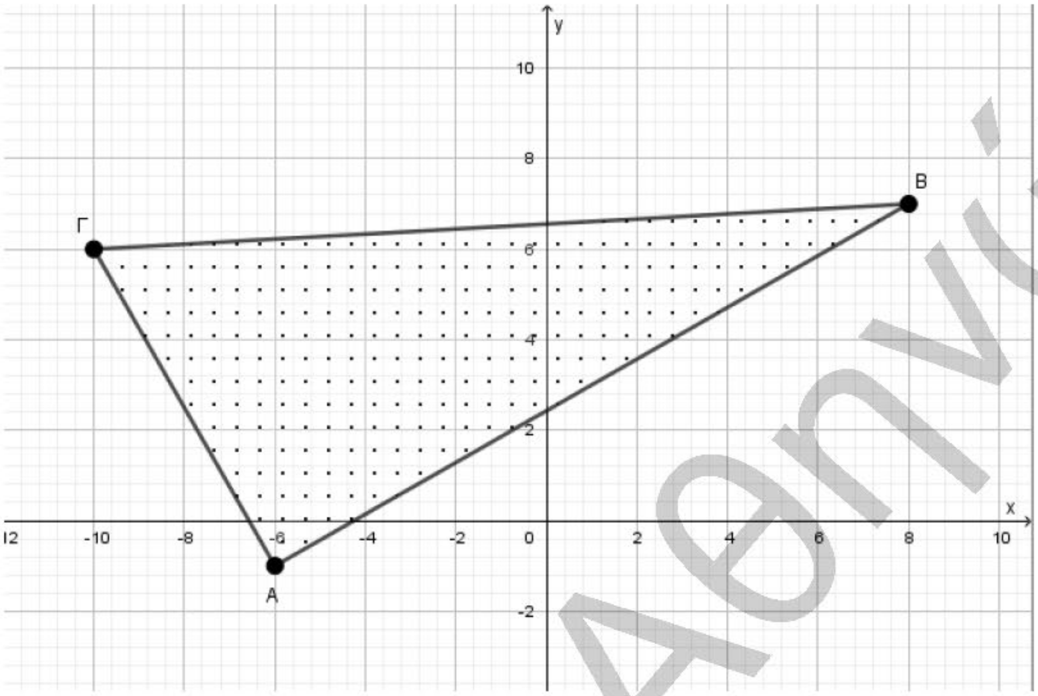
γ) Έχουμε ότι:

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} = (1,-2)\cdot(8,4) = 1\cdot 8 + (-2)\cdot 4 = 8-8 = 0.$$

Άρα, $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(-6,-1)$, $B(8,7)$, $\Gamma(-10,6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$.




α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και του αθροίσματος τους $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού.

(Μονάδες 15)

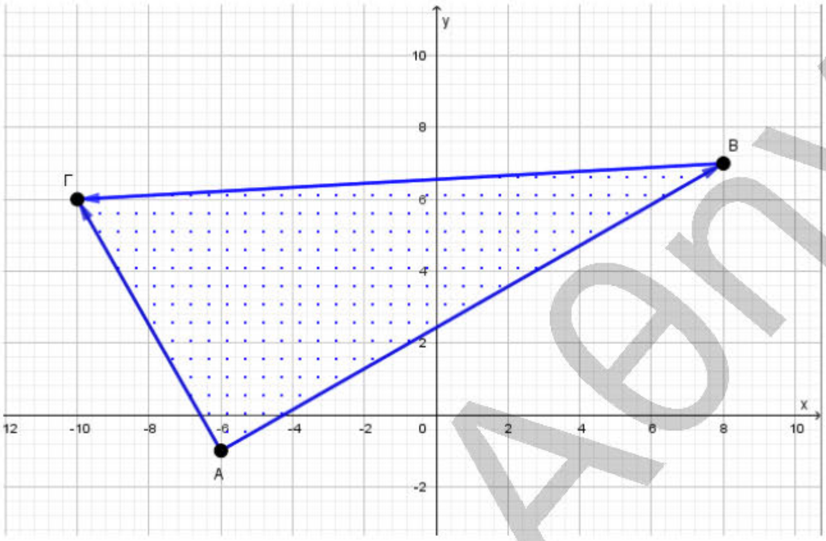
ΛΥΣΗ

α) $\overrightarrow{AB} = (8-(-6),\ 7-(-1)) = (14, 8)$,

$\overrightarrow{B\Gamma} = (-10-8, 6-7) = (-18, -1)$,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} = (-10-(-6), 6-(-1)) = (-4, 7)$.

β)




Στο σχήμα “φαίνεται” ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο, με ορθή γωνία την $\hat{A}$. Αλλά είναι αναγκαία η μαθηματική απόδειξη του ισχυρισμού. Πραγματικά είναι

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 14 \cdot (-4) + 8 \cdot 7 = -56 + 56 = 0$$

Επομένως, τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

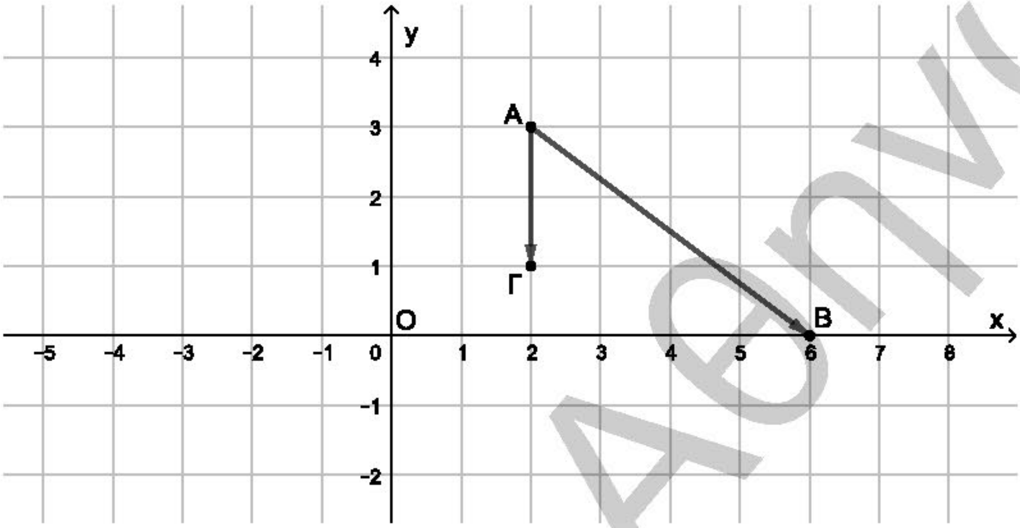
Εναλλακτική προσέγγιση: $\lambda_{AB} = \frac{4}{7}$, $\lambda_{A\Gamma} = -\frac{7}{4}$ και $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1$.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ του καρτεσιανού επιπέδου $Oxy$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (4\,,-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (0\,,-2)$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ . (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι τα σημεία $A\,,B$ και $\Gamma$ έχουν συντεταγμένες $A(2\,,3)$, $B(6\,,0)$ και $\Gamma(2\,,1)$. Επομένως οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ θα είναι

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,, y_B - y_A) = (6-2\,,\ 0-3\,) = (4\,,\ -3\,) \text{ και}$$

$$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A\,, y_\Gamma - y_A) = (2-2\,,\ 1-3\,) = (0\,,\ -2\,)\,.$$

β) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$, όπου $(x_1\,,\ y_1)$ και $(x_2\,, y_2)$ είναι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$, από το προηγούμενο ερώτημα, θα έχουμε

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = 4\ \cdot 0 + (-3)\cdot(-2) = 0 + 6 = 6.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με: $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$ και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}$. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

Έχουμε: $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (1) , $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$ (2) και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$ (3).

α) Από την (3) $\Leftrightarrow$ $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow (3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})^2 = (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2 \Leftrightarrow$

$9\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = \vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow 16\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -8\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{1}{2}\vec{\alpha}^2 = -\frac{1}{2}|\vec{\alpha}|^2$.

Η τελευταία σχέση, λόγω της (1) δίνει: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = -\frac{3}{8}$.

β) Επίσης: $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$ .

Η τελευταία ισότητα λόγω του ερωτήματος (α) και των (1), (2) δίνει:

$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{-\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}} = -\frac{3\cdot 4}{8\cdot\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\cdot\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, άρα $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{5\pi}{6}$ ή $150^0$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία Α(-2 , 3), Β (0 , 8), Γ (5 , 3) και Δ (10 , 5). Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. (Μονάδες 12)

β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u}$ = $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ + $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ με τον άξονα x'x. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\overrightarrow{AB}$ = ($x_B - x_A$ , $y_B - y_A$) = ( 0 + 2 , 8 – 3) = (2 , 5).

Επίσης: $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ = ($x_\Delta - x_\Gamma$ , $y_\Delta - y_\Gamma$) = ( 10 -5 , 5 – 3) = (5 , 2).

Οπότε: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ = (2 , 5)· (5 , 2) = 2·5 + 5·2 = 10 + 10 = 20.

β) Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u}$ με τον άξονα x'x, τότε εφω= $\lambda_{\vec{u}}$ όπου $\lambda_{\vec{u}}$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{u}$.

Είναι: $\vec{u}$ = $\overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ = (2 , 5) + (5 , 2) = (7 , 7), άρα εφω = $\lambda_{\vec{u}} = \frac{y_{\vec{u}}}{x_{\vec{u}}} = \frac{7}{7} = 1$.

Αφού το διάνυσμα $\vec{u}$ έχει θετικές συντεταγμένες, θα βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

Έτσι από τις σχέσεις εφω = 1 και $0 \leq \omega < \pi/2$, προκύπτει ότι $\omega = \frac{\pi}{4}$ .

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2 , -1)$ και $\vec{\beta} = (-3 , 2)$.

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (x , y)$ όταν $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = 2\cdot(2\ ,\ -1) - (-3\ ,\ 2) = (4\ ,\ -2) + (3\ ,\ -2) = (7\ ,\ -4)$, οπότε

$\vec{\alpha}\cdot(2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = (2\ ,\ -1)\cdot(7\ ,\ -4) = 14 + 4 = 18$.

β) Επίσης: $\vec{\gamma} = (x\ ,\ y)$ και $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow (x\ ,\ y)\cdot(2\ ,\ -1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0 \Leftrightarrow$

$y = 2x$ (1).

Λόγω της (1) το διάνυσμα γ γράφεται: $\vec{\gamma} = (x\ ,\ 2x)$.

Έτσι το $|\ \vec{\gamma}\ | = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5x^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$

$x = -1$ ή $x = 1$.

Για $x = -1$ το $\vec{\gamma} = (-1\ ,\ -2)$, ενώ για $x = 1$ το $\vec{\gamma} = (1\ ,\ 2)$.

ΘΕΜΑ 2

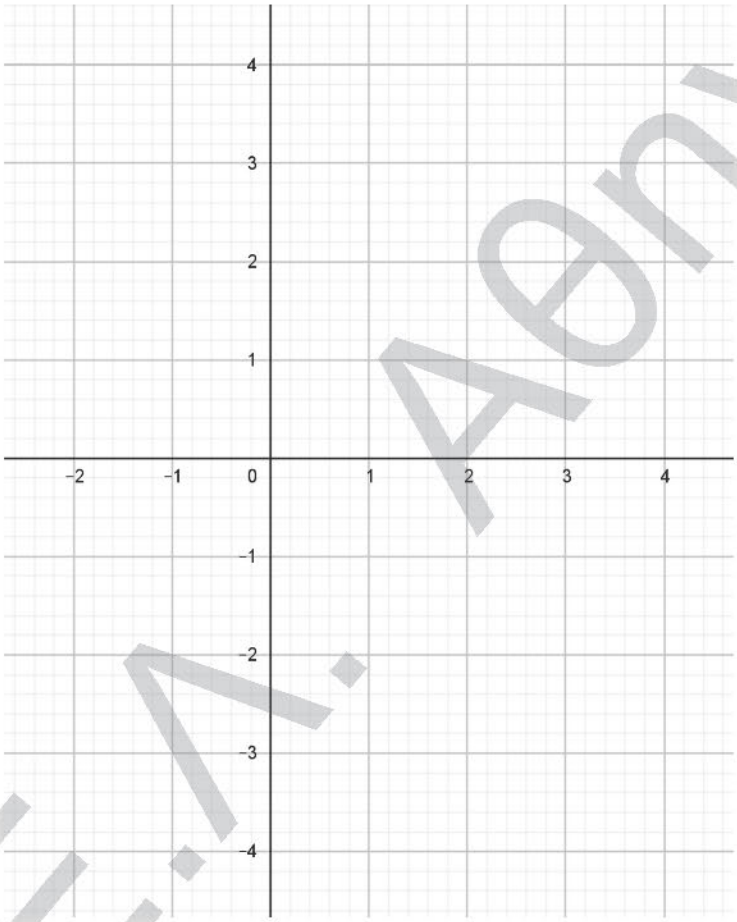
Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v}=(3,0)$ και $\vec{w}=(-3,4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

β)

i. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$.




(Μονάδες 10)

ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας $\theta$ που σχηματίζουν τα διανύσματα.

(Μονάδες 3)

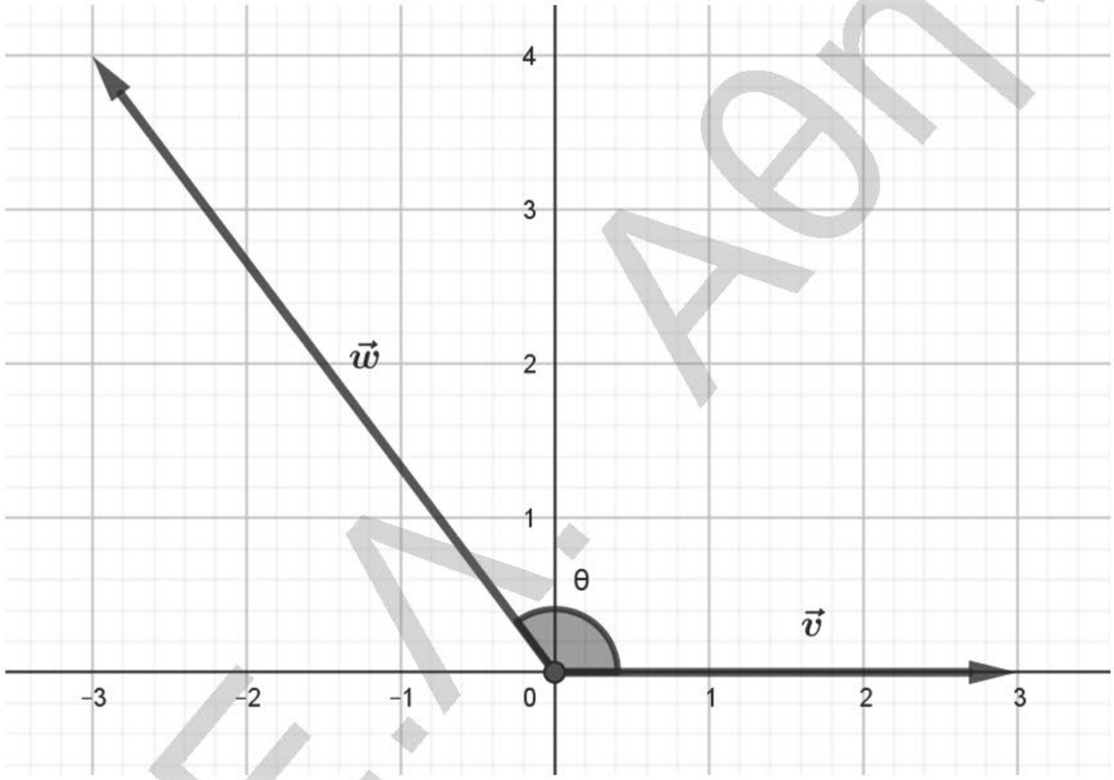
ΛΥΣΗ

α) Τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα, διότι

$$\det(\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}3 & 0\\ -3 & 4\end{vmatrix}=12-0=12\neq 0$$

β)

i. Στο σύστημα συντεταγμένων σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\vec{v}=(3,0)$ και $\vec{w}=(-3,4)$ ως εξής:




ii. Με βάση το σχήμα στο βi) ερώτημα, η γωνία $\theta$ που σχηματίζουν τα διανύσματα είναι αμβλεία.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-2,5), B(7,8), \Gamma(1,-4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$

$\overrightarrow{AB} = (7 - (-2),\ 8 - 5) = (9, 3)$

$\overrightarrow{A\Gamma} = (1 - (-2),\ -4 - 5) = (3, -9)$

β) Σύμφωνα με την αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου, θα έχουμε:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 9 \cdot 3 + 3 \cdot (-9) = 27 - 27 = 0.$

γ) Αν $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}}\right) = B\hat{A}\Gamma$, γνωρίζουμε ότι $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{A\Gamma}|$συνθ, άρα συνθ $= 0$.

Αλλά $0 \leq \theta \leq \pi$, έτσι $\theta = 90^0$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, πλευρά 4 και $\widehat{A} = 60^{o}$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :

α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$

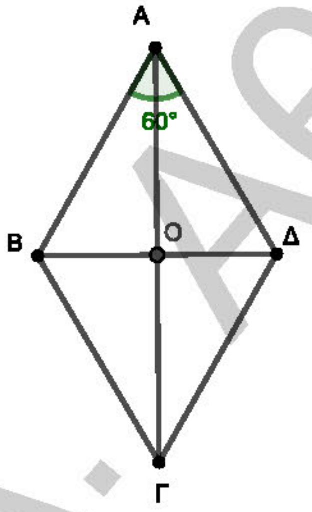
β) $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$

γ) $\overrightarrow{O\Delta} \cdot \overrightarrow{AO}$

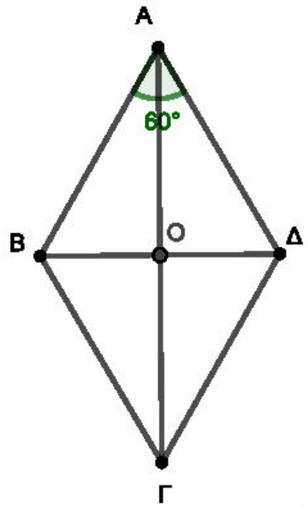
δ) $\overrightarrow{O\Delta} \cdot \overrightarrow{OB}$

ε) $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

(Μονάδες 25)



ΛΥΣΗ




α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{A\Delta}| \cdot \sigma\upsilon\nu(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Delta}}) = 4 \cdot 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\, 60^o = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$ .

β) Τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι ομόρροπα οπότε σχηματίζουν γωνία $0^o$ . Οπότε,

$\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = |\overrightarrow{A\Delta}| \cdot |\overrightarrow{B\Gamma}| \cdot \sigma\upsilon\nu(\widehat{\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{B\Gamma}}) = 4 \cdot 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\, 0^o = 16 \cdot 1 = 16$

γ) Οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούνται, οπότε $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{O\Gamma}$ , και τέμνονται κάθετα, οπότε τα διανύσματα $\overrightarrow{O\Delta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$ σχηματίζουν γωνία $90^o$ και έχουν εσωτερικό γινόμενο μηδέν. Συνεπώς $\overrightarrow{O\Delta} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{O\Delta} \cdot \overrightarrow{O\Gamma} = 0$

δ) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές αφού οι δυο πλευρές του είναι πλευρές του ρόμβου, με γωνία της κορυφής $60^o$. Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο με πλευρά 4. Το Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του , οπότε ΒΟ = ΟΔ = 2.

$\overrightarrow{O\Delta} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{O\Delta}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \sigma\upsilon\nu(\widehat{\overrightarrow{O\Delta}, \overrightarrow{OB}}) = 2 \cdot 2\, \sigma\upsilon\nu\, 180^o = 4\,(-1) = -4$.

ε) Για τη γωνία $(\widehat{\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}})$ ισχύει : $(\widehat{\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}}) = (\widehat{\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{BA}}) = 180^o - 60^o = 120^o$. Οπότε,

$\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta} = |\overrightarrow{A\Delta}| \cdot |\overrightarrow{\Gamma}\Delta| \cdot \sigma\upsilon\nu(\widehat{\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}}) = 4 \cdot 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\, 120^o = 16\,(-\frac{1}{2}) = -8$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 10 και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.

α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

i. $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}}\right)$

ii. $\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B\Gamma}}\right)$

iii. $\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{\Gamma A}}\right)$

iv. $\left(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{\Gamma M}}\right)$

v. $\left(\widehat{\overrightarrow{\Gamma M},\overrightarrow{\Gamma B}}\right)$

(Μονάδες 10)

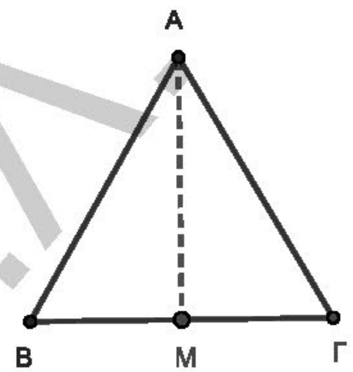
β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

i. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$

ii. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Gamma A}$

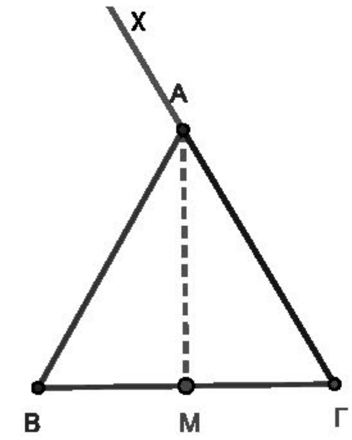
iii. $\overrightarrow{\Gamma M} \cdot \overrightarrow{\Gamma B}$

(Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α)




i. $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}}\right)$ = 60$^{\circ}$ .

ii. $\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}}\right)$ = 90$^{\circ}$ .

iii. $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}}\right)$ = $\widehat{\mathrm{xAM}}$ = 180$^{\circ}$ – 30$^{\circ}$ = 150$^{\circ}$. Καθώς η διάμεσος προς τη βάση είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

iv. $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BM}},\overrightarrow{\mathrm{\Gamma M}}}\right)$ = 180$^{\circ}$ .

v. $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{\Gamma M}},\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}}\right)$ = 0$^{\circ}$ .

β) Τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι 10 αφού το τρίγωνο είναι ισόπλευρο. Για το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$ έχουμε από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΜΓ : $\mathrm{AM}^2 = \mathrm{A\Gamma}^2 - \mathrm{M\Gamma}^2$ ή $\mathrm{AM}^2 = 10^2 - 5^2$ = 75 ή ΑΜ = 25 ·3 ή ΑΜ = 5 $\sqrt{3}$.

i. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = |\overrightarrow{AM}|\,|\overrightarrow{B\Gamma}|$συν $\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}}\right)$ = 5 $\sqrt{3}$ · 10 ·συν 90$^{\circ}$ = 0

ii. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Gamma A} = |\overrightarrow{AM}|\,|\overrightarrow{B\Gamma}|$συν $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}}\right)$ = 5$\sqrt{3}$ ·10 ·συν 150$^{\circ}$ = 50 $\sqrt{3}$ · (- $\frac{\sqrt{3}}{2}$ )= -75

iii. $\overrightarrow{\Gamma M} \cdot \overrightarrow{\Gamma B} = |\overrightarrow{\Gamma M}|\,|\overrightarrow{\Gamma B}|$συν $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{\Gamma M}},\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}}\right)$= 5 · 10 ·συν0$^{\circ}$ = 5 · 10 ·1 = 50.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$ , $|\vec{\beta}| = 4$ , $(\vec{\alpha} \hat{,} \vec{\beta}) = \dfrac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη $\left(\vec{\alpha} \hat{,} \vec{\gamma}\right)$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\hat{,}\vec{\beta})=2\cdot4\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=8\cdot\frac{1}{2}=4$.

β) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=\vec{\alpha}^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|^2-4=4-4=0$.

γ) Αφού $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\perp\vec{\gamma}\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}\hat{,}\vec{\gamma}\right)=\frac{\pi}{2}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,3), \vec{\beta} = (3,-1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(Μονάδες 13)

β) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ .

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δίνεται από το τύπο

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = 3 - 3 = 0.$$

Επειδή $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$ αν και μόνο αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, δηλαδή τα διανύσματα είναι μεταξύ τους κάθετα και η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ορθή.

β) Δίνονται οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τότε

$\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = 2(1,3) - (3,-1) = (2,6) - (3,-1) = (-1,7).$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(2,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma}=(1,-2)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{B\Gamma}|$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,-1)-(2,1)=(1,-2)$.

β) Είναι $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = (2,1)\cdot(1,-2) = 2-2 = 0$ οπότε $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$.

γ) Είναι $\left|\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\right| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$ και $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ οπότε $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\right|$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (2,3)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} = 2 \cdot (1,2) + (2,3) = (2+2, 4+3) = (4,7)$.

β) Έχουμε: $|\vec{\gamma}| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$.

γ) Βρίσκουμε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = (1,2) \cdot (4,7) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 18$.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $\left(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) \cdot \left(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}\right) = 15$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δίνεται από το τύπο

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ συν $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$=3·4·συν$\frac{\pi}{3} = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6.$

Άρα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 6.$

β) $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2 = 3^2 = 9 \; \kappa\alpha\iota \; \vec{\beta}^2 = \left|\vec{\beta}\right|^2 = 4^2 = 16.$

γ) $\left(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) \cdot \left(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}\right) = 3\vec{\alpha}^2 - \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} - 9\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 3\vec{\beta}^2 = 3\vec{\alpha}^2 - 10\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 3\vec{\beta}^2 =$

$$= 3 \cdot 9 - 10 \cdot 6 + 3 \cdot 16 = 15.$$

ΘΕΜΑ 4

α) Αν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Delta}$ είναι τρία διανύσματα, τότε οι ποσότητες $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$ : i) είναι αριθμοί ή διανύσματα; ii) μπορούν να συγκριθούν;

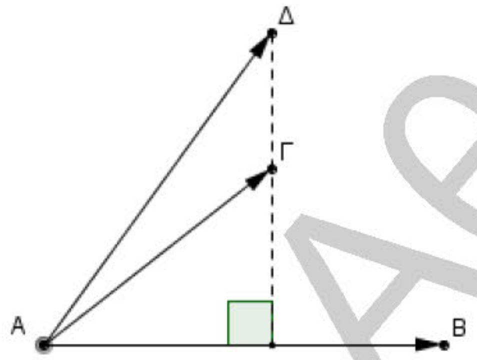
(Μονάδες 5)

β) Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} > \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$

ii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} < \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$

iii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$



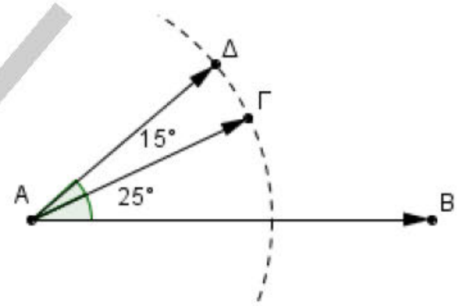

(Μονάδες 10)

γ) Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος (η διακεκομμένη γραμμή είναι τμήμα κύκλου με κέντρο $A$) να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} > \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$

ii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} < \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$

iii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$




(Μονάδες 10)

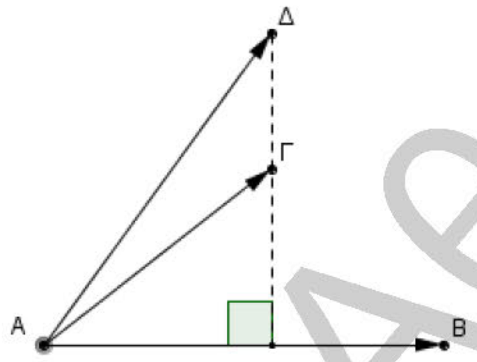
Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

ΛΥΣΗ

α) i) Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, εξ ορισμού, είναι αριθμός. Άρα, οι ποσότητες $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$ είναι αριθμοί.

ii) Ως αριθμοί, οι ποσότητες $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$ μπορούν να συγκριθούν και μάλιστα υπάρχουν τρεις περιπτώσεις: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}>\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$ ή $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}<\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$ ή $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$.

β) Στην περίπτωση αυτή ισχύει: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$




αφού:

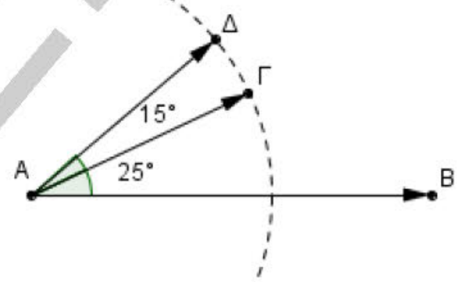
$\overrightarrow{\Gamma\Delta}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow(\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{A\Gamma})\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\left(\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{A\Gamma}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

Άρα,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$.

γ) Εδώ, τα $\Gamma,\Delta$ είναι σημεία κύκλου με κέντρο $A$ και ακτίνα, ας πούμε, $\rho$.

Οπότε, $|\overrightarrow{A\Gamma}|=|\overrightarrow{A\Delta}|=\rho$.




Έχουμε λοιπόν,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{A\Gamma}|\sigma\upsilon\nu 25^o=|\overrightarrow{AB}|\rho\sigma\upsilon\nu 25^o$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{A\Delta}|\sigma\upsilon\nu(25^o+15^o)=|\overrightarrow{AB}|\rho\sigma\upsilon\nu 40^o$

Όμως, $\sigma\upsilon\nu 25^o>\sigma\upsilon\nu 40^o$.

Άρα, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}>\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$.

ΘΕΜΑ 4

α) Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta}$.

(Μονάδες 5)

ii) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = \left||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.

(Μονάδες 5)

β) Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν ότι:

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}, \quad |\vec{\alpha}|=1, \quad |\vec{\beta}|=2, \quad |\vec{\gamma}|=1.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\gamma}$.

(Μονάδες 5)

ii) $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.

(Μονάδες 5)

iii) $\vec{\alpha}=\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}=-2\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα που σχηματίζουν γωνία θ, με $0^o \le \theta \le 180^o$.

i) Οι ποσότητες $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$, $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|$ είναι μη αρνητικές, οπότε:

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 = (|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\theta = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0^o \Leftrightarrow \vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta}.$$

ii) Οι ποσότητες $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$, $\big||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\big|$ είναι μη αρνητικές, οπότε:

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = \big||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\big| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 = \big||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\big|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\theta = -|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = -1 \Leftrightarrow \theta = 180^o \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}.$$

β) Από υπόθεση έχουμε: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0}$, $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = 1$.

i) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\alpha}+\vec{\gamma} = -\vec{\beta}$

Άρα,

$$|\vec{\alpha}+\vec{\gamma}| = |-\vec{\beta}| = 2 = 1 + 1 = |\vec{\alpha}| + |\vec{\gamma}|$$

Συνεπώς, από το α)i ερώτημα, $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\gamma}$.

ii) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\alpha}+\vec{\beta} = -\vec{\gamma}$

Άρα,

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |-\vec{\gamma}| = 1 = |1-2| = \big||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\big|$$

Συνεπώς, από το α)ii ερώτημα, $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.

iii) Αφού $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, υπάρχει $\lambda > 0$ και $\mu < 0$ τέτοια ώστε $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta} = \mu\vec{\alpha}$.

Στις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε μέτρα και έχουμε:

$|\vec{\gamma}| = \lambda|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\beta}| = -\mu|\vec{\alpha}|$, αφού $|\lambda| = \lambda$ και $|\mu| = -\mu$.

Όμως, : $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = 1$, οπότε αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις έχουμε $\lambda = 1$ και $\mu = -2$.

Άρα, $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} = -2\vec{\alpha}$.

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει:

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2 + \left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2\left|\vec{\beta}\right|^2 \quad (1)$$

(Μονάδες 06)

β) Δίνεται το παραλληλόγραμμο $ΟΑΓΒ$ με $\overrightarrow{ΟΑ} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{ΟΒ} = \vec{\beta}$.

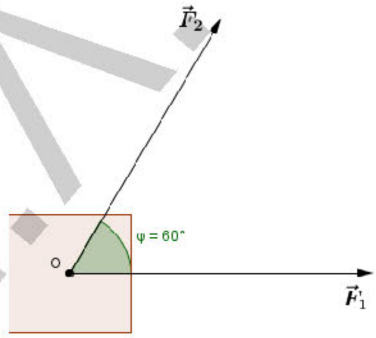
i. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

(Μονάδες 05)

ii. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1).

(Μονάδες 04)

γ) Ένα σώμα σύρεται πάνω σε λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους, οι οποίοι εξασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα $10\ N$ (Newton) και η γωνία που σχηματίζουν είναι $60°$. Να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ και να βρείτε το μέτρο της.




(Μονάδες 10)

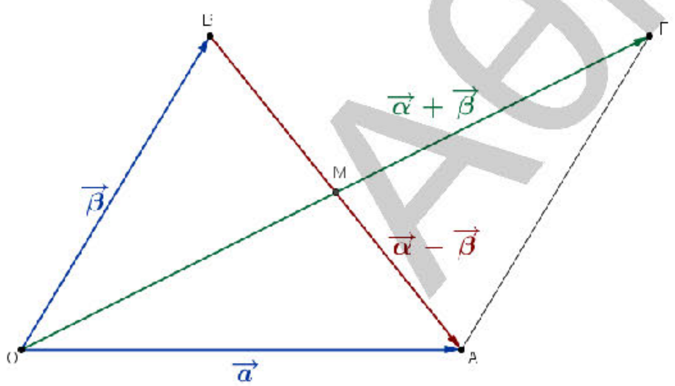
ΛΥΣΗ

α) Ισχύει:

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2+\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2+\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2+2\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2+\vec{\alpha}^2-2\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=$$
$$2\vec{\alpha}^2+2\vec{\beta}^2=2|\vec{\alpha}|^2+2\left|\vec{\beta}\right|^2.$$

β)

i. Σε κάθε παραλληλόγραμμο $OA\Gamma B$, αν οι δύο πλευρές του συμβολισθούν με $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, τότε η μία διαγώνιος εκφράζει το άθροισμα τους, δηλαδή $\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και η άλλη διαγώνιος εκφράζει τη διαφορά τους, δηλαδή $\overrightarrow{BA}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.




ii. Επομένως, σε κάθε παραλληλόγραμμο $OA\Gamma B$ ισχύει:

$$(O\Gamma)^2+(AB)^2=2(OA)^2+2(OB)^2 \text{ ή}$$

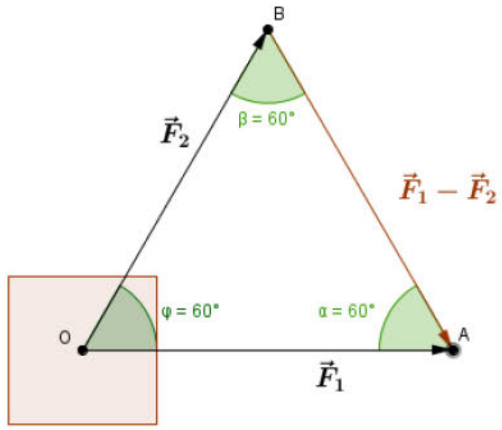
$$(O\Gamma)^2+(AB)^2=2[(OA)^2+(OB)^2]$$

Δηλαδή, το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ισούται με το διπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων δύο διαδοχικών πλευρών του.

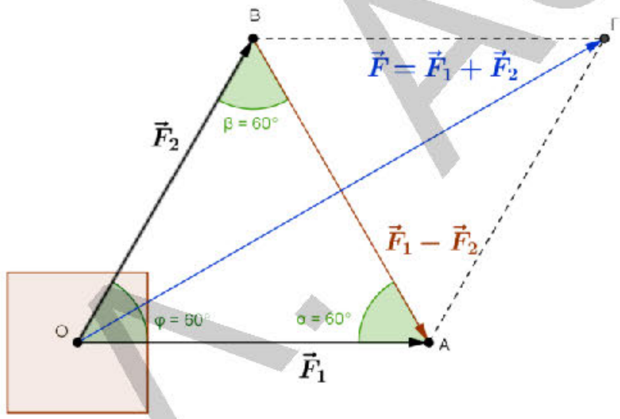
γ) Η συνισταμένη των δύο δυνάμεων είναι το διανυσματικό τους άθροισμα, δηλαδή

$$\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}$$

Είναι $\left|\vec{F_1}\right|=\left|\vec{F_2}\right|=10\ N$. Επομένως $(OA)=(OB)=10$.




Αφού η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι $60^o$, το τρίγωνο $OAB$ που σχηματίζεται είναι ισόπλευρο με πλευρά $10$ και $(AB) = |\vec{F}_1 - \vec{F}_2| = 10$. Σχεδιάζοντας το παραλληλόγραμμο με πλευρές τα δύο διανύσματα, προκύπτει το παρακάτω σχήμα.




Από τη σχέση (1) λοιπόν είναι:

$$|\vec{F}_1 + \vec{F}_2|^2 + |\vec{F}_1 - \vec{F}_2|^2 = 2|\vec{F}_1|^2 + 2|\vec{F}_2|^2 \Leftrightarrow |\vec{F}|^2 = 2|\vec{F}_1|^2 + 2|\vec{F}_2|^2 - |\vec{F}_1 - \vec{F}_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{F}|^2 = 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2 - 10^2 \Leftrightarrow |\vec{F}|^2 = 3 \cdot 10^2 \Leftrightarrow |\vec{F}| = 10\sqrt{3}$$

Επομένως, η συνισταμένη $\vec{F}$ των δύο δυνάμεων έχει μέτρο $|\vec{F}| = 10\sqrt{3}\,N$ και την κατεύθυνση της διαγωνίου $O\Gamma$, όπως φαίνεται στο ανωτέρω σχήμα.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο $\mathrm{OA\Gamma B}$ με $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα.

α) Να δείξετε ότι:

i. $\left|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right|^2 = \left|\vec{\alpha}\right|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\beta}\right|^2$.

(Μονάδες 9)

ii. $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = \left|\vec{\alpha}\right|^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\beta}\right|^2$.

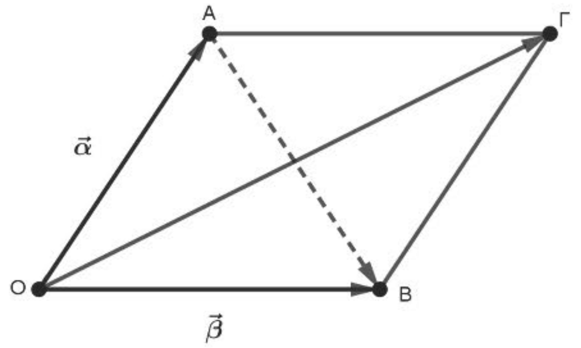
(Μονάδες 9)

β) Αν $\left|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$, να δείξετε ότι το $\mathrm{OA\Gamma B}$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το παραλληλόγραμμο $\mathrm{OA\Gamma B}$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:




Οπότε από τον λεγόμενο «κανόνα του παραλληλογράμμου» προκύπτει: $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Επίσης $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$.

i. Έχουμε:

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right|^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right)^2 = \left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = \left|\vec{\alpha}\right|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\beta}\right|^2.$$

ii. Έχουμε:

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)^2 = \left(\vec{\beta}-\vec{\alpha}\right)^2 = \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\alpha}^2 = \left|\vec{\beta}\right|^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\alpha}\right|^2 = \left|\vec{\alpha}\right|^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\beta}\right|^2.$$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}
&\left|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| \Leftrightarrow \\
&\left|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 \Leftrightarrow \\
&\left|\vec{\alpha}\right|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\beta}\right|^2 = \left|\vec{\alpha}\right|^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\beta}\right|^2 \Leftrightarrow \\
&4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \\
&\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \overset{\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}}{\Leftrightarrow} \\
&\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}.
\end{aligned}$$

Άρα το παραλληλόγραμμο $\mathrm{OA\Gamma B}$ είναι ορθογώνιο γιατί η γωνία $\widehat{\mathrm{O}}$ είναι ορθή.

Εναλλακτικά, με δεδομένο ότι $\left|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$, το παραλληλόγραμμο $\mathrm{OA\Gamma B}$ είναι ορθογώνιο γιατί οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία Α(0 -1), Β(λ, 1) και Γ(λ-2, λ-3), όπου $\lambda \in \mathrm{R}$ .

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathrm{R}$ ώστε :

i. Τα σημεία Α, Β και Γ να είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με $\hat{A}$ = 90°. (Μονάδες 7)

β) Για λ = - 2 ,να βρείτε:

i. Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 4)

ii. Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α)

i. Για να σχηματίζουν τα σημεία Α, Β και Γ τρίγωνο θα πρέπει να μην βρίσκονται στην ίδια ευθεία ή αλλιώς τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{A\Gamma}$ να μην είναι παράλληλα. Είναι $\overrightarrow{AB}$ = (λ , 1+1) = (λ ,2) και $\overrightarrow{A\Gamma}$ = (λ-2, λ-3+1) = (λ-2, λ-2) . Γνωρίζουμε ότι : $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-2) - 2(\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

Δηλαδή τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι παράλληλα $\Leftrightarrow$ λ = 2. Οπότε τα σημεία Α, Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο για κάθε τιμή του λ που είναι διαφορετική από το 2.

ii. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\widehat{A} = 90^o$, το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ θα ισούται με μηδέν.

Όμως $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-2) + 2(\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda+2)(\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow \lambda + 2 = 0$ ή $\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ή $\lambda = -2$.

Στο ερώτημα αi) δείξαμε ότι για λ = 2 τα σημεία Α , Β και Γ δεν σχηματίζουν τρίγωνο, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\widehat{A} = 90^o$ μόνο για την τιμή λ = -2.

β) Για λ = -2, $\overrightarrow{AB}$ = (-2, 2) , $\overrightarrow{A\Gamma}$ = (-4 , -4) και από ερώτημα αii) τα σημεία Α( 0, -1), Β( -2, 1) και Γ(-4, -5) σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με $\widehat{A} = 90^o$.

i. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0$.

ii. $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\right|$, αλλά

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = (-2)(-4) - 2(-4) = 16$, οπότε $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$.

Ή εναλλακτικά Β' τρόπος : $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{A\Gamma}|$, όμως $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ και $|\overrightarrow{A\Gamma}| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$, οπότε $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\, 2\sqrt{2}\, 4\sqrt{2} = 8$.