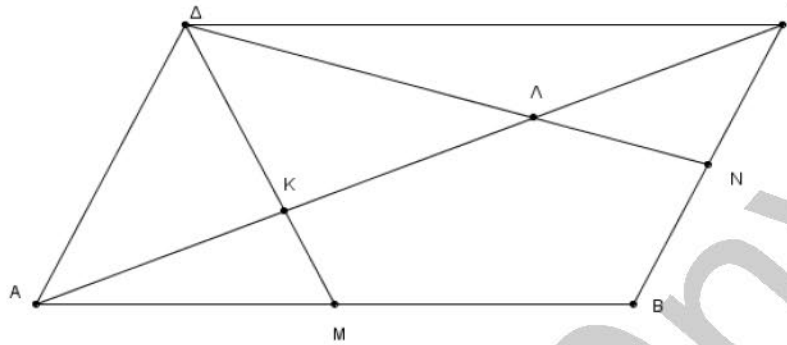


Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(8,0)$, $\Gamma(10,4)$, $\Delta(2,4)$. Τα σημεία M και N είναι τα μέσα των πλευρών AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα, ενώ K και Λ είναι τα σημεία που τέμνουν τα τμήματα ΔM και ΔN την διαγώνιο $A\Gamma$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και N .

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $A\Gamma$, ΔM , ΔN και στη συνέχεια τις συντεταγμένες των σημείων K και Λ .

(Μονάδες 10)

δ) Να δείξετε ότι τα σημεία K και Λ τριχοτομούν την διαγώνιο $A\Gamma$, δηλαδή την χωρίζουν σε τρία ίσα τμήματα.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Το σημείο $A(0,0)$ είναι η αρχή των αξόνων. Επομένως,

$\vec{AD} = (2,4)$ και $\vec{BG} = \vec{AG} - \vec{AB} = (10,4) - (8,0) = (2,4)$, οπότε $\vec{AD} = \vec{BG}$, άρα $AD \parallel BG$, συνεπώς το τετράπλευρο $ABGD$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Αν M και N είναι τα μέσα των πλευρών AB και BG αντίστοιχα, τότε

$M(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$ ή ισοδύναμα $M(\frac{0+8}{2}, \frac{0+0}{2})$, δηλαδή $M(4,0)$.

$N(\frac{x_B+x_G}{2}, \frac{y_B+y_G}{2})$ ή ισοδύναμα $N(\frac{8+10}{2}, \frac{0+4}{2})$, δηλαδή $N(9,2)$.

γ) Εξίσωση της ευθείας AG : $\frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{y_G-y_A}{x_G-x_A} \Leftrightarrow \frac{y-0}{x-0} = \frac{4-0}{10-0} \Leftrightarrow y = \frac{2}{5}x$ (1).

Εξίσωση της ευθείας DM : $\frac{y-y_M}{x-x_M} = \frac{y_D-y_M}{x_D-x_M} \Leftrightarrow \frac{y-0}{x-4} = \frac{4-0}{2-4} \Leftrightarrow y = -2x + 8$ (2).

Εξίσωση της ευθείας DN : $\frac{y-y_N}{x-x_N} = \frac{y_D-y_N}{x_D-x_N} \Leftrightarrow \frac{y-2}{x-9} = \frac{4-2}{2-9} \Leftrightarrow y-2 = \frac{-2}{7}(x-9) \Leftrightarrow y = \frac{-2}{7}x + \frac{32}{7}$ (3).

Το σημείο K είναι σημείο τομής των ευθεών AG και DM , συνεπώς οι συντεταγμένες του είναι λύση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (2): $y = \frac{2}{5}x$ και $y = -2x + 8$.

Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη έχουμε $\frac{2}{5}x = -2x + 8$ δηλαδή $x = \frac{10}{3}$, άρα $K(\frac{10}{3}, \frac{4}{3})$.

Το σημείο Λ είναι σημείο τομής των ευθεών AG και DN , συνεπώς οι συντεταγμένες του είναι λύση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (3): $y = \frac{2}{5}x$ και $y = \frac{-2}{7}x + \frac{32}{7}$.

Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη έχουμε $\frac{2}{5}x = \frac{-2}{7}x + \frac{32}{7}$ δηλαδή $x = \frac{20}{3}$, άρα $\Lambda(\frac{20}{3}, \frac{8}{3})$.

δ) Το σημείο $A(0,0)$ είναι η αρχή των αξόνων και έχουμε:

Από την εκφώνηση: $\vec{AG} = (10,4)$

Από την απάντηση του γ) ερωτήματος: $\vec{AK} = (\frac{10}{3}, \frac{4}{3})$ και $\vec{AL} = (\frac{20}{3}, \frac{8}{3})$.

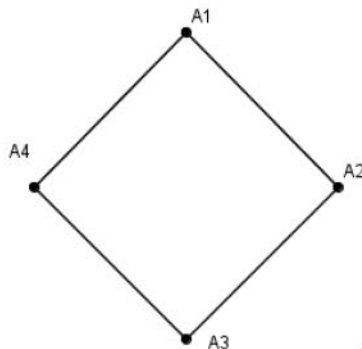
Άρα, $\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AG}$ και $\vec{AL} = \frac{2}{3}\vec{AG}$.



Συνεπώς, τα σημεία K και Λ τριχοτομούν τη διαγώνιο AG .

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4 . Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ οι κλίσεις των ευθειών $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ αντίστοιχα.



α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των πλευρών του τετραγώνου που είναι κάθετες μεταξύ τους. Ποιά σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο κάθετων πλευρών;

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_3 \cdot \lambda_4 + \lambda_4 \cdot \lambda_1 = -4$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Τα ζεύγη των πλευρών του τετραγώνου που είναι κάθετες μεταξύ τους είναι τέσσερα:

(i) $A_1A_2 \perp A_2A_3$, με αντίστοιχες κλίσεις λ_1, λ_2 και $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

(ii) $A_2A_3 \perp A_3A_4$, με αντίστοιχες κλίσεις λ_2, λ_3 και $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = -1$.

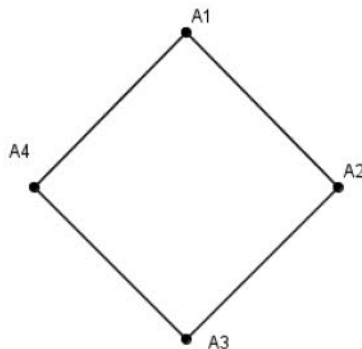
(iii) $A_3A_4 \perp A_4A_1$, με αντίστοιχες κλίσεις λ_3, λ_4 και $\lambda_3 \cdot \lambda_4 = -1$.

(iv) $A_4A_1 \perp A_1A_2$, με αντίστοιχες κλίσεις λ_4, λ_1 και $\lambda_4 \cdot \lambda_1 = -1$.

β) Από το α) ερώτημα, κάθε προσθετός του αθροίσματος: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_3 \cdot \lambda_4 + \lambda_4 \cdot \lambda_1$ είναι ίσος με -1, επομένως το άθροισμα ισούται με -4.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4 . Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ οι κλίσεις των ευθειών $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ αντίστοιχα.



α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των παράλληλων πλευρών του τετραγώνου. Ποιά σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο παράλληλων πλευρών;

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_4} = 2$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Τα ζεύγη των παράλληλων πλευρών του τετραγώνου είναι δύο:

(i) $A_1A_2 \parallel A_3A_4$, με αντίστοιχες κλίσεις $\lambda_1 = \lambda_3$ και

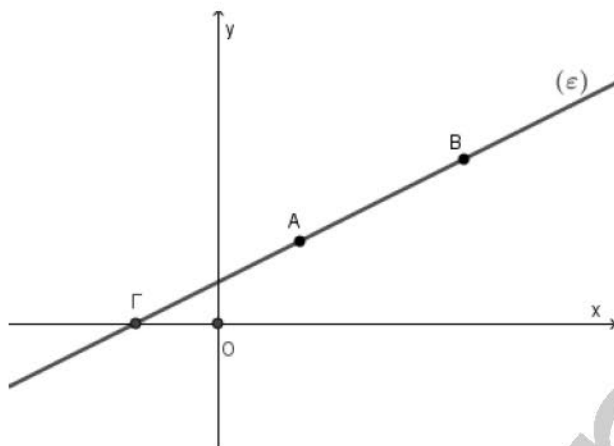
(ii) $A_2A_3 \parallel A_4A_1$, με αντίστοιχες κλίσεις $\lambda_2 = \lambda_4$.

β) Αφού, από το α) ερώτημα, είναι $\lambda_1 = \lambda_3$ και $\lambda_2 = \lambda_4$, έχουμε :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_4} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2} = 1 + 1 = 2.$$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(3,2)$ και Γ μιας ευθείας (ε) .



α) Να βρείτε την κλίση λ της ευθείας (ε) .

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ , στο οποίο η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Αφού η ευθεία (ε) διέρχεται από τα σημεία A, B έχει κλίση $\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$.

β) Ως γνωστόν, η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(x_0, y_0)$ και έχει κλίση λ είναι η $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

Επομένως, η εξίσωση της ευθείας (ε) , η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$ και έχει κλίση $\lambda = \frac{1}{2}$, είναι: $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

γ) Επειδή το σημείο Γ της ευθείας (ε) ανήκει και στον άξονα $x'x$, είναι της μορφής $\Gamma(x, 0)$.

Έτσι έχουμε:

$$0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Επομένως, το ζητούμενο σημείο είναι το $\Gamma(-1,0)$.

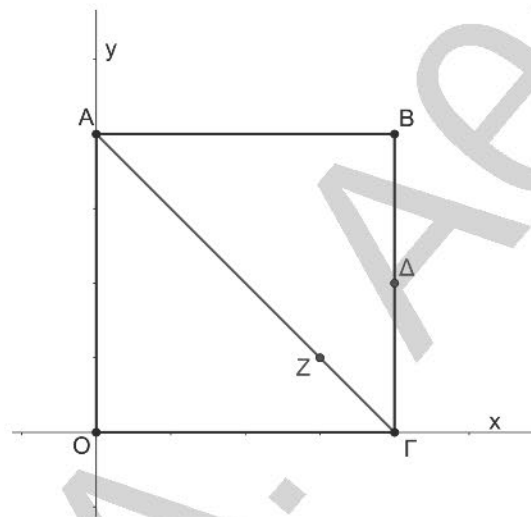
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τετράγωνο $ABΓO$ με κορυφές τα σημεία $A(0,4)$, $B(4,4)$, $Γ(4,0)$, $O(0,0)$. Στην διαγώνιο $AΓ$ παίρνουμε σημείο Z , τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AΓ}$. Επίσης, θεωρούμε το μέσο Δ της $BΓ$.

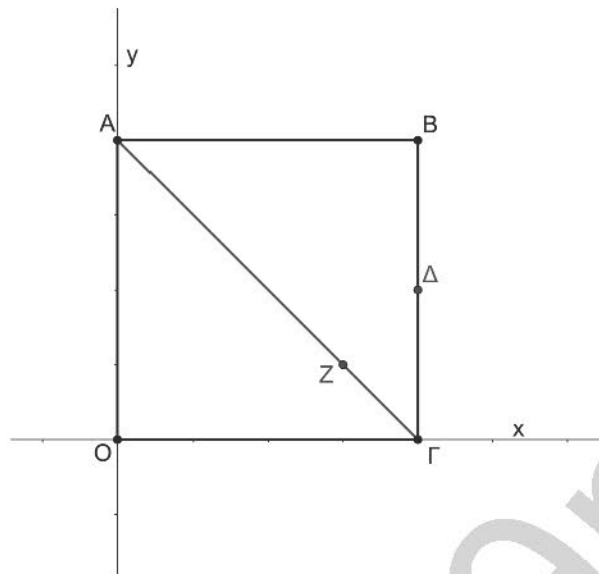
α) Να βρείτε:

- i. Τις συντεταγμένες του σημείου Δ . (Μονάδες 07)
- ii. Τις συντεταγμένες του σημείου Z . (Μονάδες 09)

β) Αν το σημείο Δ είναι το $(4,2)$ και το σημείο Z το $(3,1)$, να αποδείξετε ότι η ευθεία $Z\Delta$ είναι κάθετη στην ευθεία $AΓ$. (Μονάδες 09)



ΛΥΣΗ



α)

- i. Οι συντεταγμένες του μέσου Δ του BΓ δίνονται από τους τύπους

$$x_{\Delta} = \frac{x_{\Gamma} + x_B}{2} = \frac{4 + 4}{2} = 4 \text{ και } y_{\Delta} = \frac{y_B + y_{\Gamma}}{2} = \frac{4 + 0}{2} = 2.$$

Επομένως, είναι Δ(4,2).

- ii. Έστω Z(x,y). Τότε $\overrightarrow{AZ} = (x_Z - x_A, y_Z - y_A) = (x - 0, y - 4) = (x, y - 4)$ και

$$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_{\Gamma} - x_A, y_{\Gamma} - y_A) = (4 - 0, 0 - 4) = (4, -4).$$

$$\text{Όμως } \overrightarrow{AZ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{A\Gamma}, \text{ άρα } (x, y - 4) = \frac{3}{4}(4, -4) = (3, -3).$$

Επομένως $x = 3$ και $y - 4 = -3$, δηλαδή $y = 1$. Άρα, είναι Z(3,1).

β) Από το ερώτημα β) έχουμε ότι $\overrightarrow{AZ} = (3, -3)$.

$$\overrightarrow{Z\Delta} = (x_{\Delta} - x_Z, y_{\Delta} - y_Z) = (4 - 3, 2 - 1) = (1, 1).$$

$\overrightarrow{AZ} \cdot \overrightarrow{Z\Delta} = (3, 3) \cdot (1, -1) = 3 - 3 = 0$. Επομένως τα διανύσματα είναι κάθετα. Το ίδιο θα ισχύει και για τους φορείς τους, δηλαδή AΓ κάθετη στην ZΔ.

Εναλλακτική λύση:

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AZ είναι $\lambda_{AZ} = \frac{y_Z - y_A}{x_Z - x_A} = \frac{1 - 4}{3 - 0} = -1$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ZΔ είναι $\lambda_{Z\Delta} = \frac{y_{\Delta} - y_Z}{x_{\Delta} - x_Z} = \frac{2 - 1}{4 - 3} = 1$.

Επειδή $\lambda_{AZ} \cdot \lambda_{Z\Delta} = -1$, οι ευθείες AZ και ZΔ είναι κάθετες.

ΘΕΜΑ 2

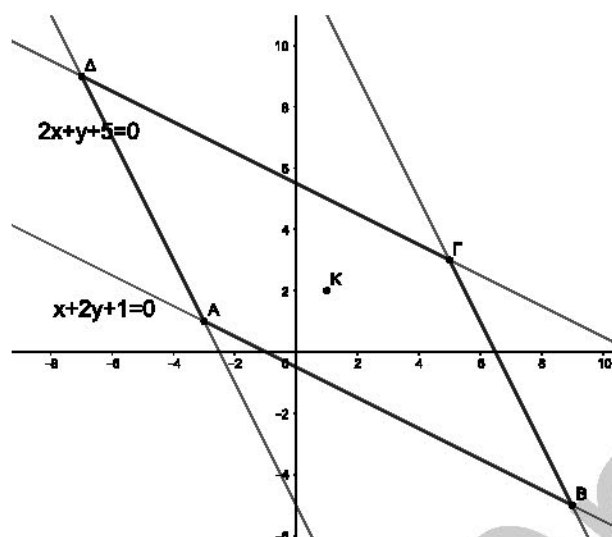
Οι πλευρές AB και AD ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ έχουν εξισώσεις $x+2y+1=0$ και $2x+y+5=0$ αντίστοιχα και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο $K(1,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Η κορυφή A του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες $A(-3, 1)$. (Μονάδες 08)
- ii. Η κορυφή Γ του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες $\Gamma(5, 3)$. (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών του $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ



α)

- i. Έστω ABΓΔ το παραλληλόγραμμο στο οποίο είναι AB: $x+2y+1=0$ και AD: $2x+y+5=0$. Το σημείο τομής των ευθειών AB και AD είναι το σημείο A, του οποίου οι συντεταγμένες προκύπτουν από τη λύση του παρακάτω συστήματος.

$$(\Sigma): \begin{cases} x+2y+1=0 \\ 2x+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-4y-2=0 \\ 2x+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y+3=0 \\ 2x+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

Άρα A(-3, 1).

- ii. Το σημείο K είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου, οπότε είναι το μέσο του τμήματος AG. Αν $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, τότε για το σημείο K έχουμε, $K\left(\frac{-3+x_\Gamma}{2}, \frac{1+y_\Gamma}{2}\right)$. Όμως οι συντεταγμένες του K είναι (1, 2), οπότε $\frac{-3+x_\Gamma}{2} = 1 \Leftrightarrow x_\Gamma = 5$ και $\frac{1+y_\Gamma}{2} = 2 \Leftrightarrow y_\Gamma = 3$.

Άρα $\Gamma(5, 3)$.

β) Η πλευρά BΓ διέρχεται από το σημείο $\Gamma(5, 3)$ και $B\Gamma \parallel AD$. Η εξίσωση της ευθείας AD είναι: $2x+y+5=0$ με $\lambda_{AD} = -2$. Άρα $\lambda_{B\Gamma} = -2$, οπότε η εξίσωση της BΓ είναι

$$B\Gamma: y-y_\Gamma = -2(x-x_\Gamma) \text{ ή } y-3 = -2(x-5) \Leftrightarrow 2x+y-13=0.$$

Η πλευρά ΓΔ διέρχεται από το $\Gamma(5, 3)$ και $\Gamma\Delta \parallel AB$. Η εξίσωση της ευθείας AB είναι $x+2y+1=0$

με $\lambda_{AB} = -\frac{1}{2}$. Άρα $\lambda_{\Gamma\Delta} = -\frac{1}{2}$, οπότε η εξίσωση της ΓΔ είναι:

$$\Gamma\Delta: y-y_\Gamma = -\frac{1}{2}(x-x_\Gamma) \text{ ή } y-3 = -\frac{1}{2}(x-5) \Leftrightarrow x+2y-11=0$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(2, -4)$ και $B(0, -2)$

α) Να βρείτε το μέσο M του τμήματος AB .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος AB .

(Μονάδες 8)

γ) Αν $(\zeta): y = x - 4$ και $(\epsilon): y = 2 \cdot x - 6$, τότε να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ζ) και (ϵ) .

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Για το μέσο M του τμήματος AB ισχύει: $M(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$ ή $M(\frac{2+0}{2}, \frac{-4+(-2)}{2})$
ή $M(1, -3)$.

β) Η κλίση του AB είναι $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - (-4)}{0 - 2} = \frac{2}{-2} = -1$. Η κλίση της μεσοκαθέτου

(ζ) του AB θα πρέπει να είναι $\lambda = 1$ (αφού το γινόμενο των δύο κλίσεων θα πρέπει να ισούται με -1). Η εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του τμήματος AB θα είναι: $y - y_M = \lambda \cdot (x - x_M)$ ή $y - (-3) = 1(x - 1)$ ή $y + 3 = x - 1$ ή $y = x - 4$.

γ) το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (ζ) θα έχει συντεταγμένες τις λύσεις του συστήματος:

$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = 2x - 6 \end{cases}$ ή $x - 4 = 2x - 6$ ή $x = 2$ και $y = -2$. Άρα το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το σημείο (2, -2).

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται το σημείο $A(4, -2)$ και η ευθεία (ϵ_1) με εξίσωση: $x - y + 2 = 0$. Να βρείτε:

α) την ευθεία (ϵ_2) που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία (ϵ_1) .

(Μονάδες 8)

β) το σημείο τομής B , των ευθειών (ϵ_1) και (ϵ_2) : $y = -x + 2$.

(Μονάδες 8)

γ) το συμμετρικό Γ του σημείου A , ως προς την ευθεία (ϵ_1) .

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση: $y = x + 2$, συνεπώς συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = 1$. Η ευθεία (ε_2) είναι κάθετη στην ευθεία ε_1 , συνεπώς το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των δύο ευθειών θα ισούται με -1 , άρα $\lambda_2 = -1$. Επιπλέον η ευθεία (ε_2) διέρχεται από το σημείο A, άρα η εξίσωσή της θα είναι:

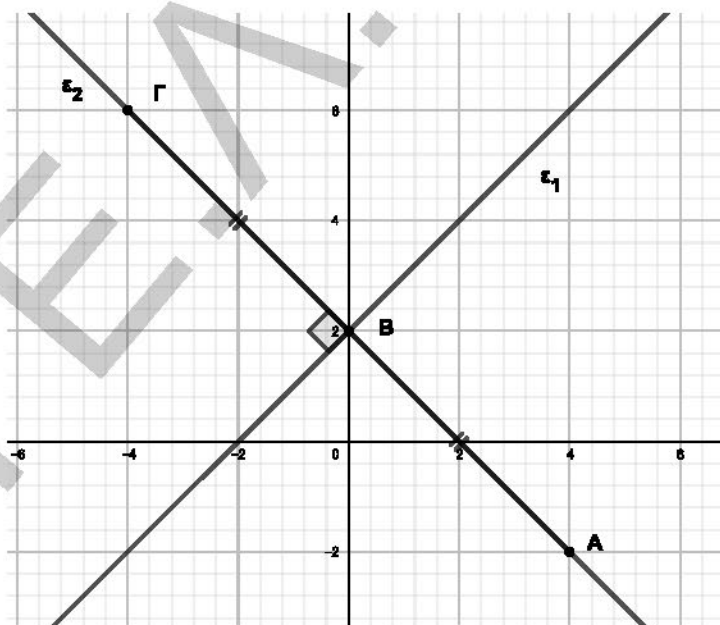
$y - y_A = \lambda_2 \cdot (x - x_A)$ ή $y - (-2) = -1 \cdot (x - 4)$ ή $y + 2 = -x + 4$ ή $y = -x + 2$. Άρα η εξίσωση της ευθείας (ε_2) είναι: $y = -x + 2$.

β) οι συντεταγμένες του σημείου τομής B, των δύο ευθειών (ε_1) και (ε_2) θα προκύψει από τη λύση του συστήματος: $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = x + 2 \\ x + 2 = -x + 2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = x + 2 \\ 2x = 0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$. Άρα B(0,2).

γ) Αν Γ το συμμετρικό του A ως προς το B τότε τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά και μάλιστα το B είναι το μέσο του τμήματος ΑΓ, άρα θα ισχύει:

$\begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} \end{cases}$ ή $\begin{cases} 0 = \frac{4 + x_\Gamma}{2} \\ 2 = \frac{-2 + y_\Gamma}{2} \end{cases}$ ή $\begin{cases} x_\Gamma = -4 \\ y_\Gamma = 6 \end{cases}$. Οπότε το συμμετρικό του σημείο A ως

προς την ευθεία (ε_1) είναι το σημείο Γ(-4,6).



ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $B(6, -1)$.

α)

- i. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .

(Μονάδες 5)

- ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB , είναι το σημείο $M(3,2)$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος AB .

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α)

i. Είναι $\lambda_{AB} = \lambda_1 = \frac{-1-5}{6-0} = -1$.

ii. Αν $M(x_M, y_M)$, ισχύει:
$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 3 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 2 \end{cases}$$

β) Η μεσοκάθετη ευθεία (ε) του ευθύγραμμου τμήματος AB διέρχεται από το σημείο $M(3,2)$ και έχει κλίση λ , η οποία προκύπτει από την εξίσωση:

$$\lambda \cdot \lambda_1 = -1 \Leftrightarrow \lambda \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Επομένως η εξίσωσή της είναι η $y - 2 = 1 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow (\varepsilon): y = x - 1$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(-1,0)$ και $\Gamma(3,-2)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B , Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 04)

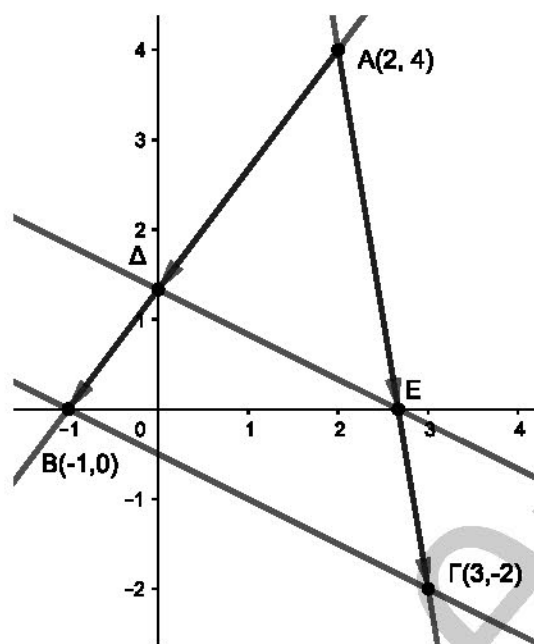
β) Αν η ευθεία AB τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ένα σημείο Δ και η ευθεία $A\Gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο E , τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και E . (Μονάδες 10)

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{\Delta B}$ και $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{E\Gamma}$. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔE είναι παράλληλη της $B\Gamma$. (Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ



α) Οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών AB και AG ορίζονται και είναι

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 4}{-1 - 2} = \frac{4}{3} \quad \text{και} \quad \lambda_{AG} = \frac{y_{\Gamma} - y_A}{x_{\Gamma} - x_A} = \frac{-2 - 4}{3 - 2} = \frac{-6}{1} = -6. \text{ Επειδή } \lambda_{AB} \neq \lambda_{AG} \text{ οι ευθείες AB}$$

και AG δεν είναι παράλληλες, οπότε τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά και αποτελούν κορυφές τριγώνου.

β) Η ευθεία AB έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{4}{3}$ από το α) ερώτημα και διέρχεται από το σημείο A(2,4), άρα η εξίσωσή της είναι: (AB): $y - y_A = \lambda(x - x_A)$ ή $y - 4 = \frac{4}{3}(x - 2)$ ή $4x - 3y + 4 = 0$.

Η ευθεία AG έχει συντελεστή διεύθυνσης -6 από το α) ερώτημα και διέρχεται από το σημείο Γ(3,-2), άρα η εξίσωσή της είναι: (AG): $y - y_{\Gamma} = \lambda(x - x_{\Gamma})$ ή $y + 2 = -6(x - 3)$ ή $6x + y - 16 = 0$.

- i. Στην εξίσωση της ευθείας AB θέτουμε $x=0$ για να βρούμε το σημείο που τέμνει τον άξονα $y'y$ και έχουμε: $4 \cdot 0 - 3y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}$. Άρα $\Delta\left(0, \frac{4}{3}\right)$. Ομοίως στην εξίσωση της ευθείας AG θέτουμε $y=0$ για να βρούμε το σημείο που τέμνει τον άξονα $x'x$ και έχουμε: $6x + 0 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$. Άρα $E\left(\frac{8}{3}, 0\right)$.

- ii. $\overrightarrow{AD} = \left(0 - 2, \frac{4}{3} - 4\right) = \left(-2, -\frac{8}{3}\right) = 2 \cdot \left(-1, -\frac{4}{3}\right)$ και $\overrightarrow{DB} = \left(-1 - 0, 0 - \frac{4}{3}\right) = \left(-1, -\frac{4}{3}\right)$, οπότε προφανώς

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$. Για τα διανύσματα $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{E\Gamma}$ έχουμε:

$$\overrightarrow{\Delta E} = \left(\frac{8}{3}, -2, 0-4\right) = \left(\frac{8}{3}, -4\right) = 2 \cdot \left(\frac{4}{3}, -2\right) \quad \text{και} \quad \overrightarrow{E\Gamma} = \left(3-\frac{8}{3}, -2-0\right) = \left(\frac{1}{3}, -2\right) \quad \text{και ισχύει επίσης}$$

$$\text{ότι } \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{E\Gamma}.$$

$$\gamma) \lambda_{\Delta E} = \frac{\frac{4}{3}-0}{0-\frac{8}{3}} = -\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \lambda_{B\Gamma} = \frac{-2-0}{3+1} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}. \quad \text{Άρα } \lambda_{\Delta E} = \lambda_{B\Gamma}, \text{ επομένως η ευθεία } \Delta E \text{ είναι}$$

παράλληλη της ευθείας BΓ.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(-1,5)$, $B(3,3)$. Να υπολογίσετε:

α) Τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .

(Μονάδες 8)

β) Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .

(Μονάδες 8)

γ) Την εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος AB .

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Το μέσο M του τμήματος AB είναι:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = (1, 4)$$

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι:

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 5}{3 - (-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

γ) Για τη μεσοκάθετο (η) του τμήματος AB ισχύει:

$$\eta \perp AB \Leftrightarrow \lambda_{\eta} \cdot \lambda_{AB} = -1$$

Επομένως, $\lambda_{\eta} = 2$.

Η εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος AB είναι:

$$y - y_M = \lambda_{\eta}(x - x_M)$$

$$y - 4 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x + 2$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(3, 2\alpha)$, $B(4, \alpha)$, $\Gamma(\alpha + 1, 1 - \alpha)$ και $\Delta(\alpha, 1)$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση $y = -\alpha x + 5\alpha$.

(Μονάδες 6)

ii. Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην ευθεία AB αν και μόνο αν $\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

(Μονάδες 7)

iii. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο όταν $\alpha \neq \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

(Μονάδες 7)

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) i) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(3, 2\alpha)$ και $B(4, \alpha)$ είναι

$$\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\alpha - 2\alpha}{4 - 3} = \frac{-\alpha}{1} = -\alpha,$$

οπότε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση

$$y - y_A = \lambda(x - x_A) \text{ ή } y - 2\alpha = -\alpha(x - 3) \text{ ή } y - 2\alpha = -\alpha x + 3\alpha \text{ ή } y = -\alpha x + 5\alpha.$$

ii) Τα σημεία $\Gamma(\alpha + 1, 1 - \alpha)$ και $\Delta(\alpha, 1)$ ανήκουν στην ευθεία AB αν και μόνο αν οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της, $y = -\alpha x + 5\alpha$. Έχουμε διαδοχικά

$$1 - \alpha = -\alpha(\alpha + 1) + 5\alpha \text{ ή } 1 - \alpha = -\alpha^2 - \alpha + 5\alpha \text{ ή } \alpha^2 - 5\alpha + 1 = 0 \text{ ή } \alpha = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2},$$

$$\text{επίσης } 1 = -\alpha \cdot \alpha + 5\alpha \text{ ή } 1 = -\alpha^2 + 5\alpha \text{ ή } \alpha^2 - 5\alpha + 1 = 0 \text{ ή } \alpha = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

iii) Είναι $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (4 - 3, \alpha - 2\alpha) = (1, -\alpha)$ και

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (x_\Gamma - x_\Delta, y_\Gamma - y_\Delta) = (\alpha + 1 - \alpha, 1 - \alpha - 1) = (1, -\alpha).$$

Παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} = (1, -\alpha)$. Όμως από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι, όταν $\alpha \neq \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$ τα σημεία Γ και Δ δεν ανήκουν στην ευθεία AB . Τότε, επειδή $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$, τα ευθύγραμμα τμήματα AB και $\Delta\Gamma$ θα είναι παράλληλα, επίσης θα έχουν ίσα μήκη, οπότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Έστω ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο για κάποιο $\alpha \neq \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$. Τότε θα έχουμε

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|. \text{ Από το προηγούμενο ερώτημα είναι } \overrightarrow{AB} = (1, -\alpha), \text{ άρα } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-\alpha)^2} = \sqrt{1 + \alpha^2}. \text{ Επίσης είναι } \overrightarrow{AD} = (x_\Delta - x_A, y_\Delta - y_A) = (\alpha - 3, 1 - 2\alpha), \text{ άρα } |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (1 - 2\alpha)^2} = \sqrt{5\alpha^2 - 10\alpha + 10}.$$

$$\text{Επομένως θα έχουμε } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| \text{ ή } \sqrt{1 + \alpha^2} = \sqrt{5\alpha^2 - 10\alpha + 10} \text{ ή } 5\alpha^2 - 10\alpha + 10 = 1 + \alpha^2 \text{ ή } 4\alpha^2 - 10\alpha + 9 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = -44 < 0$, άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες. Οπότε δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο. Επομένως ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(-1, 5)$ και $B(2, 1)$. Αν οι πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$ βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\epsilon_1: y = -x + 4$ και $\epsilon_2: y = -\frac{1}{2}x + 2$ αντίστοιχα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma(4, 0)$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε:

i. το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $A\Gamma$

(Μονάδες 6)

ii. την εξίσωση του ύψους BD .

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το σημείο Γ είναι το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και προσδιορίζεται από τη λύση του αντίστοιχου συστήματος. Είναι:

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4 = -\frac{1}{2}x + 2 \\ y = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 4 - 8 \\ y = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

οπότε $\Gamma(4, 0)$.

β) i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ είναι

$$\lambda_{AG} = \frac{0-5}{4+1} = -1$$

ii. Το ύψος ΒΔ είναι κάθετο στην πλευρά ΑΓ, οπότε $\lambda_{BD} \cdot \lambda_{AG} = -1$ με $\lambda_{AG} = -1$, οπότε

$\lambda_{BD} = 1$. Επομένως η εξίσωση του ύψους ΒΔ είναι:

$$y - 1 = 1(x - 2) \Leftrightarrow y = x - 1$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -2)$ και $\vec{\beta} = (1, 1)$ τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο $K(2, 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 4)

β) Αν το σημείο A είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\alpha}$, B είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\beta}$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας AB ,

i. να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και B είναι $A(4, -1)$ και $B(3, 2)$.

(Μονάδες 5)

ii. να δείξετε ότι $3x_\Gamma + y_\Gamma = 11$.

(Μονάδες 6)

iii. να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, αν ισχύει ότι το Γ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB και $|\overrightarrow{K\Gamma}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 0$, άρα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

β)

i. Το σημείο $K(2,1)$ είναι η αρχή και το σημείο A είναι το πέρας του διανύσματος

$$\vec{\alpha} = (2, -2), \text{ οπότε: } x_A - x_K = 2 \Leftrightarrow x_A - 2 = 2 \Leftrightarrow x_A = 4.$$

$$y_A - y_K = -2 \Leftrightarrow y_A - 1 = -2 \Leftrightarrow y_A = -1.$$

Άρα $A(4, -1)$. Το σημείο $K(2,1)$ είναι η αρχή και το σημείο B είναι το πέρας του

$$\text{διανύσματος } \vec{\beta} = (1, 1), \text{ οπότε: } x_B - x_K = 1 \Leftrightarrow x_B - 2 = 1 \Leftrightarrow x_B = 3.$$

$$y_B - y_K = 1 \Leftrightarrow y_B - 1 = 1 \Leftrightarrow y_B = 2.$$

Άρα $B(3, 2)$.

ii. Η ευθεία AB έχει εξίσωση:

$$y - 2 = \frac{2 - (-1)}{3 - 4} \cdot (x - 3) \Leftrightarrow$$

$$y - 2 = -3 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow$$

$$3x + y = 11.$$

Το σημείο $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ είναι ένα σημείο της ευθείας AB , άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή: $3x_\Gamma + y_\Gamma = 11$.

iii. Έχουμε ισοδύναμα:

$$|\overrightarrow{K\Gamma}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x_\Gamma - 2)^2 + (y_\Gamma - 1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(3 - 4)^2 + (2 + 1)^2} \Leftrightarrow$$

$$(x_\Gamma - 2)^2 + (y_\Gamma - 1)^2 = \frac{10}{4} \Leftrightarrow$$

$$(x_\Gamma - 2)^2 + (10 - 3x_\Gamma)^2 = \frac{10}{4} \Leftrightarrow$$

$$5x_\Gamma^2 - 32x_\Gamma + \frac{203}{4} = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού με $\Delta = 9 > 0$ και ρίζες $x_1 = 3,5$ και $x_2 = 2,9$. Επειδή το

Γ είναι εσωτερικό του τμήματος AB , η τετμημένη του θα πρέπει να είναι μεταξύ 3 και 4.

Άρα $x_T = 3,5$ και $3 \cdot 3,5 + y_T = 11 \Leftrightarrow y_T = 0,5$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ευθεία $y = \lambda(x - 2) + \lambda - 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν $\lambda = 1$ και όταν $\lambda = 2$. Κατόπιν να βρείτε το κοινό σημείο M των δυο ευθειών.

(Μονάδες 7)

Έστω $M(1, -2)$

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ , διέρχονται από το M .

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε:

i. τα σημεία τομής A, B της ευθείας (1) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 6)

ii. για ποιες τιμές του λ το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Με $\lambda = 1$ έχουμε

$$y = x - 2 + 1 - 2 \Rightarrow y = x - 3$$

ενώ με $\lambda = 2$ έχουμε $y = 2x - 4$.

Οι συντεταγμένες του M προκύπτουν από τη λύση του αντίστοιχου συστήματος. Είναι:

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ x - 3 = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Επομένως το κοινό σημείο των δυο ευθειών είναι το $M(1, -2)$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Με $x = 1$ η εξίσωση γράφεται

$$y = \lambda(1 - 2) + \lambda - 2 \Leftrightarrow y = -\lambda + \lambda - 2 \Leftrightarrow y = -2$$

οπότε πραγματικά κάθε ευθεία που προκύπτει από την δοσμένη εξίσωση διέρχεται από το M.

γ) i. Με $y = 0$ στην δοσμένη εξίσωση παίρνουμε:

$$\lambda(x - 2) + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda x - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda x = \lambda + 2 \Leftrightarrow x = \frac{\lambda + 2}{\lambda}$$

Προφανώς $\lambda \neq 0$, αφού με $\lambda = 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

Με $x = 0$ στη δοσμένη εξίσωση παίρνουμε:

$$y = -2\lambda + \lambda - 2 \Leftrightarrow y = -\lambda - 2$$

Επομένως η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -\lambda - 2)$ και τον $x'x$ στο σημείο

$$B\left(\frac{\lambda + 2}{\lambda}, 0\right).$$

ii. Ισχύει: $(OA) = |-\lambda - 2| = |\lambda + 2|$, $(OB) = \left|\frac{\lambda + 2}{\lambda}\right| = \frac{|\lambda + 2|}{|\lambda|}$ και το εμβαδόν του τριγώνου OAB

είναι $(OAB) = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2} \frac{|\lambda + 2|^2}{|\lambda|}$. Έτσι, έχουμε:

$$(OAB) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{|\lambda + 2|^2}{|\lambda|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\lambda + 2)^2 = |\lambda|$$

- Αν $\lambda > 0$, τότε έχουμε:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = \lambda \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0, \text{ που δεν έχει πραγματικές ρίζες.}$$

- Αν $\lambda < 0$, τότε έχουμε:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = -\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = -4$$

60 ΓΕ.Λ. Αθηνών

ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(3, -2)$ και $\Gamma(5, 2)$. Αν το σημείο $M\left(3, \frac{1}{2}\right)$ είναι το μέσο της $B\Gamma$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $B(1, -1)$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $ΑΓ$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Αν $B(x, y)$, τότε έχουμε:

$$\frac{x+5}{2} = 3 \text{ και } \frac{y+2}{2} = \frac{1}{2}$$

οπότε $x = 1$ και $y = -1$, άρα $B(1, -1)$.

β) Το μήκος της πλευράς ΒΓ είναι $(ΒΓ) = \sqrt{(5-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.

γ) Η ευθεία ΑΓ διέρχεται από το σημείο $A(3, -2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = \frac{2+2}{5-3} = \frac{4}{2} = 2$$

οπότε η εξίσωσή της είναι η $y+2=2(x-3)$, που γράφεται $y=2x-8$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(-3, 2)$, $B(1, 6)$ και $\Gamma(-13, -7)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα A, B .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα A, B έχει εξίσωση $y = x + 5$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην AB .

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A, B έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{6-2}{1+3} = 1$.

β) Η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$ και διέρχεται από το σημείο A, οπότε έχει εξίσωση $y - 2 = 1(x + 3)$ δηλαδή είναι η $y = x + 5$.

γ) Το σημείο Γ είναι πάνω στην ευθεία AB μόνο όταν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας AB. Με $x = -13$ στον τύπο της ευθείας AB έχουμε:

$$y = -13 + 5 = -8 \neq y_r = -7$$

Άρα το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην AB.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(1,-1)$ και $B(3,5)$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .

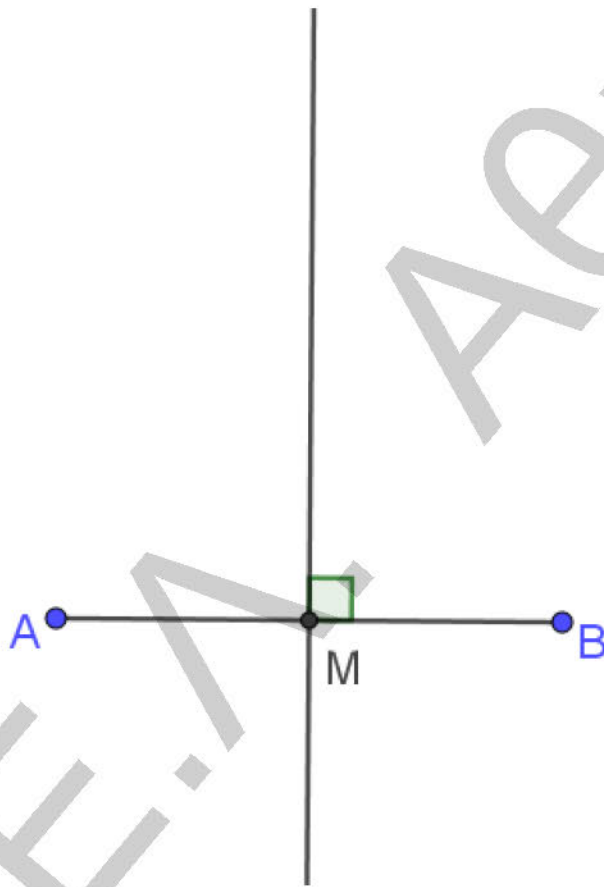
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος AB .

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι $\lambda = \frac{5 - (-1)}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$.

β) Το μέσο M του AB έχει συντεταγμένες $M(\frac{1+3}{2}, \frac{-1+5}{2})$ δηλαδή M(2,2).

γ) Αν (ε) η ζητούμενη μεσοκάθετος τότε $(\varepsilon) \perp AB$ οπότε $\lambda_{\varepsilon} \cdot \lambda_{AB} = -1$ και άρα $\lambda_{\varepsilon} \cdot 3 = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = -\frac{1}{3}$.

Η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο M(2,2) και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon} = -\frac{1}{3}$,

οπότε $(\varepsilon): y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 2)$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις $x - 3y = 4$ και $9x + 3y = 6$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A(1, -1)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία $(ε_1)$ έχει εξίσωση

$$x - 3y - 4 = 0$$

και συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Η ευθεία $(ε_2)$ έχει εξίσωση

$$9x + 3y - 6 = 0$$

και συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{9}{3} = -3$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{3}(-3) = -1$$

Άρα, οι ευθείες $(ε_1)$ και $(ε_2)$ είναι κάθετες.

β) Προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις κατά μέλη, οπότε:

$$10x = 10 \text{ ή } x = 1$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση $9x + 3y = 6$ και έχουμε διαδοχικά:

$$9 + 3y = 6$$

$$3y = -3$$

$$y = -1$$

Άρα, το σημείο τομής των ευθειών $(ε_1)$ και $(ε_2)$ είναι το $A(1, -1)$.

γ) Γνωρίζουμε ότι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $x = x_0$. Επομένως, η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι $x = 1$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2 : x - 2y = -2$.

α) Να βρείτε το κοινό τους σημείο M .

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 : 3x - y = 4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε το κοινό σημείο των ευθειών ε_1 και ε_2 θα λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 6 \\ -2x + 4y = 4 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} 5y = 10 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Οπότε το σημείο M έχει συντεταγμένες $M(2, 2)$.

β) Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3: 3x - y = 4$ θα διέρχονται από το ίδιο σημείο, εάν η ευθεία

$3x - y = 4$ διέρχεται από το $M(2, 2)$, δηλαδή εάν: $3 \cdot 2 - 2 = 4$, που ισχύει.

ΘΕΜΑ 4

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο $M(2, 1)$.

α) Μια ευθεία (ϵ) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το M . Να βρείτε:

i. Την εξίσωση της.

(Μονάδες 2)

ii. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

(Μονάδες 5)

β) Έστω ότι η ευθεία (ϵ) τέμνει τους άξονες x' και y' στα σημεία A, B αντίστοιχα.

i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ , τα μήκη των τμημάτων OA, OB .

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

(Μονάδες 6)

iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) i. Αφού η ευθεία διέρχεται από το Μ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , η εξίσωση της είναι $y-1=\lambda(x-2)$ που γράφεται $y=\lambda x-2\lambda+1$.

ii. Σε κάθε περίπτωση που ισχύει $\lambda \neq 0$ η ευθεία τέμνει και τους δυο άξονες και όταν δεν διέρχεται από την αρχή Ο, δηλαδή όταν $\lambda \neq \frac{1}{2}$, σχηματίζει τρίγωνο.

Επομένως, η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες μόνο όταν $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$.

β) i. Με $y=0$ στην εξίσωση της ευθείας, παίρνουμε $x=\frac{2\lambda-1}{\lambda}$, οπότε $A\left(\frac{2\lambda-1}{\lambda}, 0\right)$, ενώ με $x=0$ παίρνουμε $y=-2\lambda+1$, οπότε $B(0, -2\lambda+1)$. Επομένως τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ είναι:

$$(OA) = \frac{|2\lambda-1|}{|\lambda|} \text{ και } (OB) = |-2\lambda+1| = |2\lambda-1|$$

ii. Η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο, μόνο όταν $(OA) = (OB)$. Είναι:

$$(OA) = (OB) \Leftrightarrow \frac{|2\lambda-1|}{|\lambda|} = |2\lambda-1| \Leftrightarrow |2\lambda-1|(|\lambda|-1) = 0 \Leftrightarrow |\lambda|-1 = 0$$

αφού $\lambda \neq \frac{1}{2}$. Άρα η ευθεία σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο, όταν $\lambda = -1$ ή $\lambda = 1$.

iii. Αν $\lambda = -1$, τότε $(OA) = 3$ και $(OB) = 3$, οπότε το εμβαδόν (OAB) του τριγώνου ΟΑΒ είναι

$$(OAB) = \frac{9}{2}$$

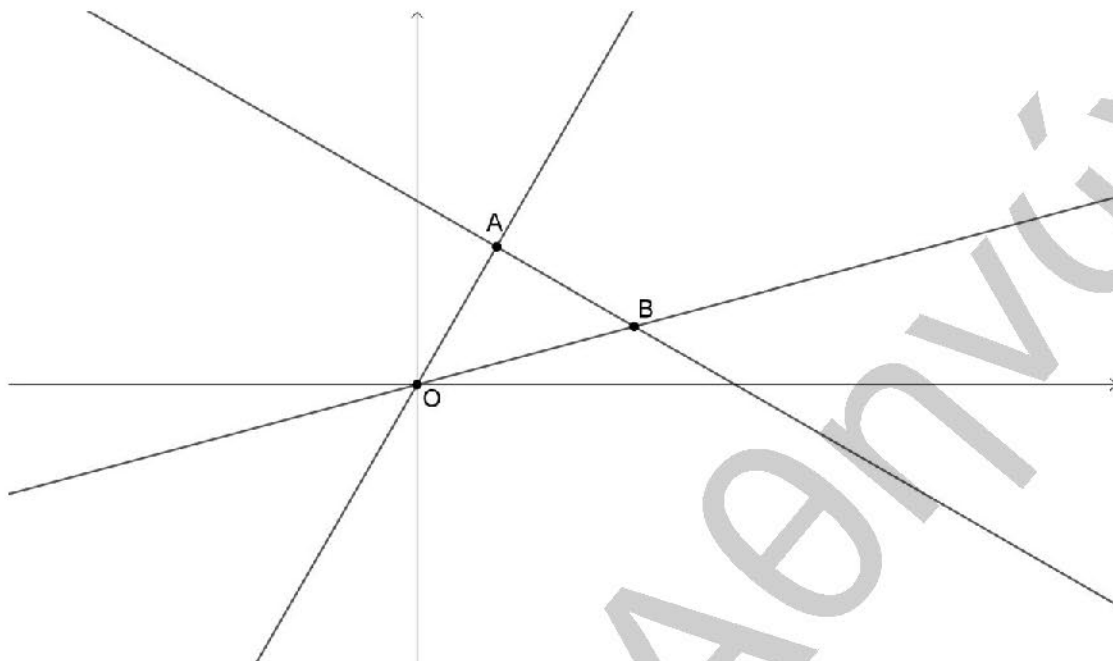
Αν $\lambda = 1$, τότε $(OA) = 1$ και $(OB) = 1$, οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι $(OAB) = \frac{1}{2}$

Σχόλιο

Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (υποτείνουσα) με τον άξονα $x'x$ είναι 45° ή 135° . Έτσι, έχουμε $\lambda = \tan 45^\circ = 1$ ή $\lambda = \tan 135^\circ = -1$ που είναι οι τιμές που βρήκαμε παραπάνω.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(1,\sqrt{3})$, $B(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB καθώς και τη γωνία ϕ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$.

(Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι $\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Η κλίση της ευθείας OA είναι $\lambda_{OA} = \frac{\sqrt{3}-0}{1-0} = \sqrt{3}$ και επειδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση $y = \sqrt{3} \cdot x$. Η γωνία ω που σχηματίζει με τον $x'x$ έχει εφαπτομένη $\sqrt{3}$, οπότε είναι $\omega = 60^\circ$.

β) Η κλίση της ευθείας AB είναι $\lambda_{AB} = \frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1-1} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και αφού διέρχεται από το σημείο $A(1, \sqrt{3})$ έχει εξίσωση $y - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Η γωνία ϕ που σχηματίζει με τον $x'x$ έχει εφαπτομένη $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε είναι $\phi = 150^\circ$.

γ) Είναι $\lambda_{OA} \cdot \lambda_{AB} = \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -1$, δηλαδή $OA \perp AB$, οπότε το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

Επίσης $(OA) = \sqrt{(1-0)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = 2$, $(AB) = \sqrt{(\sqrt{3}+1-1)^2 + (\sqrt{3}-1-\sqrt{3})^2} = 2$ και αφού $(OA) = (AB)$ το OAB είναι και ισοσκελές.

δ) Αν θ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία OB με τον $x'x$, είναι $\theta = \omega - \hat{AOB} = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$, αφού $\hat{AOB} = 45^\circ$ δεδομένου ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$. Όμως $\epsilon\phi\theta = \epsilon\phi 15^\circ$ είναι η κλίση της ευθείας OB δηλαδή $\frac{\sqrt{3}-1-0}{\sqrt{3}+1-0} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$. Συνεπώς $\epsilon\phi 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

