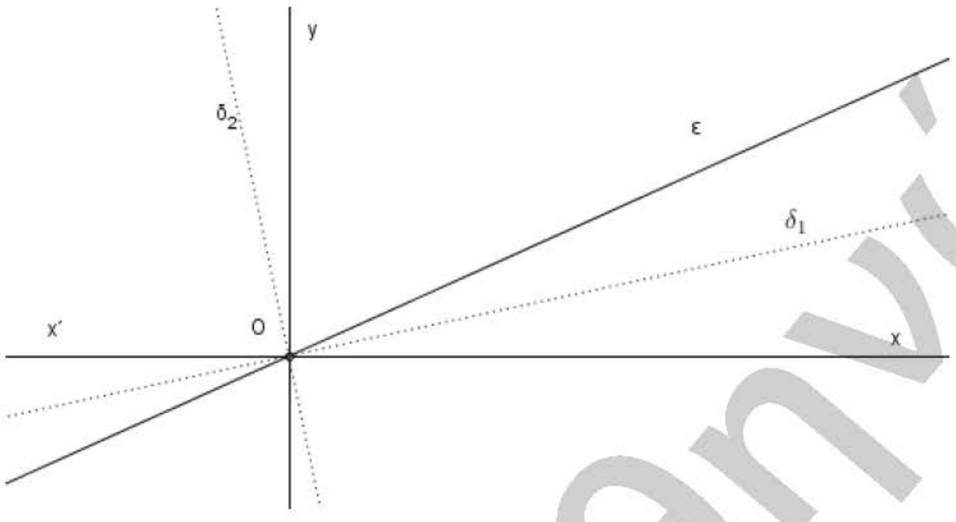
Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε μία ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x$ με θετική κλίση λ.



α) Αν δ_1 είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x'x$ άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_1 είναι:

$$y = \lambda_1 x \quad \text{με} \quad \lambda_1 = \frac{\lambda}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

(Μονάδες 12)

β) Αν δ_2 είναι η διχοτόμος της αμβλείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x'x$ άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_2 είναι:

$$y = \lambda_2 x \quad \text{με} \quad \lambda_2 = \frac{\lambda}{1-\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

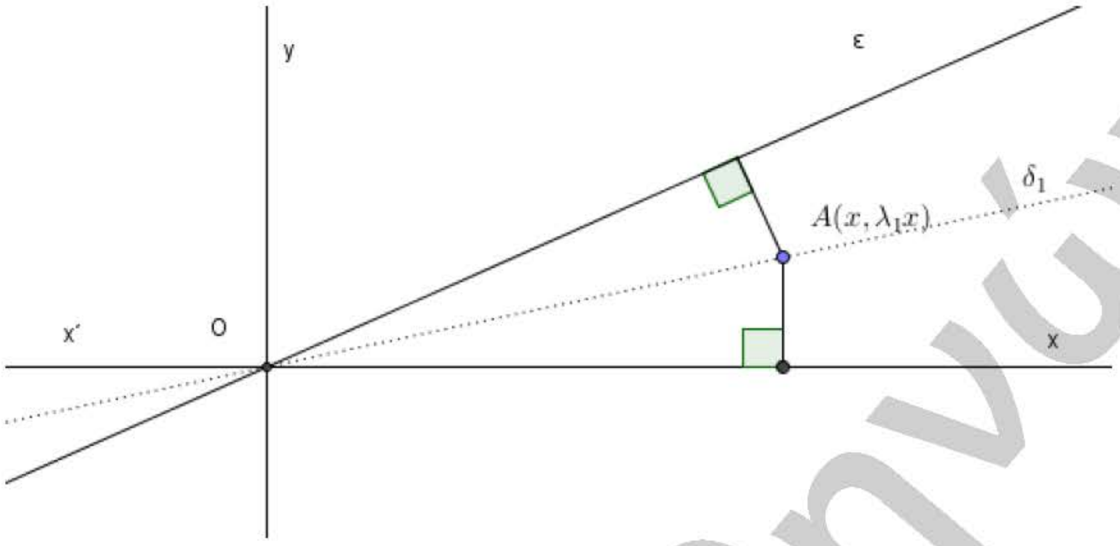
(Μονάδες 7)

γ) Αν $\lambda = 1$, να εφαρμόσετε τους τύπους του α) ερωτήματος για να αποδείξετε ότι:

$$\text{εφ}22{,}5^{\circ} = \sqrt{2} - 1.$$

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ



α) Εξ ορισμού της διχοτόμου γωνίας, η διχοτόμος διέρχεται από το σημείο τομής των δύο πλευρών της γωνίας. Εδώ, οι δύο πλευρές έχουν εξισώσεις: $y = 0$ και $y = \lambda x$ οι οποίες έχουν μοναδική κοινή λύση το $(x, y) = (0,0)$, αφού $\lambda \neq 0$. Επίσης, όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα, η διχοτόμος δ_1 έχει κλίση θετική και μικρότερη από την κλίση της ευθείας ε. Συνεπώς, η διχοτόμος δ_1 είναι μη κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και άρα έχει εξίσωση της μορφής:

$$y = \lambda_1 x \quad \text{με } 0 < \lambda_1 < \lambda.$$

Ένα τυχαίο σημείο της διχοτόμου δ_1 έχει συντεταγμένες $(x, \lambda_1 x)$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Επιλέγω το σημείο $A(1, \lambda_1)$, που αντιστοιχεί στο $x = 1$. Επίσης, οι εξισώσεις των πλευρών της γωνίας είναι:

$x'x$ άξονας: $0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 = 0$.

ευθεία ε : $\lambda \cdot x - 1 \cdot y + 0 = 0$.

Όμως στο σημείο Α,, ως σημείο της διχοτόμου, όσο απέχει από τον $x'x$ άξονα απέχει και από την ευθεία ε, δηλαδή:

$$\mathrm{d}(A,\ x'x \text{ άξονας}) = \mathrm{d}(A,\ \varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$\frac{|0 \cdot 1 + 1 \cdot \lambda_1 + 0|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|\lambda \cdot 1 - 1 \cdot \lambda_1 + 0|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} \overset{\lambda_1>0,\lambda>\lambda_1}{\Longleftrightarrow}$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda - \lambda_1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \Leftrightarrow$$

$$\left(1 + \sqrt{1+\lambda^2}\right)\lambda_1 = \lambda$$

Άρα, $\lambda_1 = \frac{\lambda}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}$.

β) Η διχοτόμος δ_2 (που βρίσκεται στο 2° και 4° τεταρτημόριο) είναι και αυτή ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, οπότε έχει εξίσωση της μορφής $y = \lambda_2 x$, και είναι κάθετη στη διχοτόμο δ_1, επομένως το γινόμενο των αντίστοιχων κλίσεων είναι ίσο με -1, δηλαδή $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, οπότε, από το α ερώτημα, έχουμε διαδοχικά:

$$\lambda_2 = \frac{-1}{\lambda_1} = \frac{-1}{\frac{\lambda}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}} = \frac{1+\sqrt{1+\lambda^2}}{-\lambda} = \frac{\left(1+\sqrt{1+\lambda^2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{1+\lambda^2}\right)}{(-\lambda)\cdot\left(1-\sqrt{1+\lambda^2}\right)} =$$

$$= \frac{1-(1+\lambda^2)}{(-\lambda)\cdot\left(1-\sqrt{1+\lambda^2}\right)} = \frac{-\lambda^2}{(-\lambda)\cdot\left(1-\sqrt{1+\lambda^2}\right)} = \frac{\lambda}{1-\sqrt{1+\lambda^2}}$$

Άρα, $\lambda_2 = \frac{\lambda}{1-\sqrt{1+\lambda^2}}$.

γ) Έστω $\lambda = 1$. Τότε η ευθεία $\varepsilon\colon y = x$ σχηματίζει γωνία 45° με τον θετικό ημιάξονα Οx, και επομένως, η διχοτόμος δ_1 σχηματίζει γωνία $22{,}5^{\circ}$ με τον θετικό ημιάξονα Οx. Άρα, από τον ορισμό της κλίσης και το α) ερώτημα, έχουμε διαδοχικά:

$$\varepsilon\varphi 22{,}5^{\circ} = \lambda_1 = \frac{\lambda}{1+\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{1}{1+\sqrt{1+1^2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})\cdot(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \sqrt{2} - 1\ .$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία (ε): $y-2x=0$ και τα σημεία $\mathrm{B}(1,1)$ και $\Gamma(-1,3)$.

α) Να δείξετε ότι το σημείο $\mathrm{A}(5,10)$ ανήκει στην ευθεία (ε).

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\mathrm{B}}\Gamma$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Ένα σημείο ανήκει στην γραφική παράσταση μιας ευθείας αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Είναι $y-2x=0 \overset{x=5}{\underset{y=10}{\Leftrightarrow}} 10-2\cdot 5=0 \Leftrightarrow 0=0$.

β) Έχουμε $\mathrm{A}(5,10)$.

Οπότε $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}\right)=(1-5,1-10)=(-4,-9)$ (1) και

$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\left(x_{\Gamma}-x_{\mathrm{A}}, y_{\Gamma}-y_{\mathrm{A}}\right)=(-1-5,3-10)=(-6,-7)$ (2).

γ) Από το τύπο του εμβαδού έχουμε

$$(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right| \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-4 & -9\\ -6 & -7\end{matrix}\right\|=$$

$$\frac{1}{2}|28-54|=13\ \tau\mu.$$

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy είναι τοποθετημένα 7 χωριά ως σημεία του επιπέδου και μια πηγή νερού σε ένα σημείο Π. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν 6 αγωγοί νερού που συνδέουν την πηγή με έξι από τα παραπάνω χωριά. Οι αγωγοί αυτοί ανήκουν στις γραμμές με εξισώσεις της μορφής:

$(\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + 2 = 0$, με $\lambda \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

α) Να αποδείξετε ότι και οι 6 γραμμές είναι ευθείες.

(Μονάδες 04)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Π.

(Μονάδες 06)

γ) Το έβδομο χωριό βρίσκεται στο σημείο $O(0,0)$. Να αποδείξετε ότι κανένας από τους παραπάνω αγωγούς νερού δεν διέρχεται από το χωριό αυτό.

(Μονάδες 04)

δ) Προκειμένου να έχει πρόσβαση στο νερό το χωριό Ο, υπάρχουν δύο επιλογές:

1η επιλογή: Να συνδέσουμε απευθείας το χωριό O με την πηγή

2η επιλογή: Να συνδέσουμε το χωριό O με έναν από τους παραπάνω αγωγούς μέσω της συντομότερης διαδρομής.

Με δεδομένο ότι το κόστος κατασκευής ανά μονάδα μήκους για κάθε μία από τις παραπάνω επιλογές είναι το ίδιο,

i. να βρείτε την τιμή του λ για την οποία οι δύο επιλογές οδηγούν στο ίδιο κόστος κατασκευής.

(Μονάδες 08)

ii. Πως εξηγείται γεωμετρικά το συμπέρασμα;

(Μονάδες 03)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση: $(\lambda+1)x+(\lambda-1)y+2=0$ είναι της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$, με $A=\lambda+1$ και $B=\lambda-1$.

Επειδή $\lambda\in\{0,1,2,3,4,5\}$ έχουμε: $A=\lambda+1\neq 0$.

Έτσι, όλες αυτές οι γραμμές είναι ευθείες.

β) Για $\lambda=1$, προκύπτει η ευθεία $\varepsilon_1: x=-1$, ενώ για $\lambda=2$, προκύπτει η ευθεία $\varepsilon_2: 3x+y=-2$.

Οι ε_1, ε_2 τέμνονται στο σημείο $(-1,1)$. Γνωρίζοντας ότι όλες οι γραμμές σύνδεσης διέρχονται από την πηγή Π, συμπεραίνουμε ότι η πηγή του νερού αντιστοιχεί στο σημείο $\Pi(-1,1)$.

γ) Για $x=0$ και $y=0$, προκύπτει: $(\lambda+1)\cdot 0+(\lambda-1)\cdot 0+2\neq 0$.

Επομένως το $O(0,0)$ δεν ανήκει σε κάποια από τις ευθείες.

δ)

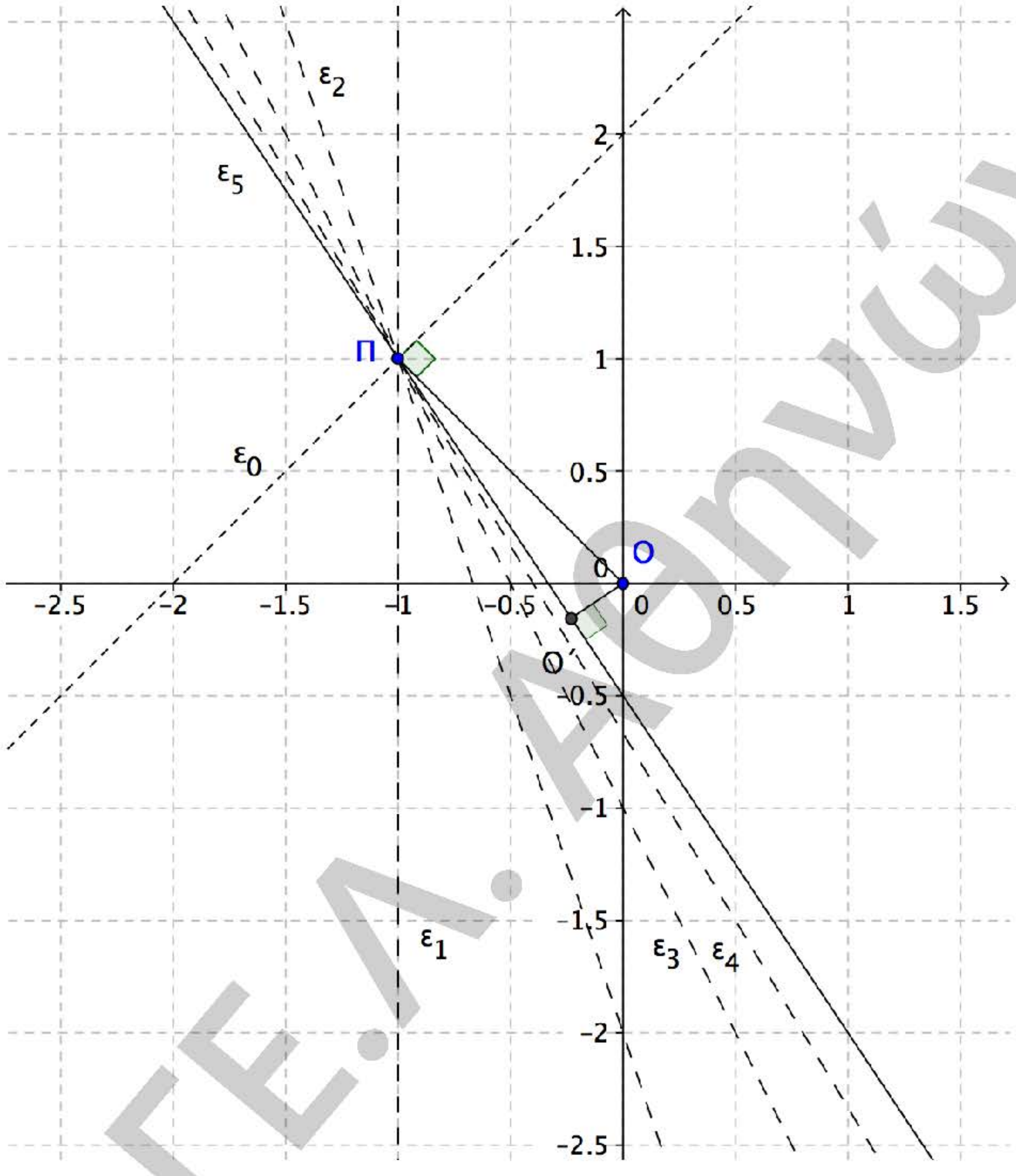
i. Η απόσταση του Ο από το Π είναι $(O\Pi)=\sqrt{(-1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$, ενώ αν $\varepsilon_\lambda: (\lambda+1)x+(\lambda-1)y+2=0$, τότε

$$d(O,\varepsilon_\lambda)=\frac{|(\lambda-1)0+(\lambda+1)0+2|}{\sqrt{(\lambda-1)^2+(\lambda+1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2\lambda^2+2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda^2+1}},\quad \lambda\in\{0,1,2,3,4,5\}$$

Έχουμε: $d(O,\varepsilon_\lambda)=(O\Pi)\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2+1}=1\Leftrightarrow \lambda=0$.

Δηλαδή οι δύο επιλογές οδηγούν στο ίδιο κόστος κατασκευής για λ=0 και ο αγωγός με τον οποίο θα μπορούσε να συνδεθεί το χωριό Ο είναι αυτός που διέρχεται από την ευθεία $\varepsilon_0: x-y+2=0$.

ii. Από την ισότητα $d(O,\varepsilon_0)=(O\Pi)$ προκύπτει ότι η προβολή του σημείου Ο πάνω στην ευθεία ε_0 είναι το σημείο Π, επομένως $O\Pi\perp\varepsilon_0$.


ε2
ε5
Π
ε0
O
O΄
ε1
ε3
ε4
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το σημείο $M(-2,2)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon)$ που διέρχονται από το σημείο M.

(Μονάδες 06)

β)

i. Να βρείτε ποιες από τις παραπάνω εξισώσεις ευθειών σχηματίζουν τρίγωνο με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy.

(Μονάδες 04)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $\varepsilon_1)$, η οποία διέρχεται από το σημείο M και σχηματίζει με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy τρίγωνο, με εμβαδόν $E=8$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν (ε_1): $y=x+4$, να βρείτε το μήκος του ύψους του ορθογωνίου τριγώνου, που σχηματίζει η $\varepsilon_1)$ με τους άξονες, το οποίο φέρεται από την κορυφή O.

(Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

α) Για την εύρεση των εξισώσεων των ευθειών $\varepsilon)$ που διέρχονται από το σημείο $M(-2,2)$ διακρίνονται δύο περιπτώσεις:

1η: Αν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\varepsilon)$: $y-2=\lambda\,(x+2)$

2η: Αν δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης, τότε $\varepsilon)$: $x=-2$.

β) i. Η ευθεία με εξίσωση $x=-2$ είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και ως εκ τούτου δεν σχηματίζει τρίγωνο με τους δύο άξονες.

Αν $\lambda=0$, προκύπτει η οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y=2$, η οποία δεν σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

Τέλος, για να τέμνει η $\varepsilon)$ τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy, πρέπει να έχει κλίση θετική, δηλαδή $\lambda>0$.

Επομένως, οι ζητούμενες ευθείες έχουν εξίσωση $y-2=\lambda\ \ x+2)$, με $\lambda>0$ (1).

ii. Αρχικά υπολογίζουμε ως συνάρτηση του $\lambda \in \mathbb{R}$, τις συντεταγμένες των σημείων τομής της (1) με τους δύο ημιάξονες. Έτσι είναι:

$1 \overset{x=0}{\Longrightarrow} y=2\lambda+2$.

Επομένως το σημείο τομής των ευθειών με τον θετικό ημιάξονα Oy, είναι το $A(0,2\lambda+2)$.

$1 \overset{y=0}{\Longrightarrow} \lambda\cdot x=-2\lambda-2 \overset{\lambda>0}{\Longrightarrow} x=\frac{-2\lambda-2}{\lambda}$.

Επομένως το σημείο τομής των ευθειών με τον αρνητικό ημιάξονα Ox', είναι το $B\left(\frac{-2\lambda-2}{\lambda},0\right)$.

Το τρίγωνο που σχηματίζεται είναι το OAB, με εμβαδόν:

$E=\ \ OAB)=\frac{1}{2}\cdot\ \ OA)\cdot\ \ OB)=\frac{1}{2}\left|\frac{-2\lambda-2}{\lambda}\right|\cdot|2\lambda+2|=2\left|\frac{\lambda+1)^2}{\lambda}\right|=2\ \frac{\lambda+1)^2}{\lambda}$

Αλλά ισχύει:

$$E=8 \Leftrightarrow 2\ \frac{\lambda+1)^2}{\lambda}=8 \Leftrightarrow\ \ \lambda+1)^2=4\lambda \Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$$

Επομένως από την (1) προκύπτει ότι η ζητούμενη ευθεία είναι η $\varepsilon_1 : y=x+4$.

γ) Για να βρούμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος, που εκφράζει το ύψος του τριγώνου που φέρεται απο την κορυφή O, αρκεί να βρούμε την απόσταση του σημείου O απο την ευθεία $\varepsilon_1 : y=x+4 \Leftrightarrow x-y+4=0$. Είναι: $d(O,\varepsilon_1\ \ =\frac{|1\cdot 0-1\cdot 0+4|}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ και $\varepsilon_2 : y = x$.

α) Να σχεδιάσετε τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια με τον άξονα xx'.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB, όπου $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(3,\sqrt{3}), \mathrm{B}(3,3)$.

(Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 15^{\circ} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

(Μονάδες 7)

(Θυμίζουμε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από το ημιγινόμενο δύο πλευρών του επί το ημίτονο της περιεχόμενης γωνίας τους).

ΛΥΣΗ

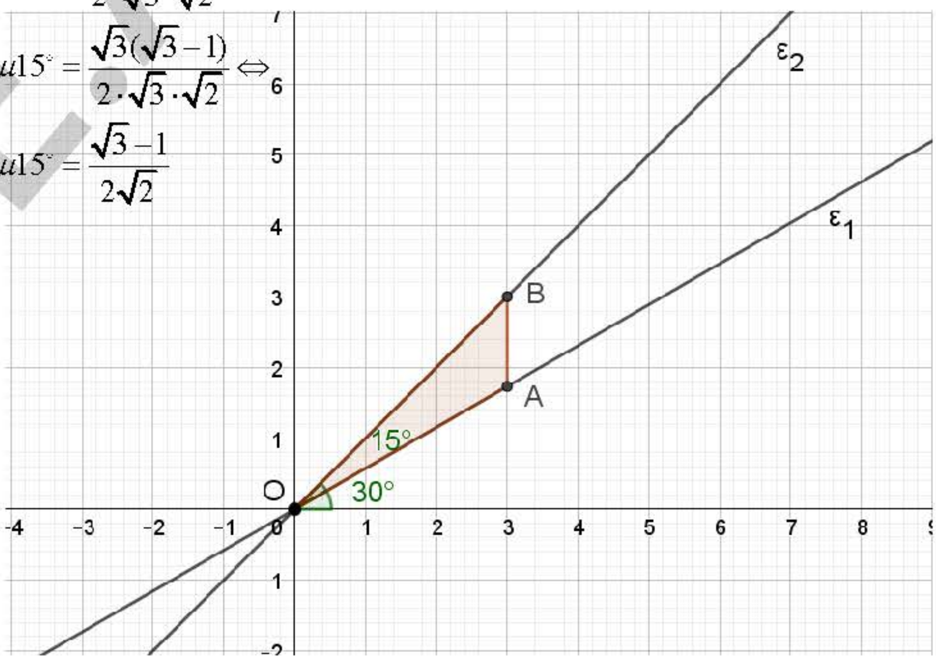
α) Η ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $\mathrm{A}(3,\sqrt{3})$ ενώ η ε_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $\mathrm{B}(3,3)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

β) Η ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ οπότε σχηματίζει με τον xx΄ γωνία 30°, ενώ η ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης 1, οπότε σχηματίζει με τον xx΄ γωνία 45°.

γ) Είναι $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,\sqrt{3}),\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(3,3)$ οπότε $(\mathrm{OAB})=\dfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}})\right|=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}3 & \sqrt{3}\\ 3 & 3\end{matrix}\right\|=\dfrac{9-3\sqrt{3}}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

δ) Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι η διαφορά των γωνιών που σχηματίζει η κάθε μία από τις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ με τον xx', δηλαδή $45^\circ-30^\circ=15^\circ$. Γνωρίζουμε από τη γεωμετρία ότι $(\mathrm{OAB})=\dfrac{1}{2}\cdot(\mathrm{OA})\cdot(\mathrm{OB})\cdot\eta\mu 15^\circ$, οπότε

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{OAB})=\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{OA})\cdot(\mathrm{OB})\cdot\eta\mu 15^\circ \Leftrightarrow\\
&\frac{9-3\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\cdot\sqrt{3^2+3^2}\cdot\eta\mu 15^\circ \Leftrightarrow\\
&9-3\sqrt{3}=\sqrt{12}\cdot\sqrt{18}\cdot\eta\mu 15^\circ \Leftrightarrow\\
&3(3-\sqrt{3})=2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\eta\mu 15^\circ \Leftrightarrow\\
&\eta\mu 15^\circ=\frac{3-\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} \Leftrightarrow\\
&\eta\mu 15^\circ=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} \Leftrightarrow\\
&\eta\mu 15^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$



ΘΕΜΑ 4

Η ευθεία ε με εξίσωση $x+y-1=0$ του παρακάτω σχήματος, αναπαριστά τη γραμμή ενός σιδηροδρομικού δικτύου που εξυπηρετεί τους κατοίκους δύο πόλεων $\mathrm{A}(8,1)$, $\mathrm{B}(-7,4)$ (για την ακρίβεια A, B είναι τα κεντρικά σημεία των πόλεων από τα οποία μετράμε αποστάσεις). Για το λόγο αυτό θα κατασκευαστεί κατά μήκος της γραμμής (ε), ένας σταθμός σε ένα σημείο Σ και μία πεζογέφυρα σε ένα σημείο Π.

Να βρείτε :

α) ποια πόλη από τις A, B είναι πλησιέστερα στη γραμμή του τραίνου.

(Μονάδες 6)

β) τις συντεταγμένες του Π, αν είναι γνωστό ότι θα κατασκευαστεί στο πλησιέστερο σημείο της γραμμής στην πόλη Β.

(Μονάδες 7)

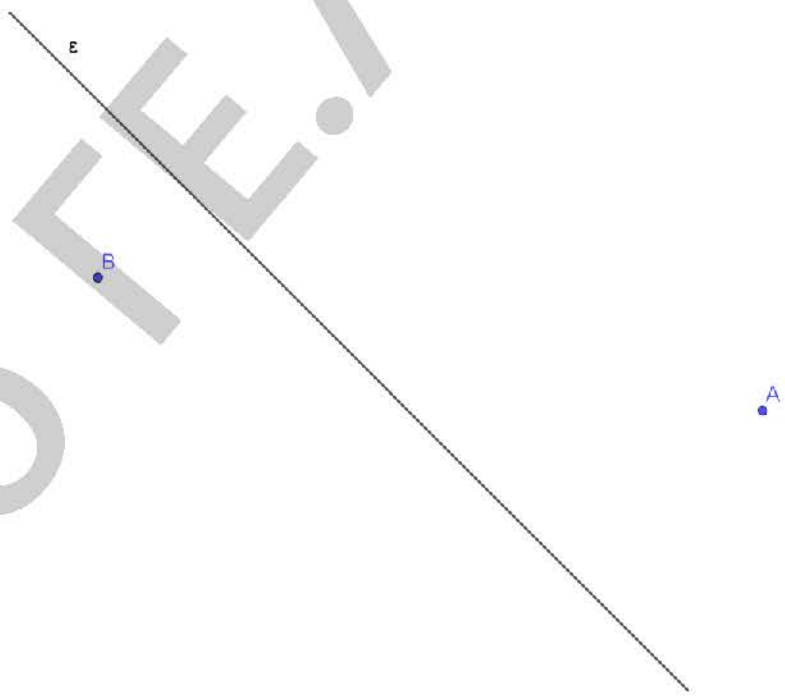
γ) τις συντεταγμένες του Σ στις παρακάτω περιπτώσεις

i. ο σταθμός Σ να ισαπέχει από τις πόλεις A, B.

(Μονάδες 6)

ii. το οδικό δίκτυο που θα συνδέει το σταθμό Σ με τις πόλεις A, B να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος.

(Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

α) Είναι $d(\mathrm{A},\varepsilon)=\dfrac{|8+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{2}}$ και $d(\mathrm{B},\varepsilon)=\dfrac{|-7+4-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ οπότε η πόλη B είναι πλησιέστερα στη γραμμή του τραίνου.

β) Το πλησιέστερο σημείο Π της πόλης B στην ευθεία (ε), είναι η προβολή του σημείου B στην ευθεία (ε). Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=-1$, οπότε η κάθετή της ευθεία η θα έχει $\lambda_\eta=1$. Η ευθεία (η) θα έχει εξίσωση

$y-y_{\mathrm{B}}=\lambda_\eta(x-x_{\mathrm{B}})\Leftrightarrow y-4=1\cdot(x+7)\Leftrightarrow y=x+11$.

Οι συντεταγμένες του σημείου Π είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases}x+y=1\\ y=x+11\end{cases}$.

Με αντικατάσταση της 2ης εξίσωσης στην 1η έχουμε:

$x+x+11=1\Leftrightarrow 2x=-10\Leftrightarrow x=-5$ και στη συνέχεια βρίσκουμε $y=6$. Συνεπώς το σημείο Π έχει συντεταγμένες $\Pi(-5,6)$.

γ)

i. ο σταθμός Σ θα ισαπέχει από τις πόλεις A,B αν και μόνο αν ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΑΒ. Η ευθεία ΑΒ έχει $\lambda_{\mathrm{AB}}=\dfrac{4-1}{-7-8}=\dfrac{3}{-15}=-\dfrac{1}{5}$ οπότε η μεσοκάθετος (ζ) του ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης λ_ζ για τον οποίο ισχύει

$\lambda_\zeta\cdot\lambda_{\mathrm{AB}}=-1\Leftrightarrow\lambda_\zeta\cdot(-\dfrac{1}{5})=-1\Leftrightarrow\lambda_\zeta=5$.

Το μέσο Ε του τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες $\mathrm{E}(\dfrac{-7+8}{2},\dfrac{4+1}{2})$, δηλαδή $\mathrm{E}(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2})$.

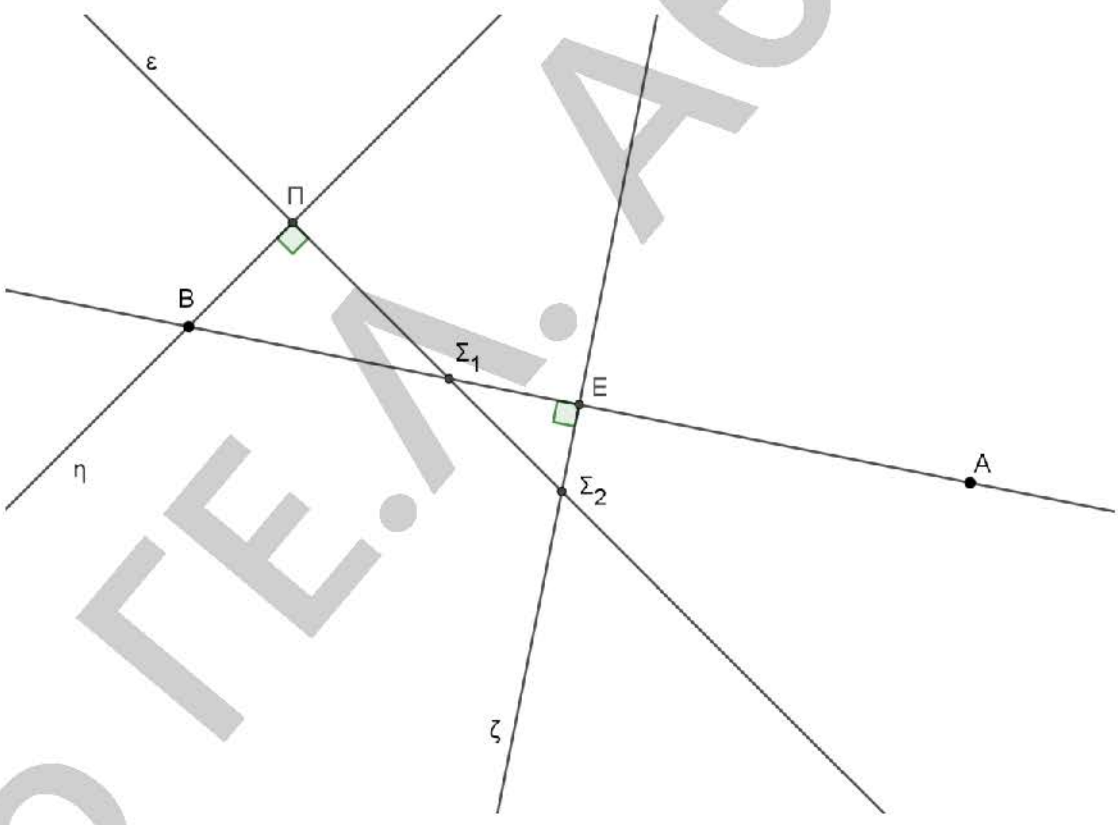
Η ευθεία (ζ) θα έχει εξίσωση $y-y_{\mathrm{E}}=\lambda_\zeta(x-x_{\mathrm{E}})\Leftrightarrow y-\dfrac{5}{2}=5\cdot(x-\dfrac{1}{2})\Leftrightarrow y=5x$.

Οι συντεταγμένες του σημείου Σ είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases}x+y=1\\ y=5x\end{cases}$. Με αντικατάσταση της 2ης εξίσωσης στην 1η έχουμε $x+5x=1\Leftrightarrow 6x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{6}$ και κατόπιν $y=\dfrac{5}{6}$. Συνεπώς το σημείο Σ έχει συντεταγμένες $\Sigma(\dfrac{1}{6},\dfrac{5}{6})$ (το Σ_2 στο σχήμα).

ii. Το οδικό δίκτυο που θα συνδέει το σταθμό Σ με τις πόλεις A, B θα έχει το μικρότερο δυνατό μήκος αν και μόνο αν το Σ ανήκει στην ευθεία ΑΒ. Η ευθεία ΑΒ έχει $\lambda_{\mathrm{AB}} = \dfrac{4-1}{-7-8} = \dfrac{3}{-15} = -\dfrac{1}{5}$ και εξίσωση

$$y - y_{\mathrm{A}} = \lambda_{\mathrm{AB}}(x - x_{\mathrm{A}}) \Leftrightarrow y - 1 = -\frac{1}{5}\cdot(x-8) \Leftrightarrow 5y - 5 = -x + 8 \Leftrightarrow 5y + x = 13.$$

Οι συντεταγμένες του σημείου Σ είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} x + y = 1 \\ 5y + x = 13 \end{cases}$. Με αντικατάσταση της 2ης εξίσωσης στην 1η έχουμε $13 - 5y + y = 1 \Leftrightarrow -4y = -12 \Leftrightarrow y = 3$ και στη συνέχεια $x = -2$. Συνεπώς το σημείο Σ έχει συντεταγμένες $\Sigma(-2,3)$ (το Σ_1 στο σχήμα).



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(2,1), B(3,-1)$ και $\Gamma(-2,0)$.

α)

i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 07)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ ισούται με $\frac{9}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 03)

β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $\Delta(x,y)$ για τα οποία ισχύει $(\Delta A\Gamma)=(AB\Gamma)$

(Μονάδες 07)

γ) Αν ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Δ του ερωτήματος (β) αποτελείται από τις ευθείες $\varepsilon_1: x-4y-7=0$ και $\varepsilon_2: x-4y+11=0$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $A\Gamma$, ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

(Μονάδες 03)

ii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός « οι ευθείες $x-4y-7=0$ και $x-4y+11=0$ έχουν ως μεσοπαράλληλο την ευθεία $A\Gamma$ ».

(Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

α)

i. Για να αποδείξουμε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \not\parallel \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

Είναι

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}\right) = (3-2, -1-1) = (1, -2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \left(x_{\Gamma} - x_{\mathrm{A}}, y_{\Gamma} - y_{\mathrm{A}}\right) = (-2-2, 0-1) = (-4, -1)$$

και

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - (-2)\cdot(-4) = -1 - 8 = -9$$

Επειδή $\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right) \neq 0$ είναι $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \not\parallel \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ και έπεται το ζητούμενο.

ii. Είναι $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right| = \frac{1}{2}\cdot|-9| = \frac{9}{2}$ τ.μ.

β) Το εμβαδό του τριγώνου $\Delta\mathrm{A}\Gamma$ ισούται με

$$(\Delta\mathrm{A}\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ x-2 & y-1 \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|-4(y-1) - (-1)(x-2)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|-4y + 4 + x - 2\right| = \frac{1}{2}\left|x - 4y + 2\right|$$

Επομένως, το $\Delta(x, y)$ είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου, αν και μόνο αν ισχύει

$$\begin{aligned}(\Delta\mathrm{A}\Gamma) = (\mathrm{AB\Gamma}) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}|x-4y+2| = \frac{9}{2} \\ &\Leftrightarrow |x-4y+2| = 9 \\ &\Leftrightarrow x-4y+2 = 9 \text{ ή } x-4y+2 = -9 \\ &\Leftrightarrow x-4y-7 = 0 \text{ ή } x-4y+11 = 0\end{aligned}$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος αποτελείται από τις ευθείες $x-4y-7=0$ και $x-4y+11=0$.

γ) Είναι $\varepsilon_1: x-4y-7=0$ και $\varepsilon_2: x-4y+11=0$.

i. Είναι $\lambda_{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{y_{\Gamma} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\Gamma} - x_{\mathrm{A}}} = \frac{0-1}{-2-2} = \frac{1}{4}$ και $\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} = -\frac{1}{(-4)} = \frac{1}{4}$. Επειδή οι ευθείες ε_1, ε_2 και $\mathrm{A\Gamma}$ έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης είναι μεταξύ τους παράλληλες.

ii. **<u>α τρόπος</u>**

Είναι

$$d(\Gamma,\varepsilon_1)=\frac{|x_\Gamma-4y_\Gamma-7|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\frac{|-2-4\cdot 0-7|}{\sqrt{1+16}}=\frac{9}{\sqrt{17}}=\frac{9\sqrt{17}}{17}$$ μονάδες μήκους,

$$d(\Gamma,\varepsilon_2)=\frac{|x_\Gamma-4y_\Gamma+11|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\frac{|-2-4\cdot 0+11|}{\sqrt{1+16}}=\frac{9}{\sqrt{17}}=\frac{9\sqrt{17}}{17}$$ μονάδες μήκους

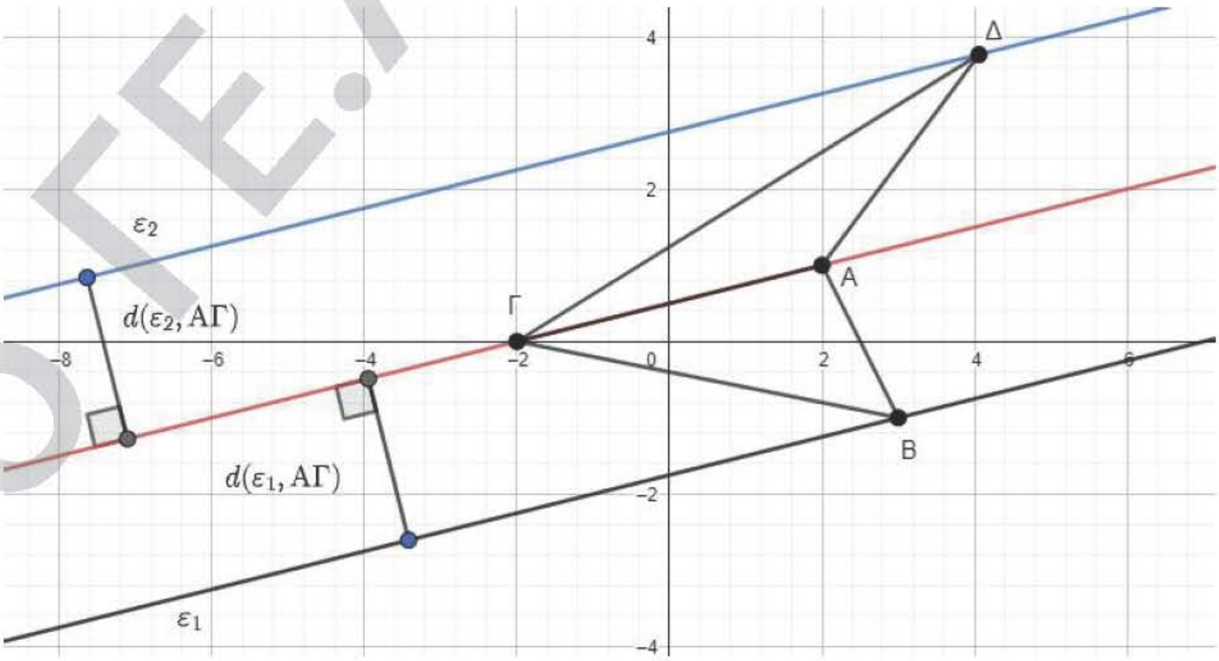
και επειδή οι ευθείες ε_1, ε_2 και $\mathrm{A\Gamma}$ είναι μεταξύ τους παράλληλες συμπεραίνουμε ότι ο ισχυρισμός « οι ευθείες $x-4y-16=0$ και $x-4y+20=0$ έχουν ως μεσοπαράλληλο την ευθεία $\mathrm{A\Gamma}$ » είναι αληθής.

<u>β τρόπος</u>

Από το ερώτημα (β) γνωρίζουμε ότι ισχύει $(\Delta\mathrm{A\Gamma})=(\mathrm{AB\Gamma})$ μόνο όταν το Δ ανήκει στην ευθεία ε_1 ή στην ευθεία ε_2. Αν επιλέξουμε το Δ να ανήκει στην ευθεία ε_1, τότε έχουμε:

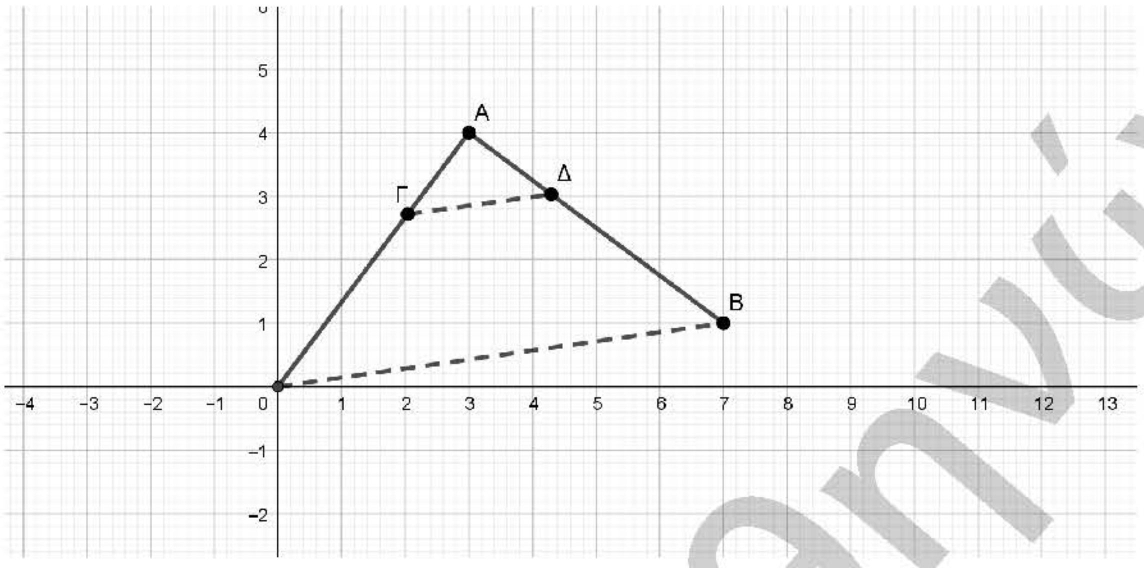
$$\begin{aligned}(\Delta\mathrm{A\Gamma})=(\mathrm{AB\Gamma})&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}\cdot d(\Delta,\mathrm{A\Gamma})=\frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}\cdot d(\mathrm{B},\mathrm{A\Gamma})\\ &\Leftrightarrow d(\Delta,\mathrm{A\Gamma})=d(\mathrm{B},\mathrm{A\Gamma})\\ &\Leftrightarrow d(\varepsilon_1,\mathrm{A\Gamma})=d(\varepsilon_2,\mathrm{A\Gamma})\end{aligned}$$

Οπότε, ο ισχυρισμός « οι ευθείες $x-4y-16=0$ και $x-4y+20=0$ έχουν ως μεσοπαράλληλο την ευθεία $\mathrm{A\Gamma}$ » είναι αληθής.



ΘΕΜΑ 4

Σε σύστημα αξόνων δίνονται τα σημεία $A(3,4)$ και $B(7,1)$.



α) Αν $\Gamma\left(2,\frac{8}{3}\right)$ και $\Delta\left(\frac{13}{3},3\right)$ να δείξετε ότι:

i. $\overrightarrow{A\Gamma}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

(Μονάδες 6)

ii. $\Gamma\Delta // OB$.

(Μονάδες 5)

iii. Να δείξετε ότι $(A\Gamma\Delta)=\left(\frac{1}{3}\right)^2(AOB)$.

(Μονάδες 5)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του α) ερωτήματος, αν για τα σημεία Γ και Δ ισχύουν $\overrightarrow{A\Gamma}=\frac{1}{\nu}\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{\nu}\overrightarrow{AB}$, να δείξετε ότι $\left(A\Gamma\Delta\right)=\left(\frac{1}{\nu}\right)^2\left(ABO\right)$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α)

i. Οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ δίνονται από την σχέση $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\left(x_{\Gamma}-x_{\mathrm{A}}, y_{\Gamma}-y_{\mathrm{A}}\right)$, οπότε αντικαθιστώντας παίρνουμε $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\left(-1,-\frac{4}{3}\right)$. Όμοια παίρνουμε $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=(-3,-4)$, δηλαδή έχουμε $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\left(-1,-\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{3}(-3,-4)=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AO}}$.

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\left(\frac{4}{3},-1\right)$ και $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4,-3)$, δηλαδή έχουμε $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\left(\frac{4}{3},-1\right)=\frac{1}{3}(4,-3)=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

ii. Είναι $\lambda_{\Gamma\Delta}=\dfrac{3-\frac{8}{3}}{\frac{13}{3}-2}=\frac{1}{7}$ και $\lambda_{\mathrm{OB}}=\frac{1-0}{7-0}=\frac{1}{7}$, επομένως $\Gamma\Delta // \mathrm{OB}$.

iii. Είναι $\left(\mathrm{A\Gamma\Delta}\right)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}},\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\right)\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-1 & -\frac{4}{3}\\ \frac{4}{3} & -1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|1+\frac{16}{9}\right|=\frac{25}{18}$ τ.μ.

Ακόμα $\left(\mathrm{ABO}\right)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}4 & -3\\ -3 & -4\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|-16-9\right|=\frac{25}{2}$ τ.μ. Επομένως έχουμε

$$\left(\mathrm{A\Gamma\Delta}\right)=\frac{25}{18}=\frac{1}{9}\cdot\frac{25}{2}=\frac{1}{9}\cdot\left(\mathrm{ABO}\right)\Leftrightarrow$$
$$\left(\mathrm{A\Gamma\Delta}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\cdot\left(\mathrm{ABO}\right)$$

β) Έχουμε

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{1}{\nu}\overrightarrow{\mathrm{AO}}\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{1}{\nu}\left(x_{\mathrm{O}}-x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{O}}-y_{\mathrm{A}}\right)\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{1}{\nu}\left(0-3,0-4\right)\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\left(-\frac{3}{\nu},-\frac{4}{\nu}\right).$$

Όμοια,

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\frac{1}{\nu}\overrightarrow{\mathrm{A}B}\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\frac{1}{\nu}\left(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}\right)\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\frac{1}{\nu}\left(7-3,1-4\right)\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\left(\frac{4}{\nu},-\frac{3}{\nu}\right).$$

Επομένως $\left(\mathrm{A\Gamma\Delta}\right)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\mathrm{A\Gamma},\mathrm{A\Delta}\right)\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-\frac{3}{\nu} & -\frac{4}{\nu}\\ \frac{4}{\nu} & -\frac{3}{\nu}\end{matrix}\right\|=\frac{25}{2\nu^{2}}$ τ.μ.

Από το α)iii. έχουμε $\left(\mathrm{ABO}\right)=\frac{25}{2}$ τ.μ., οπότε τελικά, $\left(\mathrm{A\Gamma\Delta}\right)=\frac{25}{2\nu^{2}}=\frac{1}{\nu^{2}}\cdot\frac{25}{2}=\left(\frac{1}{\nu}\right)^{2}\cdot\left(\mathrm{ABO}\right)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+y=x+2xy+6$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(x-y)^2-(x-y)-6=0$.

(Μονάδες 4)

ii. Η εξίσωση παριστάνει ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών, τις οποίες να βρείτε.

(Μονάδες 4)

Έστω $\varepsilon_1: x-y-3=0$ και $\varepsilon_2: x-y+2=0$ οι δυο παράλληλες ευθείες.

β) Να αποδείξετε ότι όλα τα σημεία $M\left(\alpha, \alpha-\frac{1}{2}\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$ ισαπέχουν από τις δυο ευθείες.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την μεσοπαράλληλη των δυο ευθειών.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) i. Είναι:

$$x^2+y^2+y=x+2xy+6 \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy-x+y-6=0 \Leftrightarrow (x-y)^2-(x-y)-6=0$$

που είναι το ζητούμενο.

ii. Αν θέσουμε $x-y=u$ τότε η τελευταία εξίσωση γράφεται $u^2-u-6=0$ και έχει ρίζες τους αριθμούς -2, 3 οπότε έχουμε:

- $u=-2: x-y=-2 \Leftrightarrow x-y+2=0$
- $u=3: x-y=3 \Leftrightarrow x-y-3=0$

Επομένως η εξίσωση παριστάνει το ζεύγος των ευθειών

$$\varepsilon_1: x-y-3=0 \text{ και } \varepsilon_2: x-y+2=0$$

που έχουν το ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, $\lambda_1=\lambda_2=1$ και είναι παράλληλες μεταξύ τους.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $d(M, \varepsilon_1)=d(M, \varepsilon_2)$.

Είναι:

$$d(M, \varepsilon_1)=\frac{\left|\alpha-\alpha+\frac{1}{2}-3\right|}{\sqrt{1+1}}=\frac{5}{2\sqrt{2}} \text{ και } d(M, \varepsilon_2)=\frac{\left|\alpha-\alpha+\frac{1}{2}+2\right|}{\sqrt{1+1}}=\frac{5}{2\sqrt{2}}$$

οπότε $d(M, \varepsilon_1)=d(M, \varepsilon_2)$.

γ) Το σημείο Μ ισαπέχει από τις ευθείες ε_1, ε_2 οπότε βρίσκεται πάνω στην μεσοπαράλληλη τους. Επιπλέον καθεμιά από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$, οπότε η μεσοπαράλληλη διέρχεται από το Μ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$. Άρα η εξίσωση της είναι:

$$y-\alpha+\frac{1}{2}=1(x-\alpha) \Leftrightarrow y=x-\frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x - 2y = 1$ και τα σημεία $A(0,2)$, $B(1,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Β ανήκει στην ευθεία ε ενώ το σημείο Α δεν είναι σημείο της ε.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε.

(Μονάδες 08)

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του A από το B και να αποδείξετε ότι η προβολή του A στην ευθεία ε είναι το B.

(Μονάδες 09)

ΛΥΣΗ

α) Για να αποδείξουμε ότι το σημείο $\mathrm{B}(1,0)$ ανήκει στην ε, αρκεί να δείξουμε ότι

$1-2\cdot 0=1$ ή $1=1$, που ισχύει.

Για το σημείο $\mathrm{A}(0,2)$ έχουμε: $0-2\cdot 2=-4\neq 1$, επομένως το σημείο Α δεν είναι σημείο της ε, αφού οι συντεταγμένες του δεν επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

β) Έχουμε: $\mathrm{d}(\mathrm{A},\varepsilon)=\dfrac{|0-2\cdot 2-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

γ) Έχουμε: $(\mathrm{AB})=\sqrt{(1-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$.

Επομένως $(\mathrm{AB})=\mathrm{d}(\mathrm{A},\varepsilon)$, δηλαδή η προβολή του Α στην ευθεία ε είναι το Β.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : 2x + y - 6 = 0$ και $\varepsilon_2 : 2x + y + 2 = 0$.

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

(Μονάδες 12)

β)

i. Να δείξετε ότι το σημείο $\mathrm{A}(0,6)$ ανήκει στην ευθεία ε_1.

(Μονάδες 5)

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία $\varepsilon_1: 2x+y-6=0$ γράφεται και $\varepsilon_1: y=-2x+6$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=-2$.

Η ευθεία $\varepsilon_2: 2x+y+2=0$ γράφεται και $\varepsilon_2: y=-2x-2$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2=-2$.

Επειδή $\lambda_1=\lambda_2$, οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

β)

i. Το σημείο $\mathrm{A}(0,6)$ είναι σημείο της ε_1, αφού $2\cdot 0+6-6=0$.

ii. Η απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία $\varepsilon_2: 2x+y+2=0$. Άρα:

$$d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=d(\mathrm{A},\varepsilon_2)=\frac{|2\cdot 0+1\cdot 6+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(4,3)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(6,0)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 8)

γ) Δίνεται το σημείο $M\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$. Να δείξετε ότι $(MA)=(MB)$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{AB}=(1-4,1-3)=(-3,-2)$ και

$\overrightarrow{A\Gamma}=(6-4,0-3)=(2,-3)$.

β) Έχουμε $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=-3\cdot 2+(-2)(-3)=0$, άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

γ) Είναι $(MA)=\sqrt{\left(4-\frac{7}{2}\right)^2+\left(3-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$ και

$(MB)=\sqrt{\left(1-\frac{7}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$. Άρα $(MA)=(MB)$.

Εναλλακτική Λύση

Παρατηρούμε για τις συντεταγμένες του σημείου M ότι ισχύει $\begin{cases}\frac{7}{2}=\frac{1+6}{2}=\frac{x_B+x_\Gamma}{2}\\ \frac{1}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{y_B+y_\Gamma}{2}\end{cases}$,

δηλαδή το σημείο M είναι το μέσον της υποτείνουσας $B\Gamma$. Από το β) ερώτημα η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή και από την Ευκλείδεια γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το μέσον υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου ισαπέχει από τις κορυφές του, άρα $(MA)=(MB)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(2λ+1)x – (λ – 2)y + λ - 7 = 0$ (E) με $λ \in \mathbb{R}$ και η ευθεία (ζ) με εξίσωση: $6x - 8y + 3 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $λ \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (E) παριστάνει ευθεία. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (E), για τα διάφορα $λ \in \mathbb{R}$, διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του $λ \in \mathbb{R}$, ώστε ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (E) να είναι παράλληλη στη ευθεία (ζ). Ποια είναι η εξίσωση της (ε); (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ(1,3) από την ευθεία (ζ). (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε την εξίσωση: $(2\lambda+1)x - (\lambda - 2)y + \lambda - 7 = 0$ (Ε), $\lambda \in \mathbb{R}$ που είναι της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A = 2\lambda + 1$ και $B = \lambda - 2$.

Οπότε: $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda + 1 = 0 \\ \lambda - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ \lambda = 2 \end{cases}$, άρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $A \neq 0$ ή $B \neq 0$,

επομένως η εξίσωση (Ε) παριστάνει ευθεία.

β) Η εξίσωση (Ε) γράφεται: $2\lambda x + x - \lambda y + 2y + \lambda - 7 = 0$ ή

$(2x - y + 1)\lambda + (x + 2y - 7) = 0$. Το να ικανοποιείται η τελευταία εξίσωση για κάθε λ, είναι ισοδύναμο με το να είναι μηδέν οι δύο παρενθέσεις. Δηλαδή:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + 2(2x + 1) - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + 4x + 2 - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Επομένως, όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (Ε), διέρχονται από το σημείο $M(1, 3)$.

γ) Η ευθεία (ζ) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\overrightarrow{\delta_1} = (B, -A) = (-8, -6)$.

Οι ευθείες της οικογένειας ευθειών (Ε), είναι παράλληλες στο διάνυσμα

$\overrightarrow{\delta_2} = (B, -A) = (-\lambda + 2, -2\lambda - 1)$.

Οπότε: $\overrightarrow{\delta_1} \parallel \overrightarrow{\delta_2} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\delta_1}, \overrightarrow{\delta_2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -8 & -6 \\ -\lambda + 2 & -2\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$16\lambda + 8 - 6\lambda + 12 = 0 \Leftrightarrow 10\lambda = -20 \Leftrightarrow \lambda = -2$.

Για $\lambda = -2$ από την εξίσωση (Ε) παίρνουμε: $-3x + 4y - 9 = 0$.

Άρα ε: $-3x + 4y - 9 = 0$ είναι η ζητούμενη ευθεία.

δ) Είναι (ζ): $6x - 8y + 3 = 0$, οπότε $d(M, \zeta) = \frac{|6\cdot 1 - 8\cdot 3 + 3|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{|15|}{\sqrt{100}} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$.

ΘΕΜΑ 4

Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία Α(1, –1), Β(2, 2) και Γ(μ–1, 3μ–2), $\mu \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το R, το σημείο Γ κινείται στην ευθεία

ε: $y = 3x + 1$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το R, τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερό. (Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Β και από τις οποίες το σημείο Α, απέχει απόσταση ίση με 1. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Καθώς το μ διατρέχει το R, είναι Γ(μ-1, 3μ-2), οπότε αν Γ(x, y) τότε:

$\begin{cases} x = \mu - 1 \\ y = 3\mu - 2 \\ \mu \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = x + 1 \\ y = 3(x+1) - 2 \\ \mu \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 1 \\ \mu = x + 1 \\ \mu \in R \end{cases}$, επομένως το σημείο Γ κινείται στην ευθεία ε: y = 3x +1.

β) Είναι $\lambda_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2-(-1)}{2-1} = 3 = \lambda_\varepsilon$, άρα η ΑΒ // ε.

Επιπλέον, για x = 1 και y = - 1 από την εξίσωση της ε παίρνουμε $-1 \neq 3 \cdot 1 + 1$.

Άρα το σημείο Α δεν ανήκει στην ευθεία ε, αφού οι συντεταγμένες του δεν ικανοποιούν την εξίσωσή της. Οπότε τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά. Επομένως καθώς το μ διατρέχει το R, τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

γ) Είναι $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (2-1, 2-(-1)) = (1, 3)$ και

$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A, y_\Gamma - y_A) = (\mu-1-1, 3\mu-2-(-1)) = (\mu-2, 3\mu-1)$, οπότε:

$(AB\Gamma) = \dfrac{1}{2}\,|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})| = \dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_{AB} & y_{AB} \\ x_{A\Gamma} & y_{A\Gamma} \end{vmatrix}\right| = \dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \mu-2 & 3\mu-1 \end{vmatrix}\right| =$

$\dfrac{1}{2}|1(3\mu-1) - 3(\mu-2)| = \dfrac{1}{2}|3\mu-1-3\mu+6| = \dfrac{1}{2}|5| = \dfrac{5}{2}$, σταθερό για κάθε $\mu \in R$.

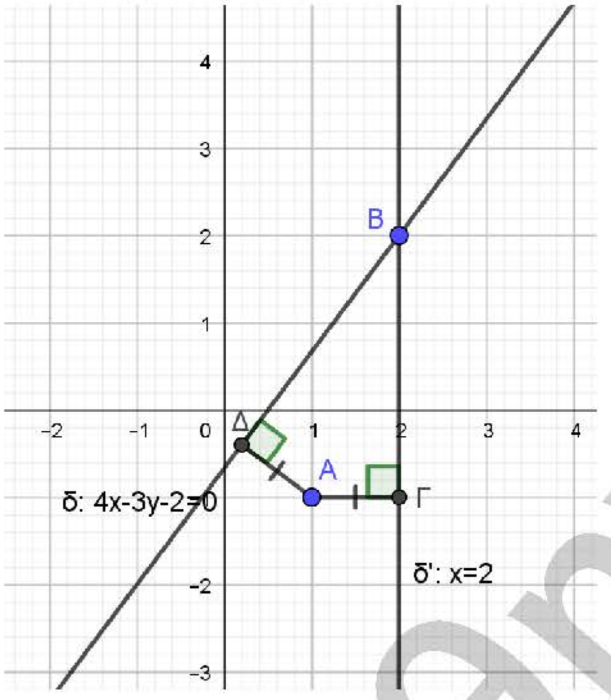
Εναλλακτικά: Λόγω των ερωτημάτων (α) και (β), το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή του Γ στην ΑΒ, έχει σταθερό μήκος, ίσο με την απόσταση των παραλλήλων ευθειών ε και ΑΒ. Επίσης το μήκος του ΑΒ είναι σταθερό, οπότε το εμβαδό του τριγώνου: $(AB\Gamma) = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot \upsilon$ είναι σταθερό.

δ) Από το σημείο Β(2, 2) διέρχονται οι ευθείες δ': x = 2 και δ: $y - y_B = \lambda(x - x_B)$ ή

δ: y - 2 = λ(x - 2) ή δ: λx - y + 2 - 2λ = 0.

Είναι: $d(A, \delta') = |2 - x_A| = |2 - 1| = 1$, οπότε η ευθεία δ': x = 2 αποτελεί μια λύση στο πρόβλημα. Θα αναζητήσουμε αν στην οικογένεια ευθειών δ, υπάρχει και άλλη ευθεία που να αποτελεί λύση στο πρόβλημα.

Είναι: $d(A, \delta) = \dfrac{|\lambda \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + 2 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|\lambda + 1 + 2 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \dfrac{|3 - \lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$.



Θέλουμε: $d(A, \delta) = 1 \Leftrightarrow \frac{|3-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 1 \Leftrightarrow |3-\lambda| = \sqrt{\lambda^2+1}$ και υψώνοντας στο τετράγωνο και τα δύο μέλη έχουμε: $|3-\lambda|^2 = \sqrt{\lambda^2+1}^2 \Leftrightarrow (3-\lambda)^2 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow 9 - 6\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 + 1$ $\Leftrightarrow 6\lambda = 8 \Leftrightarrow \lambda = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ η λύση της εξίσωσης, που επαληθεύει την αρχική, οπότε είναι δεκτή.

Για $\lambda = \frac{4}{3}$ η ευθεία δ: $\frac{4}{3}x - y + 2 - 2\frac{4}{3} = 0$ ή δ: $\frac{4}{3}x - y + 2 - \frac{8}{3} = 0$ ή δ: $\frac{4}{3}x - y - \frac{2}{3} = 0$ ή δ: $4x - 3y - 2 = 0$, αποτελεί μία ακόμη λύση στο πρόβλημα.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(-2, 1), Β(1, 5) και Γ(5, -1).

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)

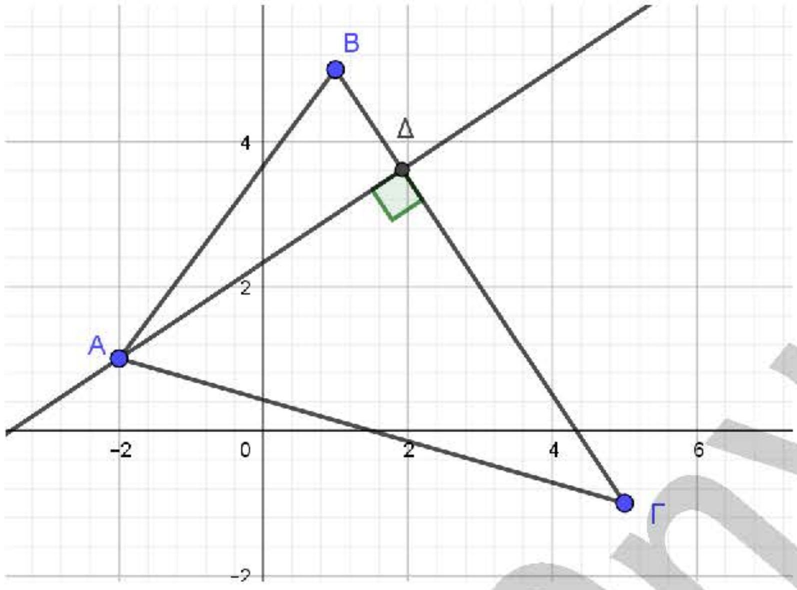
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή Α. Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας ΒΓ, από το οποίο, το Α απέχει την ελάχιστη απόσταση. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$(MAB) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ



α) Είναι: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ = (1-(-2), 5-1) = (3, 4) και

$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A, y_\Gamma - y_A)$ = (5-(-2), -1-1) = (7, -2), οπότε: (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}$ $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})|$ =

$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_{AB} & y_{AB} \\ x_{A\Gamma} & y_{A\Gamma} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|3\cdot(-2)-4\cdot 7| = \frac{1}{2}|-6-28| = \frac{1}{2}|-34| = \frac{1}{2}\cdot 34 = 17.$

β) Είναι ΒΓ: $y - y_B = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B}(x - x_B)$ ή ΒΓ: $y - 5 = \frac{-1-5}{5-1}(x - 1)$ ή ΒΓ: $y - 5 = \frac{-6}{4}(x - 1)$ ή

ΒΓ: $y - 5 = -\frac{3}{2}(x - 1)$ ή ΒΓ: $2y - 10 = -3x + 3$ ή ΒΓ: $3x + 2y - 13 = 0$.

γ) Έστω $υ_α$ το ύψος του τριγώνου από την κορυφή Α.

Είναι $\lambda_{B\Gamma} = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{2}$ και $υ_α \perp Β\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{υ_α}\cdot\lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{υ_α} = \frac{-1}{\lambda_{B\Gamma}} = \frac{-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$. Έτσι

$υ_α$: $y - y_A = \lambda_{υ_α}(x - x_A)$ ή $υ_α$: $y - 1 = \frac{2}{3}(x - (-2))$ ή $υ_α$: $3y - 3 = 2x + 4$ ή $υ_α$: $2x - 3y + 7 = 0$,

η ζητούμενη εξίσωση.

Το σημείο της ευθείας ΒΓ που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το Α, είναι το ίχνος Δ, του ύψους από το Α στην ευθεία ΒΓ.

Από το σύστημα των ΒΓ, $υ_α$ έχουμε: $\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 2x - 3y = -7 \end{cases}$, οπότε

$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13$ και

$D_x = \begin{vmatrix} 13 & 2 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = -39 + 14 = -25$, $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -21 - 26 = -47$,

άρα η λύση του συστήματος είναι:

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-25}{-13} = \frac{25}{13}$ και $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-47}{-13} = \frac{47}{13}$.

Επομένως, $Δ(\frac{25}{13}, \frac{47}{13})$ είναι το ζητούμενο σημείο της ευθείας ΒΓ.

δ) Έστω Μ(x, y) σημείο του επιπέδου ώστε: (ΜΑΒ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΓ), η οποία λόγω του ερωτήματος (α) γράφεται: (ΜΑΒ) = $\frac{17}{2}$ (1).

Είναι: $\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A)$ = (x -(-2), y -1) = (x +2, y - 1), άρα:

$(MAB) = \frac{1}{2}\,|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_{AB} & y_{AB} \\ x_{AM} & y_{AM} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ x+2 & y-1 \end{vmatrix}\right| =$

$\frac{1}{2}\,|3\cdot(y-1) - 4\cdot(x+2)| = \frac{1}{2}|\,3y - 3 - 4x - 8| = \frac{1}{2}|3y - 4x - 11|$, οπότε από την (1) $\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}|3y - 4x - 11| = \frac{17}{2} \Leftrightarrow |3y - 4x - 11| = 17 \Leftrightarrow 3y - 4x - 11 = -17$ ή $3y - 4x - 11 = 17 \Leftrightarrow$

$4x - 3y - 6 = 0$ ή $4x - 3y + 28 = 0$.

Άρα το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία $ε_1$: $4x - 3y - 6 = 0$ ή $ε_2$: $4x - 3y + 28 = 0$.

ΘΕΜΑ 4

Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο Λ(2,6) και η θέση ενός πλοίου με το σημείο Π(λ-1, 2+λ), $\lambda \in R$.

α)

i. Αν το πλοίο κινείται ευθύγραμμα, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του.

(Μονάδες 07)

ii. Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι. (Μονάδες 05)

β) Αν τελικά το πλοίο δεν περάσει από το λιμάνι, να βρείτε:

i. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι;

(Μονάδες 06)

ii. Το σημείο του καρτεσιανού επιπέδου που βρίσκεται το πλοίο, όταν απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι. (Μονάδες 07)

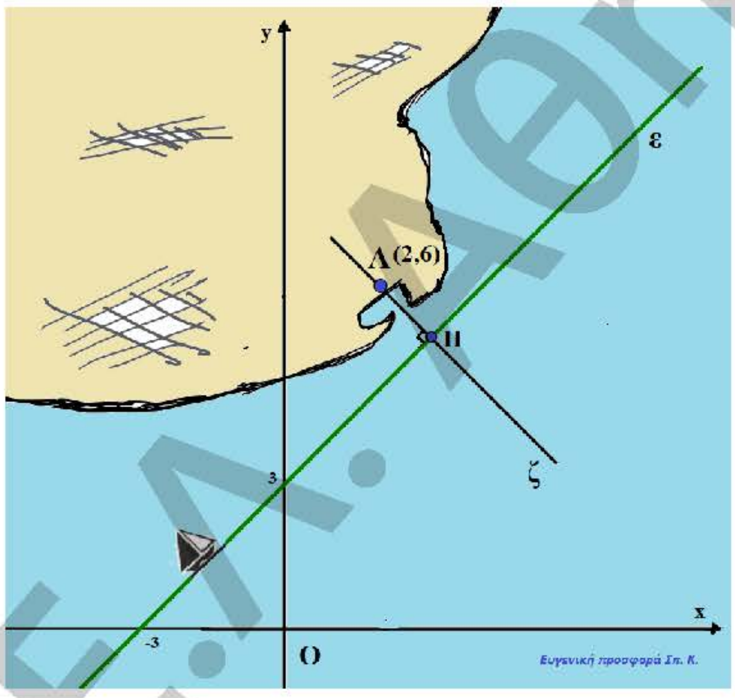
ΛΥΣΗ

α)

i. Για το σημείο Π(λ-1, 2+λ) έχουμε: $\begin{cases} x_\Pi = \lambda - 1 \\ \text{και} \\ y_\Pi = 2 + \lambda \end{cases}$. Απαλείφοντας το λ από τις 2 εξισώσεις έχουμε ότι $y_\Pi = x_\Pi + 3$. Επομένως η εξίσωση της τροχιάς του πλοίου είναι η ευθεία ε με εξίσωση την x-y+3=0.

ii. Το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι αν οι συντεταγμένες του λιμανιού Λ(2,6) επαληθεύουν την εξίσωση της τροχιάς του, δηλαδή την εξίσωση x-y+3=0.
Για y=6 και x =2 έχουμε 2-6+3 = -1 ≠ 0. Άρα το πλοίο δεν θα περάσει από το λιμάνι.

β)



i. Η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι είναι το μήκος του κάθετου τμήματος ΛΠ, με Π το σημείο τομής της ευθείας ε με την ευθεία ζ που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το Λ. Υπολογίζεται με την απόσταση του σημείου Λ από την ε. Δηλαδή

$$d(\Lambda,\varepsilon)=\frac{|2-6+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ii. Η ευθεία ζ είναι κάθετη ευθεία στην ε, άρα $\lambda_\zeta \cdot \lambda_\varepsilon = -1$. Επειδή $\lambda_\varepsilon = 1$, έχουμε ότι $\lambda_\zeta = -1$ και η εξίσωσή της είναι: $y - y_\Lambda = -(x - x_\Lambda)$ ή y-6 = -x+2 ⇔ x+y=8. Η θέση του πλοίου είναι το κοινό σημείο των ευθειών ε και ζ, που προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος.

$$(\Sigma)\begin{cases} x - y = -3 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 5 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{11}{2} \end{cases}$$

Άρα όταν το πλοίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι βρίσκεται στο σημείο $\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

ΘΕΜΑ 2

Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Α(-3, -1) και σχηματίζει με τον άξονα x’x γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες x’x και y’y, είναι: Ε = 8. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον η ε σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\frac{3\pi}{4}$, θα είναι λ = εφ$\frac{3\pi}{4}$ = - 1, οπότε

ε: $y - y_A = \lambda(x - x_A)$ ή ε: y + 1 = -1 (x + 3) ή ε: y = - x - 3 - 1 ή ε: y = - x - 4.

β) Από την εξίσωση της ευθείας ε για x = 0, το y = - 4. Επίσης για y = 0, το x = - 4 .

Άρα η ε τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Κ(- 4, 0) και τον y'y στο Λ(0, - 4).

Επομένως (ΟΚΛ) = $\frac{1}{2}$ (ΟΚ)·(ΟΛ) = $\frac{1}{2}$ $|x_K| \cdot |y_\Lambda|$ = $\frac{1}{2}$ |-4|·|-4| = $\frac{1}{2}$ ·4·4 = = $\frac{1}{2}$ ·16 = 8.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x+3y=5$ και $\varepsilon_2: 4x+6y=8$.

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1,1)$ είναι σημείο της ευθείας ε_1.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε_2.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, με $\lambda_1 = -\frac{2}{3}$ και $\lambda_2 = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$.

Άρα οι ευθείες είναι παράλληλες.

β) Οι συντεταγμένες του σημείου $A(1,1)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε_1, αφού $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$. Άρα το σημείο A ανήκει στην ευθεία ε_1.

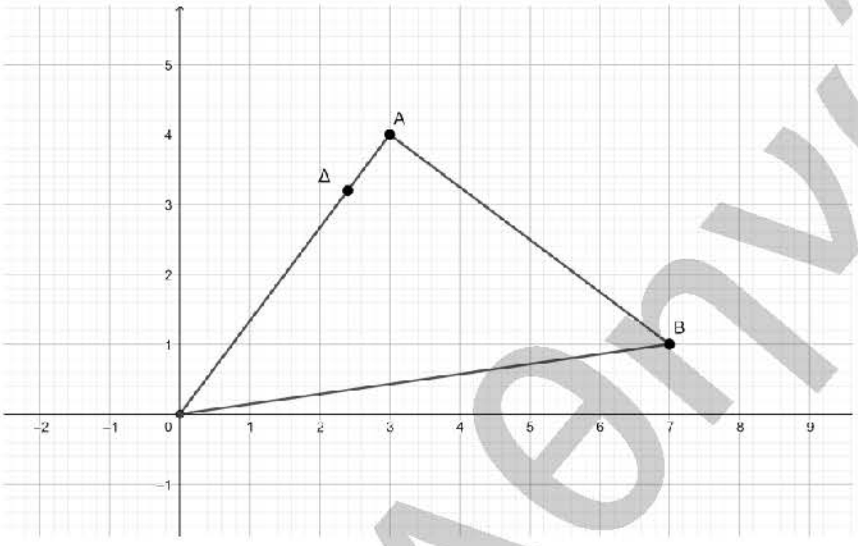
γ) Είναι:

$$d(A, \varepsilon_2) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 - 8|}{\sqrt{4^2+6^2}} = \frac{2}{\sqrt{52}} = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 13}} = \frac{2 \cdot \sqrt{13}}{2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13},$$

με $\varepsilon_2: 4x + 6y - 8 = 0$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τρίγωνο AOB με $\mathrm{A}(3,4)$, $\mathrm{B}(7,1)$, O η αρχή των αξόνων και το σημείο $\Delta\left(\frac{12}{5},\frac{16}{5}\right)$ της πλευράς AO.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ και $\mathrm{A}\dot{\Delta}$.

(Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=-\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

(Μονάδες 9)

γ) Δίνεται ότι $(\mathrm{OAB})=\frac{25}{2}$ τετραγωνικές μονάδες. Να δείξετε ότι $(\mathrm{A\Delta B})=\frac{1}{5}(\mathrm{OAB})$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι σύμφωνα με το σχήμα $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,4)$.

Ακόμα $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\left(x_{\Delta}-x_{\mathrm{A}},\, y_{\Delta}-y_{\mathrm{A}}\right)=\left(\frac{12}{5}-3, \frac{16}{5}-4\right)=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

β) Έχουμε $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)=-\frac{1}{5}(3,4)=-\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

γ) Είναι $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}},\, y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}\right)=(4,-3)$.

Έχουμε $(\mathrm{A\Delta B})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\right| \overset{\beta)}{=} \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 4 & -3 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|\frac{9}{5}+\frac{16}{5}\right| = \frac{5}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

Έχει δοθεί $(\mathrm{OAB})=\frac{25}{2}$ τετραγωνικές μονάδες, επομένως $(\mathrm{A\Delta B})=\frac{5}{2}=\frac{1}{5}\cdot\frac{25}{2}=\frac{1}{5}(\mathrm{OAB})$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(3,0)$ και $\Gamma(1,1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 9)

β)

i. Να εξετάσετε αν τα σημεία A, B και Γ ορίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 8)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες των διανυσμάτων είναι:

$$\overrightarrow{AB} = (3-0, 0-2) = (3,-2) \text{ και } \overrightarrow{A\Gamma} = (1-0, 1-2) = (1,-1).$$

β)

i. Η ορίζουσα των διανυσμάτων είναι:

$$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1 \neq 0.$$

Για να σχηματίζεται τρίγωνο πρέπει τα διανύσματα να μην είναι παράλληλα, διαφορετικά τα τρία σημεία θα είναι συνευθειακά.

Αφού λοιπόν $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) \neq 0$ τότε τα σημεία A, B και Γ ορίζουν τρίγωνο.

ii. Αφού είναι $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = -1$, το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\right| = \frac{1}{2}|-1| = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4

Δύο οικισμοί Α και Β βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία $A(-1,-2)$ και $B(3,1)$. Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση $\delta: x+y-1=0$.

α) Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου δ:

i. Ο οικισμός Α έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο.

(Μονάδες 8)

ii. Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς.

(Μονάδες 7)

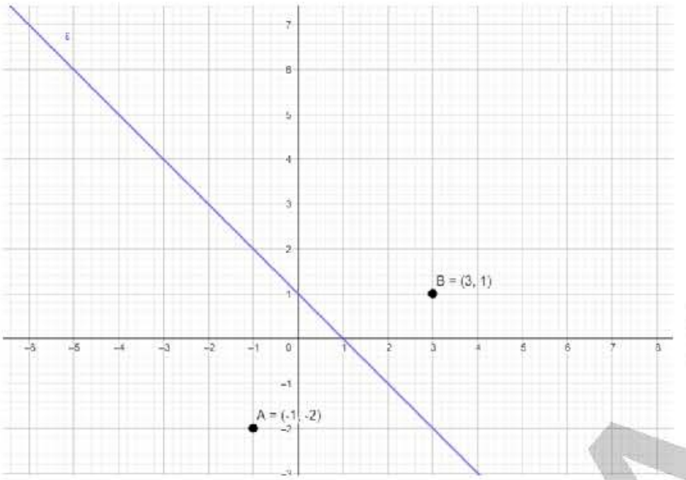
β) Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία A, B και Γ είναι ίσο με 8.

(Μονάδες 10)

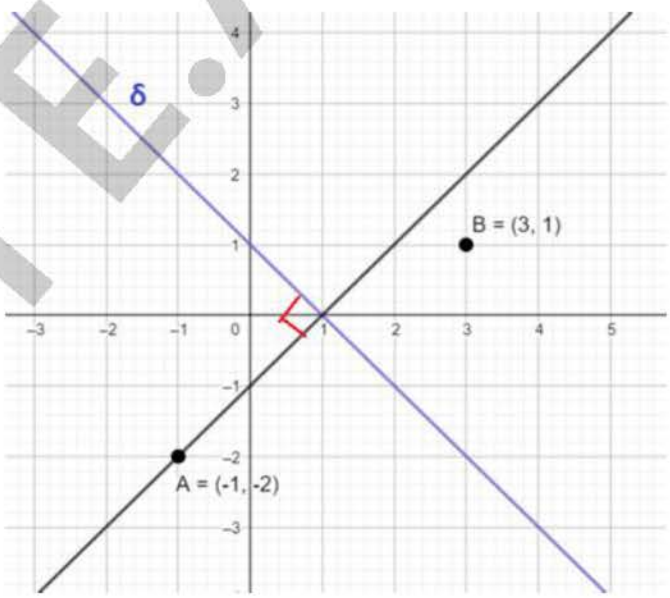
ΛΥΣΗ

α)

i. Για να βρούμε σε ποια θέση του δρόμου δ ο οικισμός Α έχει τη μικρότερη απόσταση, τοποθετούμε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την ευθεία δ και τα σημεία Α και Β. Η ευθεία δ τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία (1,0) και (0,1) αντίστοιχα.



Γνωρίζουμε πως ο πιο σύντομος δρόμος που μας οδηγεί στο προορισμό μας είναι ο κάθετος δρόμος στο δρόμο που βρισκόμαστε. Έτσι, η κάθετη ευθεία στην ευθεία δ που διέρχεται από το σημείο Α παριστάνει τον δρόμο που περνά από τον οικισμό και συναντιέται με τον δρόμο δ. Άρα, το σημείο που θα βρίσκεται η θέση που αναζητούμε είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών.



Από το σχήμα προκύπτει πως είναι το $(1,0)$.

Για να το βρούμε αλγεβρικά αρκεί να προσδιορίσουμε την κάθετη ευθεία ε στην ευθεία δ που διέρχεται από το σημείο Α.

$$\delta \perp \varepsilon \text{ αν και μόνο αν } \lambda_\delta \cdot \lambda_\varepsilon = -1. \text{ Το } \lambda_\delta = -1, \text{ άρα } \lambda_\varepsilon = 1.$$

Τότε ε: $y - (-2) = 1 \cdot [x - (-1)] \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$.

Λύνοντας το σύστημα εξισώσεων των δύο ευθειών ε και δ βρίσκουμε το ζητούμενο σημείο.

$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ και $y = 0$.

ii. Για να βρούμε τη θέση του κέντρου υγείας της περιοχής που ισαπέχει από τους δύο οικισμούς ακολουθούμε το ίδιο σκεπτικό. Από τη γραφική παράσταση ψάχνουμε το σημείο της ευθεία δ που ισαπέχει από τα Α και Β, δηλαδή το σημείο Γ που βρίσκεται πάνω στην ευθεία δ και στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

Έστω σημείο $K(x, y)$ που ανήκει στην ευθεία δ, άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας δ. Προσδιορίζουμε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του AB, την ευθεία ζ.

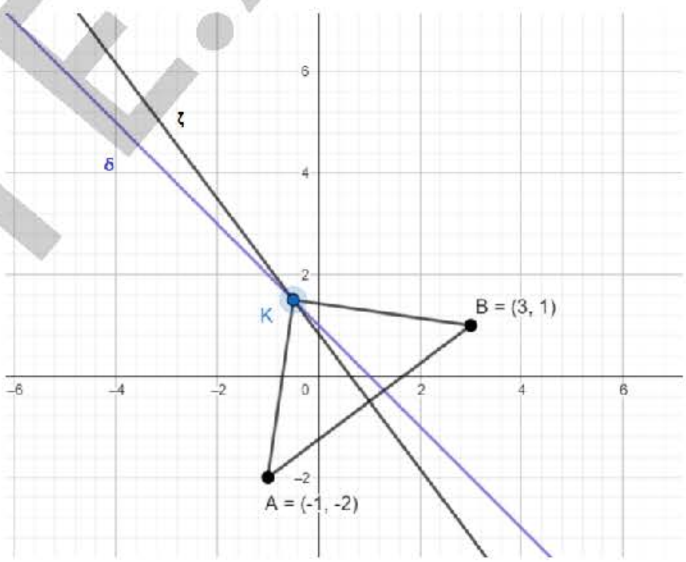
$\lambda_{AB} = \frac{1-(-2)}{3-(-1)} = \frac{3}{4}$ με $\lambda_{AB} \cdot \lambda_\zeta = -1$ τότε $\lambda_\zeta = -\frac{4}{3}$.

και το Μ μέσο του ΑΒ με συντεταγμένες, $x_M = \frac{-1+3}{2} = 1$, $y_M = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$.

ζ: $y + \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}(x-1) \Leftrightarrow 8x + 6y - 5 = 0$.

Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων δ και ζ

$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 8x + 6y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ και $y = \frac{3}{2}$. Το σημείο $K(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ είναι το ζητούμενο, δηλαδή η θέση του δρόμου δ που βρίσκεται το κέντρο υγείας.



β) Το σημείο Γ βρίσκεται πάνω στο δρόμο με εξίσωση δ, άρα είναι σημείο της ευθείας δ.

Έστω $\Gamma\,(x, y)$ και $\Gamma \epsilon\ \delta: x + y - 1 = 0$, δηλαδή την επαληθεύει, τότε $y = 1 - x$ και το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(x, 1 - x)$.

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

$\overrightarrow{AB} = (4,3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (x + 1, 3 - x)$.

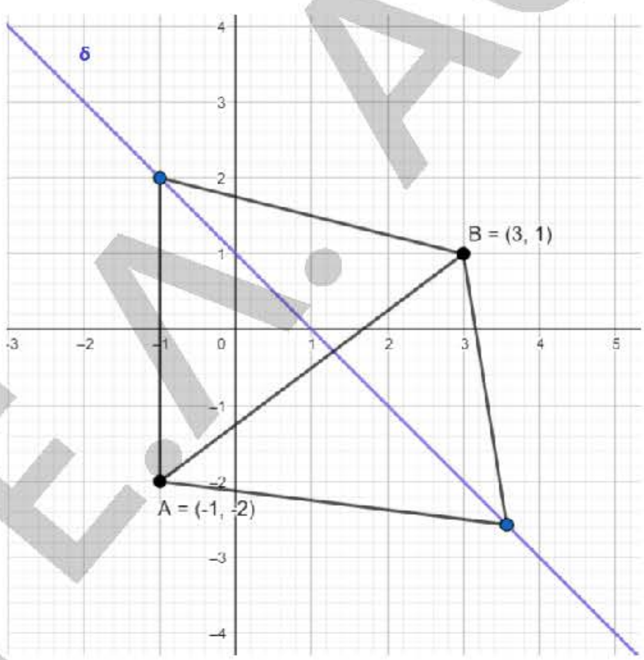
Το εμβαδόν του τριγώνου $(AB\Gamma)$ είναι 8.

Άρα, από τον τύπο εμβαδόν τριγώνου $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|$ υπολογίζουμε ότι το $(AB\Gamma) =$

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ x+1 & 3-x \end{vmatrix}\right| = 8 \Leftrightarrow |9 - 7x| = 16.$$

Από την εξίσωση παίρνουμε $x = -1$ ή $x = \frac{25}{7}$. Βρίσκουμε τα αντίστοιχα $y = 2$ ή $y = -\frac{18}{7}$.

Επομένως, έχουμε δύο θέσεις του δρόμου που βρίσκεται το αυτοκίνητο και σχηματίζει εμβαδόν 8, τη θέση με συντεταγμένες $(-1,2)$ και $\left(\frac{25}{7}, -\frac{18}{7}\right)$.



ΘΕΜΑ 4

Υποθέτουμε, ότι σε ένα επίπεδο που έχουμε εφοδιάσει με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία Α και Β. Κάθε χρονική στιγμή t με $t \geq 0$ η θέση του πρώτου σημείου είναι $A(t-1, 2t-1)$ και του δευτέρου $B(3t-1, -4t-1)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο σημεία.

(Μονάδες 8)

β) Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο σημεία ταυτίζονται;

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σημείων την χρονική στιγμή $t=2$.

(Μονάδες 5)

δ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t κατά την οποία η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε: $4x+3y+7=0$ ισούται με 6. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε Α(t-1, 2t-1), t≥ 0. Αν Α(x, y) τότε:

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t - 1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x + 1 \\ y = 2(x+1) - 1 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x + 1 \\ y = 2x + 1, \\ x \geq -1 \end{cases}$$

άρα το σημείο Α κινείται στην ημιευθεία ε_1: $y = 2x + 1$ με $x \geq -1$.

Επίσης έχουμε Β(3t-1, -4t-1), t≥ 0. Αν Β(x, y) τότε:

$$\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -4t - 1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x+1}{3} \\ y = -4\frac{x+1}{3} - 1 \\ \frac{x+1}{3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x+1}{3} \\ 3y = -4x - 7 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x+1}{3} \\ 4x + 3y + 7 = 0, \\ x \geq -1 \end{cases}$$

άρα το σημείο Β κινείται στην ημιευθεία ε_2: $4x + 3y + 7 = 0$ με $x \geq -1$.

β) Αν υπάρχει χρονική στιγμή t≥ 0, κατά την οποία τα σημεία Α και Β ταυτίζονται θα είναι:

$$\begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = y_B \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 1 = 3t - 1 \\ 2t - 1 = -4t - 1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0,$$ άρα τη χρονική στιγμή $t = 0$, τα σημεία Α, Β ταυτίζονται.

γ) Για t=2 είναι Α(1, 3) και Β(5, -9) οπότε: (ΑΒ) = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ = $\sqrt{(5-1)^2 + (-9-3)^2}$ = $\sqrt{4^2 + (-12)^2}$ = $\sqrt{16 + 144}$ = $\sqrt{160}$ =$4\sqrt{10}$.

δ) Λόγω του ερωτήματος (α), η ευθεία ε είναι η ε_2, οπότε:

$$d(A, \varepsilon_2) = 6 \Leftrightarrow \frac{|4\cdot(t-1) + 3\cdot(2t-1) + 7|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 6 \Leftrightarrow \frac{|10t|}{5} = 6 \Leftrightarrow |10\,t| = 30 \Leftrightarrow |t| = 3 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t = 3 \\ t = -3 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3,$$ η ζητούμενη χρονική στιγμή.

ΘΕΜΑ 4

Στο χάρτη μίας πεδινής περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δύο κωμοπόλεις Α και Β έχουν συντεταγμένες Α(3,6) και Β(7,-2).

α) Ανάμεσα στις δύο κωμοπόλεις, θα κατασκευαστεί ευθεία σιδηροδρομική γραμμή, κάθε σημείο της οποίας θα ισαπέχει από αυτές. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή. (Μονάδες 12)

β) Πάνω στην σιδηροδρομική γραμμή θα κατασκευαστεί σταθμός Σ, ώστε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τα σημεία Α, Β και Σ να ισούται με 20 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ στο χάρτη. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον τα σημεία της ευθείας ε πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή ισαπέχουν από τα Α, Β, αυτή θα είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Αν Μ το μέσο του ΑΒ τότε:

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+7}{2} = 5$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 2$, άρα Μ(5, 2).

Επίσης $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-6}{7-3} = -2$,

οπότε: $\varepsilon \perp AB \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{\mathbf{-1}}{\lambda_{AB}} = \frac{\mathbf{-1}}{-2} = \frac{\mathbf{1}}{2}$,

άρα ε: $y - y_M = \lambda_{AB}(x - x_M)$ ή ε: $y - 2 = \frac{\mathbf{1}}{2}(x - 5)$ ή ε: $2y - 4 = x - 5$ ή ε: $x - 2y - 1 = 0$,

η ζητούμενη εξίσωση.

β) Θέλουμε (ΣΑΒ) = 20 τ.μ. (1)

Αν Σ(x, y), τότε το $\Sigma \in \varepsilon \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 1$ (2), οπότε Σ(2y +1, y).

Ακόμη $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (7-3, -2-6) = (4, -8)$ και

$\overrightarrow{A\Sigma} = (x_\Sigma - x_A, y_\Sigma - y_A) = (2y + 1 - 3, y - 6) = (2y - 2, y - 6)$, οπότε από την (1) είναι:

$\frac{\mathbf{1}}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Sigma})| = 20 \Leftrightarrow \left| \begin{vmatrix} x_{AB} & y_{AB} \\ x_{A\Sigma} & y_{A\Sigma} \end{vmatrix} \right| = 40 \Leftrightarrow \left| \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 2y - 2 & y - 6 \end{vmatrix} \right| = 40 \Leftrightarrow$

$|4(y - 6) - (-8)(2y - 2)| = 40 \Leftrightarrow |4y - 24 + 16y - 16| = 40 \Leftrightarrow |20y - 40| = 40 \Leftrightarrow$

$20|y - 2| = 40 \Leftrightarrow |y - 2| = 2 \Leftrightarrow y - 2 = -2$ ή $y - 2 = 2 \Leftrightarrow y = 0$ ή $y = 4$.

Για y = 0 από την (2) παίρνουμε: x = 1. Για y = 4 από την (2) παίρνουμε: x = 9.

Άρα Σ(1, 0) ή Σ(9, 4).

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες: ε_1: $y = \frac{2}{3}x + 1$ και ε_2: $x = \frac{3}{2}y + 9$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι ε_1: y = $\frac{2}{3}$x + 1 με $\lambda\varepsilon_1 = \frac{2}{3}$.

Επίσης: ε_2: x = $\frac{3}{2}$y + 9 ή ε_2: 2x = 3y + 18 ή ε_2: 2x - 3y – 18 = 0, με $\lambda\varepsilon_2 = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$.

Οπότε $\lambda\varepsilon_1 = \lambda\varepsilon_2$, άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

β) Από την εξίσωση της ε_1 για x = 3, βρίσκουμε το y = 3, οπότε συμπεραίνουμε ότι το σημείο Α(3 , 3) ∈ ε_1, επομένως:

$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(A, \varepsilon_2) = \frac{|2\cdot3-3\cdot3-18|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{|-21|}{\sqrt{13}} = \frac{21}{\sqrt{13}} = \frac{21\sqrt{13}}{13}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σημείο $A(1,2)$ και η ευθεία (ε): $y = x + 3$.

α) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε).

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην (ε).

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες (η), (ε).

(Μονάδες 10)

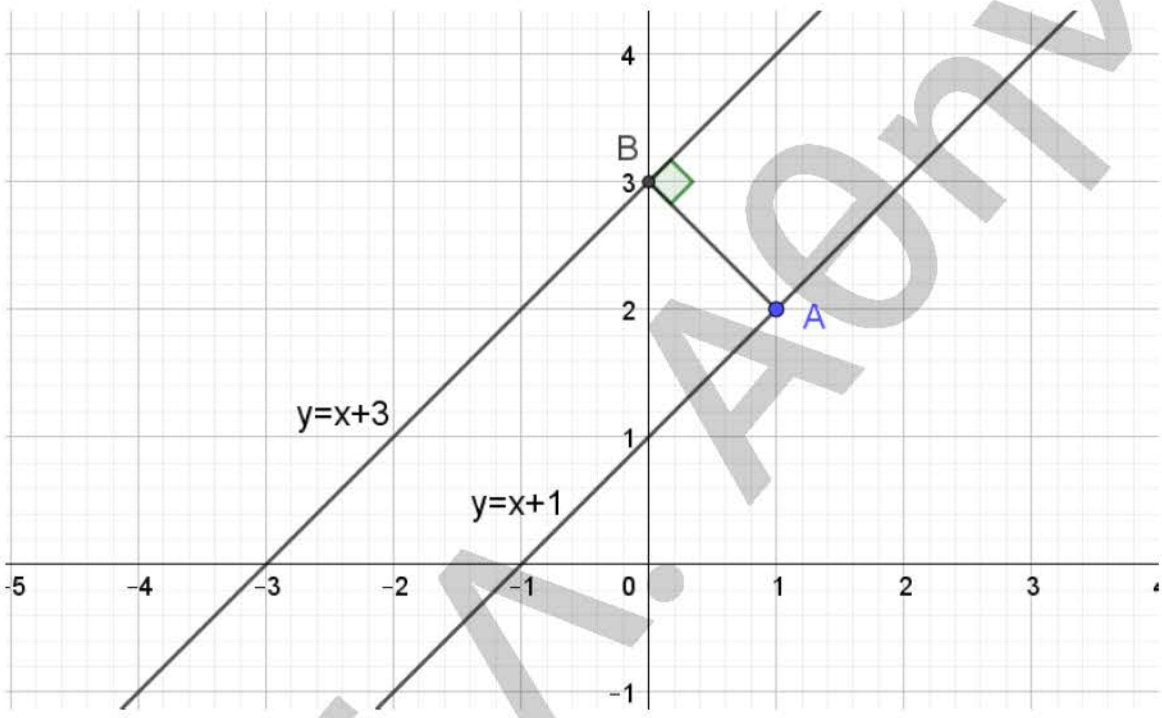
ΛΥΣΗ

α) Είναι $(\varepsilon): y=x+3 \Leftrightarrow x-y+3=0$, οπότε $d(\mathrm{A},\varepsilon)=\dfrac{|1-2+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

β) Είναι $(\eta)//(\varepsilon)$ οπότε $\lambda_\eta=\lambda_\varepsilon=1$ και αφού η (η) διέρχεται από το $\mathrm{A}(1,2)$ θα έχει εξίσωση

$y-2=1\cdot(x-1) \Leftrightarrow y=x+1$.

γ) Οι ευθείες (η) , (ε) φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ 3

Δίνονται τα σημεία $A(1,3), B(-2,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y + \alpha = 0$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β.

(Μονάδες 5)

β) Για ποιες τιμές του α, η απόσταση ΑΒ είναι ίση με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.

(Μονάδες 8)

γ) Για $\alpha = 4$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Κάνουμε αντικατάσταση τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β στο τύπο της απόστασης

$$(\mathrm{AB}) = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10}.$$

β) Για να βρούμε τη τιμή του α θα λύσουμε την εξίσωση που προέρχεται από τη ισότητα

$(\mathrm{AB}) = \mathrm{d}(\mathrm{A}, \varepsilon) \Leftrightarrow (\mathrm{AB}) = \frac{|\mathrm{A}x_0 + \mathrm{B}y_0 + \Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}$, δηλαδή $\sqrt{10} = \frac{|6+\alpha|}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |\alpha + 6| = 10$, τότε

$\alpha = 4$ ή $\alpha = -16$.

γ) Για $\alpha = 4$ η ευθεία ε γίνεται ε: $3x + y + 4 = 0$.

Η ευθεία τέμνει τον y΄y για $x = 0$. Άρα, το σημείο τομής της ε με τον άξονα y΄y είναι $(0, -4)$.

Άρα $\Gamma\ (0, -4)$.

Επίσης, βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-3, -1)$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = (-1, -7)$.

Από το τύπο του εμβαδού τριγώνου $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right|$ υπολογίζουμε ότι

$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ τετραγωνικές μονάδες.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(2,0)$, $B(3,4)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο A και έχουν κλίση λ.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε οτι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο A, έχει κλίση λ και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B, έχει εξίσωση (ε): $15x - 8y - 30 = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε οτι υπάρχει και άλλη ευθεία (ζ), εκτός από την (ε), η οποία διέρχεται από το σημείο A και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ).

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α)

i. Οι ευθείες που έχουν κλίση λ και διέρχονται από το σημείο $A(2,0)$ ορίζονται από την εξίσωση: (ε_λ): $y - 0 = \lambda(x-2) \Leftrightarrow \lambda x - y - 2\lambda = 0$ (1)

ii. Για την απόσταση του σημείου B απο τις ευθείες (ε_λ), είναι:

$$d(B, \varepsilon_\lambda) = \frac{|3\lambda - 4 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{|\lambda - 4|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$$

Επομένως, έχουμε:

$$d(B, \varepsilon_\lambda) = 1 \Leftrightarrow \frac{|\lambda - 4|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 1 \Leftrightarrow |\lambda - 4| = \sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow$$

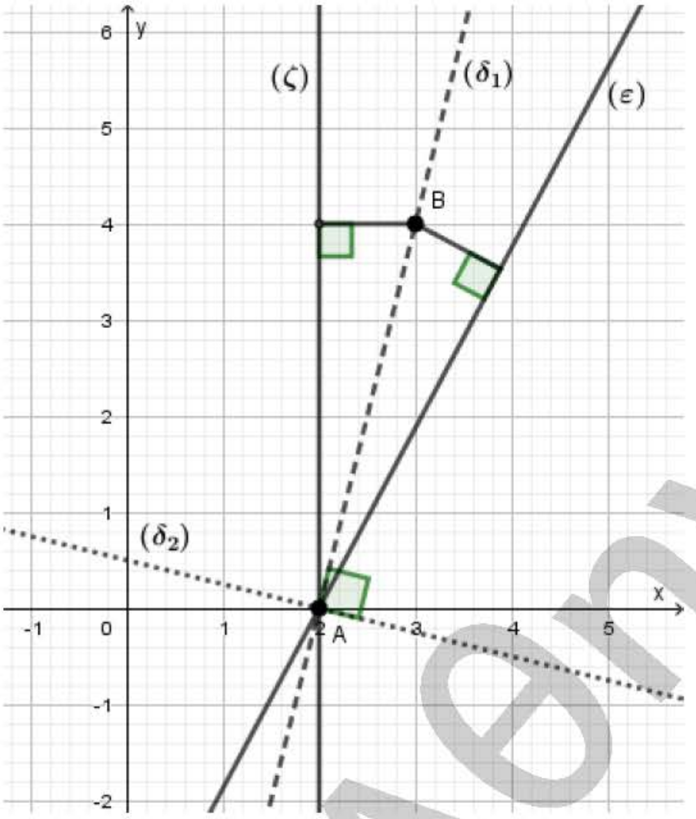
$$(\lambda - 4)^2 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{15}{8}$$

Απο την (1) έχουμε: $\frac{15}{8}x - y - \frac{30}{8} = 0 \Leftrightarrow 15x - 8y - 30 = 0.$

β) Από το σημείο $A(2,0)$ διέρχεται επίσης η κατακόρυφη ευθεία (ζ), για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης, με εξίσωση $x = 2$. Έτσι, έχουμε:

$$d(B, \zeta) = \frac{|1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 - 2|}{\sqrt{1}} = 1$$

γ) Οι ευθείες (ε) και (ζ) τέμνονται, διότι έχουν κοινό σημείο το A, αλλά δεν ταυτίζονται αφού $\lambda_\varepsilon = \frac{15}{8}$ και η $(\zeta)//y'y$. Το σημείο B απέχει ίση απόσταση από τις ευθείες (ε) και (ζ), επομένως ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας των δύο ευθειών. Επιπλέον ισχύει οτι $\lambda_{AB} = \frac{4-0}{3-2} = 4.$



Επομένως, η μία εκ των δύο διχοτόμων (δ_1), είναι η ευθεία AB με εξίσωση

$$y - 0 = 4(x - 2) \Leftrightarrow y = 4x - 8.$$

Η άλλη διχοτόμος (δ_2), είναι κάθετη στην AB, επομένως $\lambda_{\delta_2} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\delta_2} = -\frac{1}{4}$. Επιπλέον, διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$, οπότε έχει εξίσωση την

$$y - 0 = -\frac{1}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία Α(**1**,**1**) και Β(2,3)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι η (ε): $y = 2x - 1$.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε αν το σημείο $\Gamma\left(2^{100}, 5\right)$ ανήκει ή όχι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία (ε) και την αρχή των αξόνων Ο(0,0).

(Μονάδες 8)

γ) Να αιτιολογήσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία που διέρχεται από τα Α,Β θα έχει εξίσωση: $y=\lambda x+b$ αφού $x_A \neq x_B$.

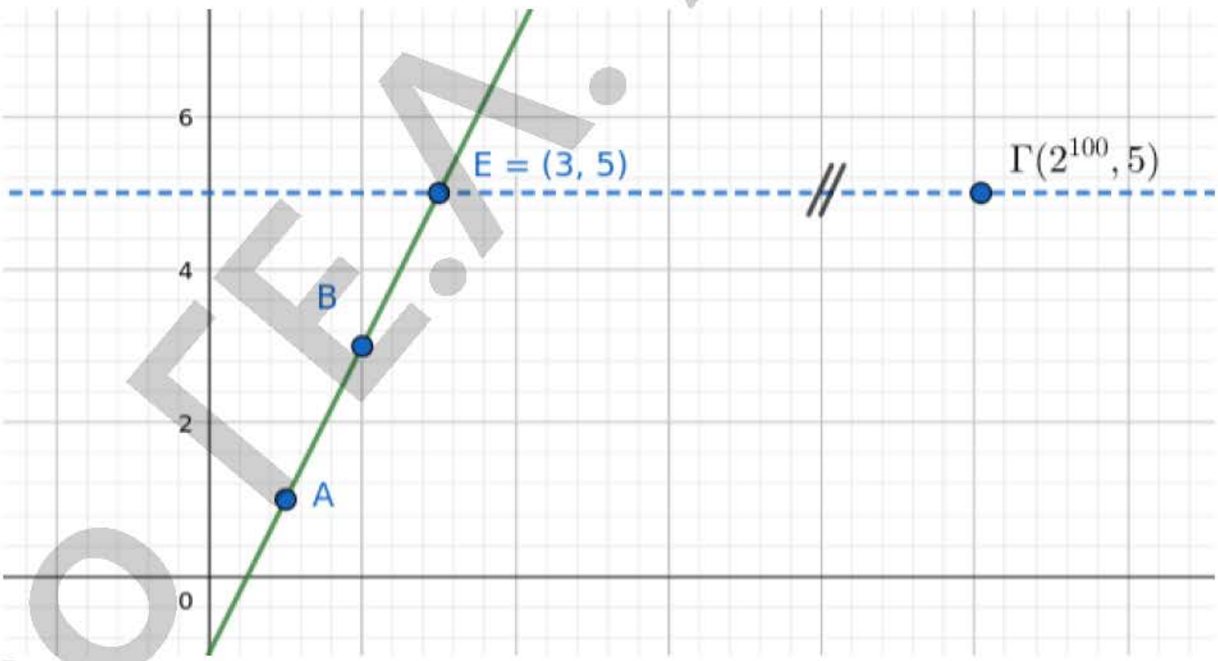
Οπότε $\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-1}{2-1}=\frac{2}{1}=2$.

Άρα η ευθεία θα είναι της μορφής $y=2x+b$. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του σημείου Α θα έχουμε: $1=2\cdot 1+b \Leftrightarrow b=-1$. Επομένως, η εξίσωση της ευθείας θα είναι η $(\varepsilon): y=2x-1$.

β)

α΄τρόπος

Το σημείο $E(3,5)$ ανήκει στην (ε), διότι $2\cdot 3-1=5$. Το σημείο **Γ** βρίσκεται στην ίδια ευθεία παράλληλη στον άξονα x'x την y=5 με το Ε και «δεξιά» από αυτήν, ενώ το σημείο Ο(0,0) βρίσκεται στο άλλο ημιεπίπεδο, «αριστερά» από αυτήν, όπως βλέπουμε και στο επόμενο σχήμα.



β΄ τρόπος

Για $y=0$ το σημείο $\Delta\left(\frac{1}{2},0\right)$ ανήκει στην ευθεία (ε) και το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta O}=\left(\frac{-1}{2},0\right)$ είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$.

Επίσης το σημείο $E(3,5)$ ανήκει στην (ε), διότι $2\cdot 3-1=5$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{E\Gamma}=(2^{100}-3,5-5)=(2^{100}-3,0)$ είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$. Τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta O},\overrightarrow{E\Gamma}$ έχουν αρχή στην ευθεία (ε) και είναι αντίρροπα, οπότε ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της (ε). Συνεπώς και τα σημεία Ο , Γ δεν ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο από αυτά που ορίζει η (ε).

γ) Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΑΒΓ έχουν την ίδια βάση ΑΒ, με φορέα την ευθεία (ε).

Η απόσταση του Ο και του Γ αντίστοιχα από την (ε) είναι:

$$d(O,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 0-0-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$d(\Gamma,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 2^{100}-5-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2^{101}-6}{\sqrt{5}}>\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Συνεπώς $d(O,\varepsilon)<d(\Gamma,\varepsilon)$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το ΑΟΒ.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$, $B(\frac{\alpha}{2},\beta)$ και $M(\frac{\alpha}{2},0)$, όπου α,β σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

α) Να μεταφέρετε τα παραπάνω σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές και το σημείο M είναι το μέσο της βάσης του OA.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών OB και AB είναι $OB: 2\beta x-\alpha y=0$ και $AB: 2\beta x+\alpha y-2\alpha\beta=0$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 8)

γ) Αν d_1 είναι η απόσταση του σημείου M από την ευθεία OB και d_2 η απόσταση του σημείου M από την ευθεία AB, να αποδείξετε ότι $d_1=d_2$.

(Μονάδες 8)

δ) Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί;

(Μονάδες 3)

ΛΥΣΗ

α) Αφού $\beta \neq 0$ τα σημεία O, A, B δεν είναι συνευθειακά.

Τα τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές με βάση την OA αφού

$$(\mathrm{OB}) = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-0\right)^2 + (\beta-0)^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2} \text{ και } (\mathrm{AB}) = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-\alpha\right)^2 + (\beta-0)^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2}.$$

Εναλλακτικά, το σημείο $\mathrm{B}(\frac{\alpha}{2},\beta)$ ανήκει στη μεσοκάθετο του OA οπότε ισαπέχει από τα σημεία O,A.

Τέλος το μέσο του OA είναι το σημείο $\mathrm{M}(\frac{\alpha}{2},0)$, αφού οι συντεταγμένες του M είναι ίσες με το ημιάθροισμα των συντεταγμένων των O,A.

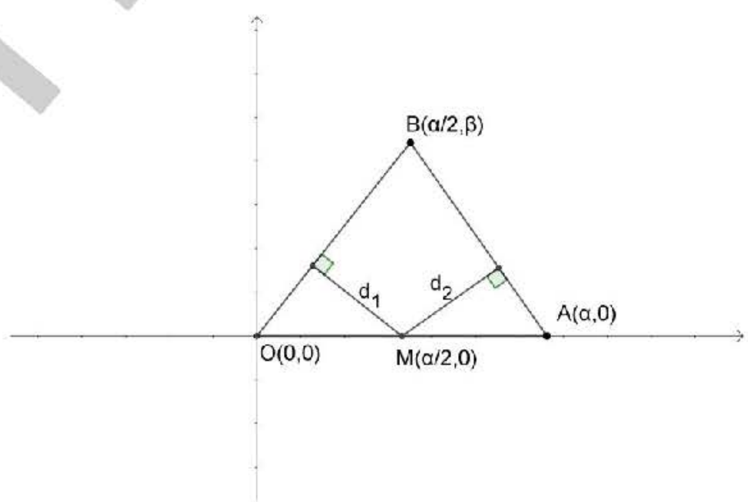
β) Είναι $\beta \neq 0$ οπότε $\mathrm{OB}: y-0 = \dfrac{\beta-0}{\frac{\alpha}{2}-0}\cdot(x-0) \Leftrightarrow y = \dfrac{2\beta}{\alpha}\cdot x \Leftrightarrow 2\beta x - \alpha y = 0$ και

$$\mathrm{AB}: y-0 = \frac{\beta-0}{\frac{\alpha}{2}-\alpha}\cdot(x-\alpha) \Leftrightarrow y = \frac{\beta}{-\frac{\alpha}{2}}\cdot(x-\alpha) \Leftrightarrow y = -\frac{2\beta}{\alpha}\cdot(x-\alpha) \Leftrightarrow 2\beta x + \alpha y - 2\alpha\beta = 0.$$

γ) Είναι $d_1 = \dfrac{\left|2\beta\frac{\alpha}{2} - \alpha\cdot 0\right|}{\sqrt{(2\beta)^2+\alpha^2}} \overset{\alpha,\beta>0}{=} \dfrac{\alpha\beta}{\sqrt{(2\beta)^2+\alpha^2}}$ και

$$d_2 = \frac{\left|2\beta\frac{\alpha}{2} + \alpha\cdot 0 - 2\alpha\beta\right|}{\sqrt{(2\beta)^2+\alpha^2}} = \frac{|-\alpha\beta|}{\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}} \overset{\alpha,\beta>0}{=} \frac{\alpha\beta}{\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}}$$ οπότε πράγματι $d_1 = d_2$.

δ) Η πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που αποδείχθηκε είναι η εξής: Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, το μέσο της βάσης ισαπέχει από τις ίσες πλευρές.



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(1,3), \mathrm{B}(-2,2)$ και η ευθεία ε: $3\mathrm{x} + \mathrm{y} + \alpha = 0$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποια τιμή του α, η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β είναι ίση με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.

(Μονάδες 8)

β) Για $\alpha = 4$

i. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $\mathrm{y'y}$.

(Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε

$(\mathrm{AB}) = \mathrm{d}(\mathrm{A}, \varepsilon) \Leftrightarrow \sqrt{(-2-1)^2 + (2-3)^2} = \frac{|3\cdot 1 + 1\cdot 3 + \alpha|}{\sqrt{3^2+1^2}} \Leftrightarrow \sqrt{10} = \frac{|6+\alpha|}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |\alpha + 6| = 10 \Leftrightarrow$

$\alpha + 6 = 10$ ή $\alpha + 6 = -10$ τότε $\alpha = 4$ ή $\alpha = -16$.

β) Για $\alpha = 4$ έχουμε $\varepsilon\colon 3x + y + 4 = 0$.

i. Η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ, άρα για $x = 0$ το $y = -4$.

Επομένως, η συντεταγμένες του Γ είναι $(0, -4)$.

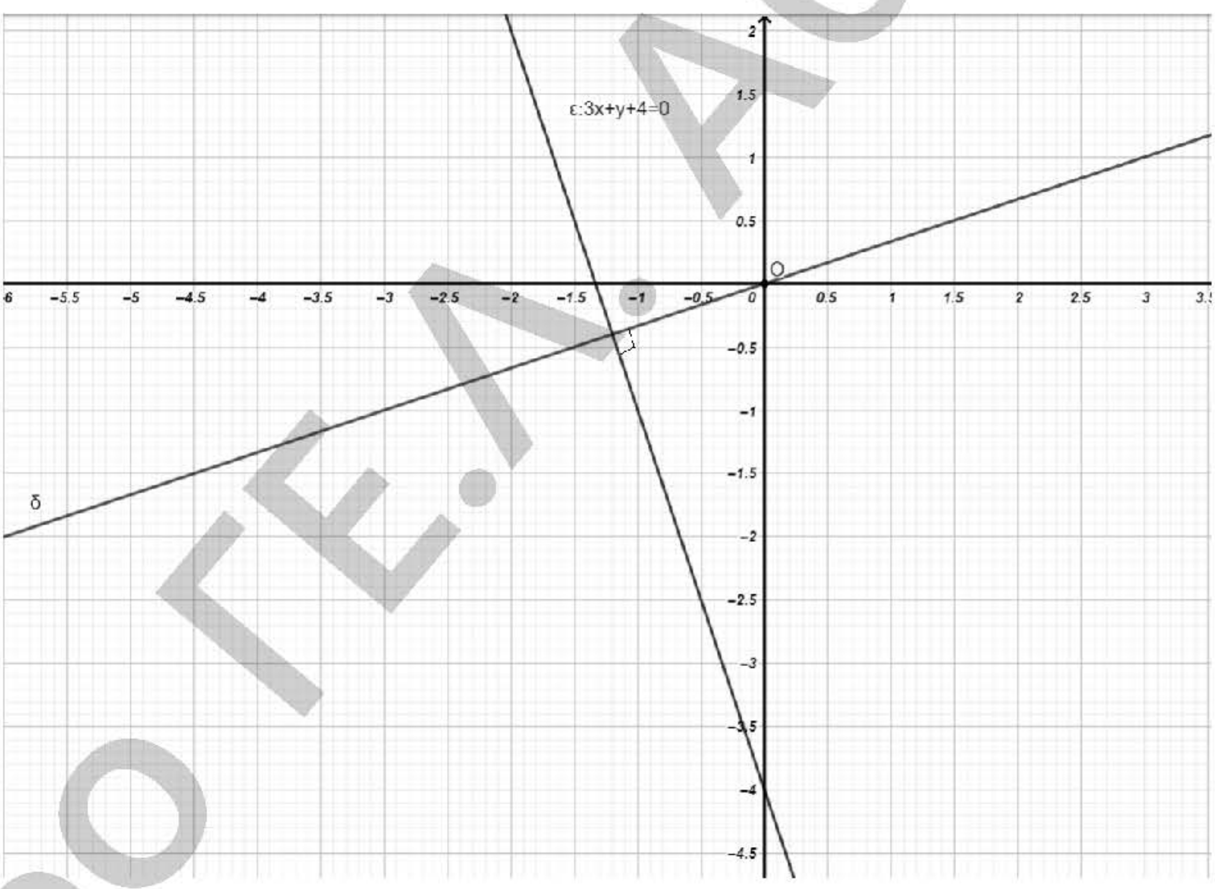
Βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-3, -1)$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = (-1, -7)$.

Από το τύπο του εμβαδού τριγώνου $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right|$ υπολογίζουμε ότι

$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot 20 = 10$ τετραγωνικές μονάδες.

ii.



Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα αξόνων την ευθεία ε και το σημείο που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων, είναι το σημείο τομής της ευθείας ε με την ευθεία δ που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το Ο.

Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο σημείο αρκεί να βρούμε την εξίσωση της ευθείας δ και να λύσουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων.

Επειδή, $\lambda_\varepsilon = -3$ και $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = \frac{1}{3}$. Η ευθεία δ διέρχεται από το (0,0) τότε $\delta\colon y = \frac{1}{3}x$.

Από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases}.$$

Βρίσκουμε το κοινό σημείο $\left(-\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right)$, που είναι το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τα σημεία $A(-2,-3)$ και $B(7,9)$. Έστω S το σύνολο των σημείων Μ που είναι κορυφές των τριγώνων ΑΜΒ ώστε $(AMB)=12$ τ.μ.

α) Να αποδείξτε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών $(\varepsilon_1): 4x-3y-9=0$ και $(\varepsilon_2): 4x-3y+7=0$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι η μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2).

(Μονάδες 9)

γ) Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην (ε_1) και ένα σημείο M_2 στην (ε_2) ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο $\mathrm{AM}_1\mathrm{BM}_2$. Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα ΑΧΒΥ υπάρχουν, αν το Χ πρέπει να είναι σημείο της (ε_1) και το Υ σημείο της (ε_2), που έχουν το ίδιο εμβαδό με το $\mathrm{AM}_1\mathrm{BM}_2$; Εξηγήστε.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να ισχύει $\frac{1}{2}\left|det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)\right| = 12$, άρα $\left|\begin{vmatrix} x+2 & y+3 \\ 9 & 12 \end{vmatrix}\right| = 24$. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα παίρνουμε $|12(x+2) - 9(y+3)| = 24 \Leftrightarrow 3|4(x+2) - 3(y+3)| = 24$, άρα $|4x + 8 - 3y - 9| = 8 \Leftrightarrow |4x - 3y - 1| = 8$. Τελικά έχουμε:
$4x - 3y - 1 = 8$ ή $4x - 3y - 1 = -8$, δηλαδή $4x - 3y = 9$ ή $4x - 3y = -7$ οι οποίες είναι εξισώσεις των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

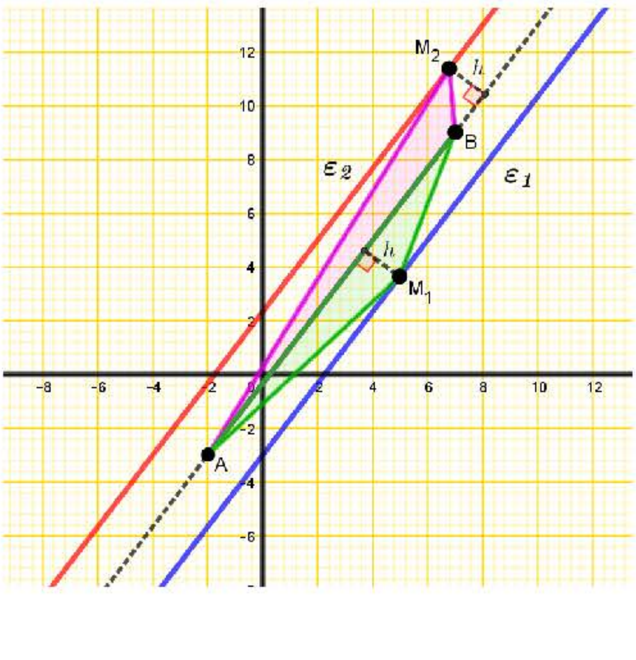
Οι ευθείες είναι παράλληλες αφού έχουν κοινό συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{4}{3}$.

β) Παρατηρούμε ότι $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9-(-3)}{7-(-2)} = \frac{4}{3}$, άρα η ευθεία ΑΒ είναι παράλληλη στις (ε_1) και (ε_2). Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι ένα οποιοδήποτε σημείο της ΑΒ ισαπέχει από τις (ε_1) και (ε_2). Για ευκολία βρίσκουμε το μέσο του ΑΒ που είναι το σημείο $K\left(\frac{-2+7}{2}, \frac{-3+9}{2}\right)$ δηλαδή το $K\left(\frac{5}{2}, 3\right)$.

Τώρα $d(K,\varepsilon_1) = \frac{\left|4\cdot\frac{5}{2} - 3\cdot 3 - 9\right|}{\sqrt{4^3+(-3)^2}} = \frac{8}{5}$ και $d(K,\varepsilon_2) = \frac{\left|4\cdot\frac{5}{2} - 3\cdot 3 + 7\right|}{\sqrt{4^3+(-3)^2}} = \frac{8}{5}$

γ) Με βάση το παρακάτω σχήμα, διαπιστώνουμε ότι οποιοδήποτε σημείο M_1 της (ε_1) σχηματίζει με το σταθερό ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, τρίγωνο σταθερού εμβαδού, αφού το ύψος h του τριγώνου ΑΜΒ που αντιστοιχεί στην ΑΒ είναι σταθερό και ίσο με το μισό της απόστασης των (ε_1) και (ε_2), οπότε $(AM_1B) = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot\frac{8}{5} = 12$, αφού

$AB = \sqrt{(7+2)^2 + (9+3)^2} = \sqrt{225} = 15$. Ανάλογα, $(AM_2B) = 12$, έτσι $(AM_1BM_2) = 24$. Ώστε $(AXBY) = 24$ για οποιαδήποτε σημεία Χ,Υ των (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα, αρκεί να σχηματίζεται τετράπλευρο (να μην είναι για παράδειγμα τα σημεία M_1, B, M_2 συνευθειακά). Άρα υπάρχουν άπειρα τετράπλευρα ΑΧΒΥ με σταθερό εμβαδόν 24.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(2,5), Β(3,6) και Γ(-1,-2).

α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ.

(Μονάδες 07)

β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το Α.

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΑΒ με τον άξονα x΄x.

(Μονάδες 09)

ΛΥΣΗ

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ θα είναι:

$$\lambda_{ΒΓ} = \frac{y_Γ - y_Β}{x_Γ - x_Β} = \frac{-2-6}{-1-3} = \frac{-8}{-4} = 2$$

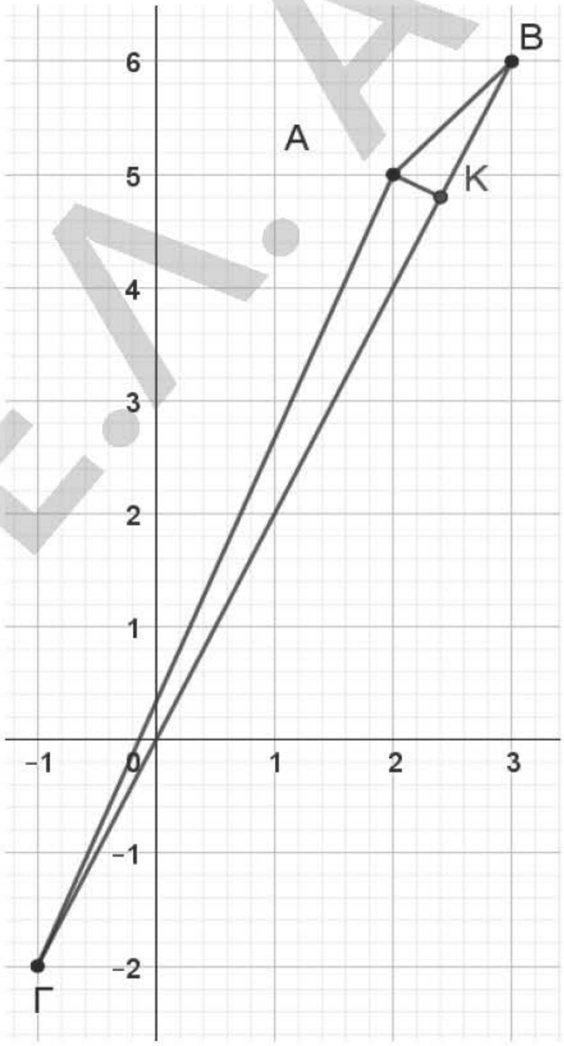
β) Έστω ΑΚ το ύψος από το Α. Τότε $ΑΚ \perp ΒΓ$, οπότε $\lambda_{ΑΚ}\lambda_{ΒΓ} = -1$. Οπότε $\lambda_{ΑΚ} \cdot 2 = -1$, άρα $\lambda_{ΑΚ} = -\frac{1}{2}$.

Η εξίσωση της ευθείας ΑΚ θα είναι:

$$y - y_Α = \lambda_{ΑΚ}\left(x - x_Α\right) \text{ ή } y-5 = -\frac{1}{2}(x-2) \text{ ή } y = -\frac{1}{2}x + 1 + 5 \text{ ή } y = -\frac{1}{2}x + 6$$

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ είναι $\lambda_{ΑΒ} = \frac{y_Β - y_Α}{x_Β - x_Α} = \frac{6-5}{3-2} = \frac{1}{1} = 1$ και ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ΑΒ με τον xx', δηλαδή:

$\lambda_{ΑΒ} = εφω = 1$, άρα $ω = \frac{\pi}{4}$.



ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία Α(2,1), Γ(4,-1) και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (3,-1)$.

α) Να βρεθεί το σημείο Β.

(Μονάδες 09)

β) Αν Β(5,0):

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

$$(3,-1) = (x_B - 2, y_B - 1)$$

Επομένως:

$x_B - 2 = 3$ ή $x_B = 5$ και $y_B - 1 = -1$ ή $y_B = 0$, άρα B(5,0).

β)

i. $\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A, y_\Gamma - y_A) = (4-2, -1-1) = (2,-2)$ και $\overrightarrow{AB} = (3,-1)$.

Για να σχηματίζουν τρίγωνο αρκεί $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right) \neq 0$.

Πράγματι,

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2) - 2(-1) = -6 + 2 = -4$$

Επομένως, τα σημεία Α ,Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\right| = \frac{1}{2}|-4| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \text{ τ.μ.}$$

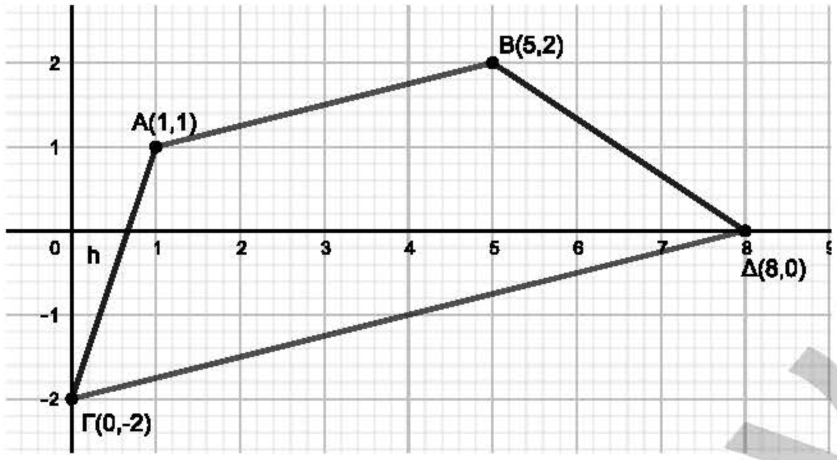
ΘΕΜΑ 2

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία Α(1,1), Β(5,2), Γ(0,-2) και Δ(8,0).

α) Να τοποθετήσετε τα παραπάνω σημεία του επιπέδου σε ένα πρόχειρο σχήμα και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία αυτά είναι τραπέζιο. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου του ερωτήματος α). (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ



α) Τοποθετούμε τα σημεία στο επίπεδο όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Για να είναι το τετράπλευρο ΑΒΔΓ τραπέζιο αρκεί να αποδείξουμε ότι οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες και οι πλευρές ΑΓ και ΒΔ τέμνονται.

Είναι $\lambda_{AB}=\frac{2-1}{5-1}=\frac{1}{4}$ και $\lambda_{\Gamma\Delta}=\frac{0+2}{8-0}=\frac{1}{4}$. Άρα ΑΒ // ΓΔ.

$\lambda_{A\Gamma}=\frac{-2-1}{0-1}=3$ και $\lambda_{B\Delta}=\frac{0-2}{8-1}=-\frac{2}{7}$. Άρα $\lambda_{A\Gamma} \neq \lambda_{B\Delta}$ και οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ δεν είναι παράλληλες.

β) Για το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΔΓ έχουμε: (ΑΒΔΓ) = (ΑΒΔ) + (ΑΓΔ) (1).

Για τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ υπολογίζουμε πρώτα τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AB}$ και έχουμε:

$\overrightarrow{A\Gamma}$ = (0-1,-2-1) = (-1,-3)

$\overrightarrow{A\Delta}$ = (8-1, 0-1) = (7,-1)

$\overrightarrow{AB}$ = (5-1, 2-1) = (4,1)

$\det(\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{A\Delta})=\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}=22$, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Delta})=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}=-11$

$(AB\Delta)=\frac{1}{2}\,|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Delta})|=\frac{11}{2}$ τ.μ. και $(A\Gamma\Delta)=\frac{1}{2}\,|\det(\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{A\Delta})|=11$ τ.μ.

Οπότε η σχέση (1) γίνεται: $(AB\Delta\Gamma)=\frac{11}{2}+11=\frac{33}{2}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(1,7), Β(-1,5) και Γ(3,3).

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 09)

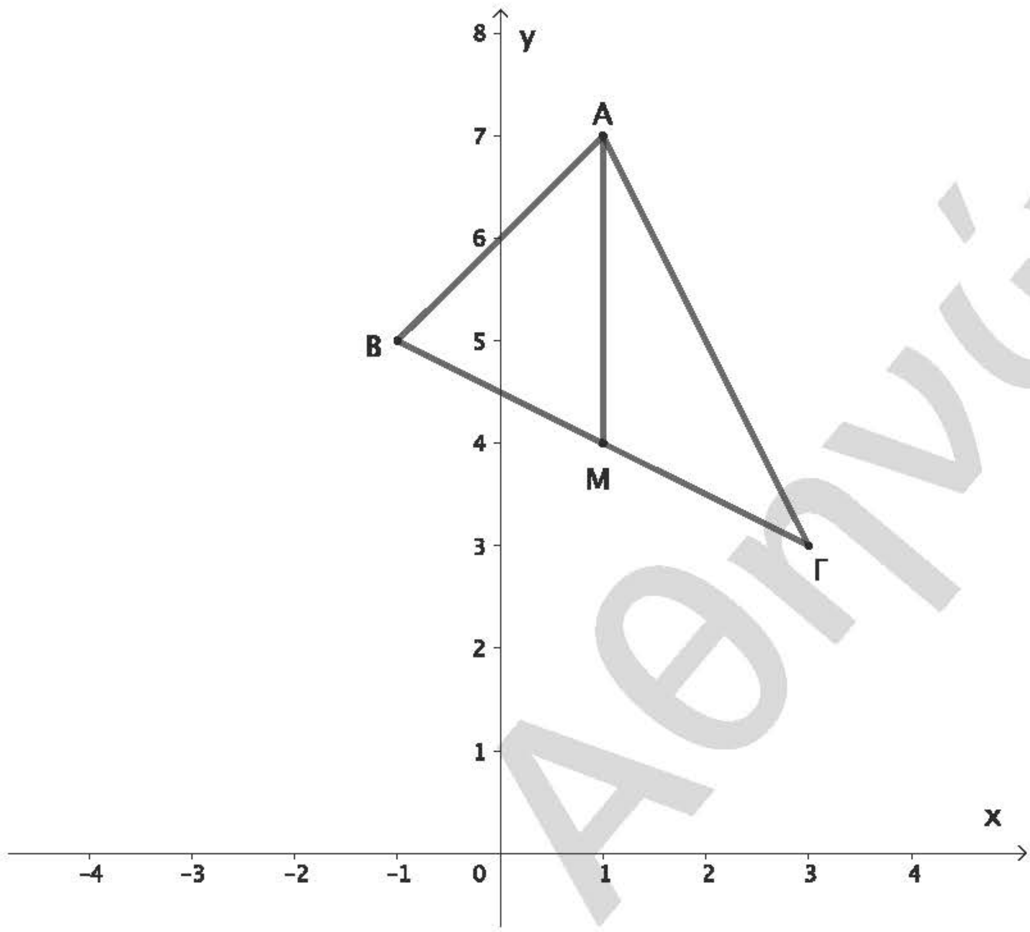
β) Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε να υπολογίσετε:

i. Τις συντεταγμένες του Μ.

ii. Την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ.

(Μονάδες 16)

ΛΥΣΗ



α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}\right)\right|$

όπου $\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A, y_B - y_A\right) = (-1 - 1{,}5 - 7) = (-2, -2)$

$$\overrightarrow{B\Gamma} = \left(x_\Gamma - x_B, y_\Gamma - y_B\right) = (3 + 1{,}3 - 5) = (4, -2)$$

Οπότε:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|4 + 8| = 6$$

β)

i. Το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ είναι: $M\left(\frac{x_B + x_\Gamma}{2},\frac{y_B + y_\Gamma}{2}\right) = (1{,}4)$

ii. Παρατηρούμε ότι για τα σημεία Α και Μ είναι $x_M = x_A = 1$. Επομένως, η ευθεία ΑΜ είναι κατακόρυφη (δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας), οπότε έχει εξίσωση $x = 1$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες (ε_1), (ε_2) και (ε_3) με εξισώσεις $x - 2y = -1$, $2x + y = 4$ και $y = -1$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε_3).

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση

$$x - 2y + 1 = 0$$

και συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση

$$2x + y - 4 = 0$$

και συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{1} = -2$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{2}(-2) = -1$$

Άρα, οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

β) Για το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2), λύνουμε αρχικά την εξίσωση

$$x - 2y + 1 = 0$$

ως προς x, οπότε:

$$x = 2y - 1$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση $2x + y - 4 = 0$ και έχουμε διαδοχικά:

$$2(2y - 1) + y - 4 = 0$$

$$4y - 2 + y - 4 = 0$$

$$5y = 6$$

$$y = \frac{6}{5}$$

Τότε είναι:

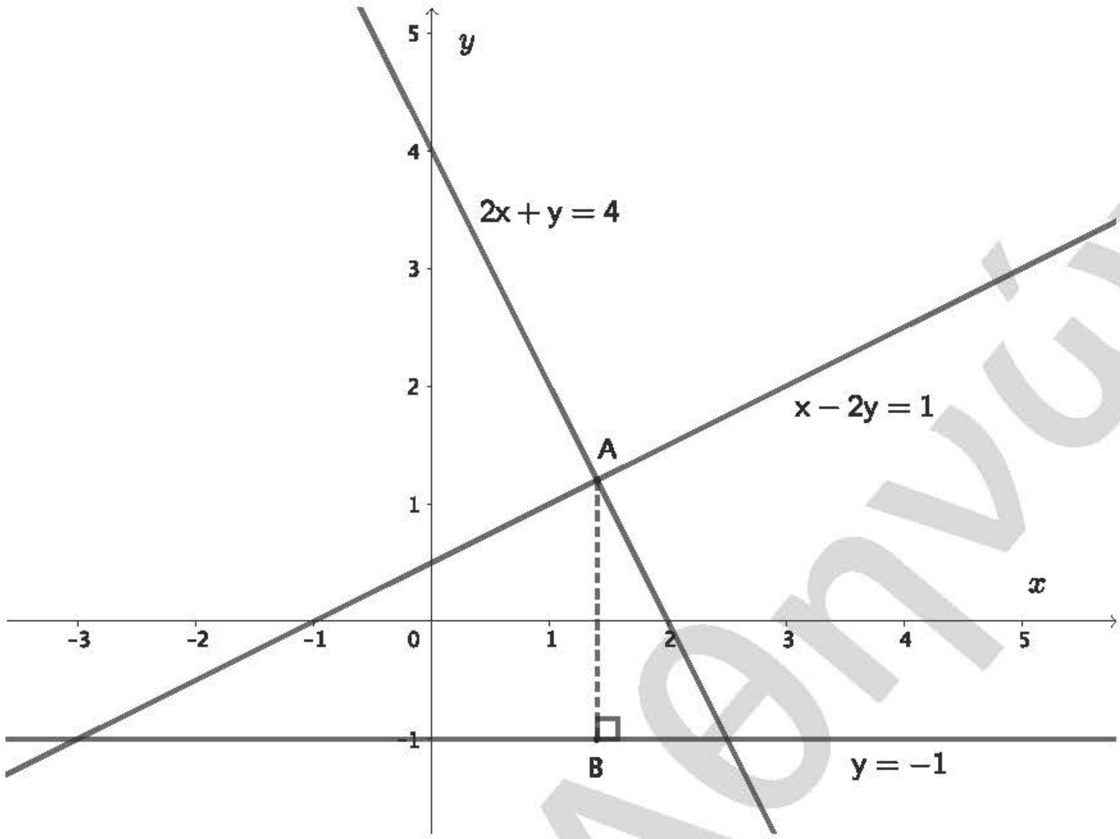
$$x = \frac{12}{5} - 1 = \frac{7}{5}$$

Άρα, το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) είναι

$$A\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

γ) Η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε_3) με εξίσωση $y + 1 = 0$ είναι:

$$d(A,\varepsilon_3) = \frac{\left|0 \cdot \frac{7}{5} + \frac{6}{5} + 1\right|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{11}{5}$$


y
x
2x + y = 4
x − 2y = 1
y = −1
A
B
5
4
3
2
1
-1
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες (ε_1) : $8\chi+\psi-28=0$, (ε_2) : $\chi-\psi+1=0$, (ε_3) : $3\chi+4\psi+5=0$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Μ των (ε_1) και (ε_2).

(Μονάδες 09)

β) Αν το σημείο τομής είναι το Μ(3,4) να υπολογίσετε:

i. Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 08)

ii. Την απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία (ε_3). (Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α) Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις των δύο ευθειών.

$\begin{cases} 8x + y = 28 \\ x - y = -1 \end{cases}$ και παίρνουμε 9x = 27, άρα x = 3. Αντικαθιστούμε στην x – y = -1 το x =3

και έχουμε y = 4. Άρα M(3,4).

β)

i. O=(0,0), άρα το διάνυσμα $\overrightarrow{OM} = (3-0, 4-0) = (3,4)$

$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

ii. d(M,ζ) = $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{30}{5} = 6$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $\mathrm{A}(1,1)$, $\mathrm{B}(4,4)$ και $\Gamma(3,1)$.

α) Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος $\mathrm{B}\Gamma$ είναι η ευθεία (ε): $y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε σημείο K της ευθείας (ε) του β) ερωτήματος τέτοιο ώστε $(\mathrm{KA})=(\mathrm{KB})$. Τι ιδιότητα έχει το σημείο K;

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Θα δείξουμε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά.

Είναι $\lambda_{\mathrm{AB}}=\dfrac{4-1}{4-1}=1$ και $\lambda_{\mathrm{B\Gamma}}=\dfrac{1-4}{3-4}=3$. Αφού $\lambda_{\mathrm{AB}}\neq\lambda_{\mathrm{B\Gamma}}$ τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά.

β) Για το μέσον M της $\mathrm{B\Gamma}$ έχουμε $x_{\mathrm{M}}=\dfrac{x_{\mathrm{B}}+x_{\Gamma}}{2}=\dfrac{4+3}{2}=\dfrac{7}{2}$ και $y_{\mathrm{M}}=\dfrac{y_{\mathrm{B}}+y_{\Gamma}}{2}=\dfrac{4+1}{2}=\dfrac{5}{2}$. Άρα $\mathrm{M}\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{5}{2}\right)$.

Ακόμα $\lambda_{\varepsilon}\cdot\lambda_{\mathrm{B\Gamma}}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon}\cdot 3=-1\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon}=-\dfrac{1}{3}$.

Έχουμε (ε): $y-\dfrac{5}{2}=-\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{7}{2}\right)\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{11}{3}$.

γ) Το σημείο $\mathrm{K}(x,y)$ ανήκει στην ευθεία (ε) αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της, άρα $\mathrm{K}\left(x,-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{11}{3}\right)$.

Έχουμε

$$(\mathrm{KA})=(\mathrm{KB})\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+\left(1+\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}\right)^2}=\sqrt{(x-4)^2+\left(4+\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2+\left(\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}\right)^2=(x-4)^2+\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)^2\Leftrightarrow(x-4)^2-(x-1)^2=\left(\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)^2$$

$$-3(2x-5)=-3\left(\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\right)\Leftrightarrow 2x-5=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\Leftrightarrow 6x-15=2x-7\Leftrightarrow 4x=8\Leftrightarrow x=2.$$

Οπότε $y=-\dfrac{1}{3}\cdot 2+\dfrac{11}{3}=3$, δηλαδή $\mathrm{K}(2,3)$.

Το $\mathrm{K}(2,3)$ ως σημείο της μεσοκαθέτου του $\mathrm{B\Gamma}$ ισαπέχει από τα άκρα του B και Γ, επιπλέον $(\mathrm{KA})=(\mathrm{KB})$, άρα τελικά $(\mathrm{KA})=(\mathrm{KB})=(\mathrm{K\Gamma})$, οπότε το σημείο K είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τα σταθερά σημεία $Α(3,4)$, $Β(2,5)$ και $Γ(-2,2)$ και το μεταβλητό σημείο $Μ(4α-1,\ 3α+1),\ α \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην ΒΓ.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου Μ ισχύει $(ΜΒΓ)=(ΑΒΓ)$. Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά;

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\overrightarrow{AB}=(-1,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(-5,-2)$ οπότε

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -5 & -2\end{vmatrix}=2+5=7\neq 0$$

Άρα τα σημεία A, B, Γ δεν είναι στην ίδια ευθεία, οπότε σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Β, Γ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\dfrac{2-5}{-2-2}=\dfrac{3}{4}$

και εξίσωση $y-5=\dfrac{3}{4}(x-2)$ που γράφεται $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{7}{2}$.

γ) Αν $M(x,y)$ τότε έχουμε $x=4\alpha-1$ και $y=3\alpha+1$, οπότε $\alpha=\dfrac{x+1}{4}$ και $\alpha=\dfrac{y-1}{3}$.

Έχουμε λοιπόν

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{3} \text{ οπότε } y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}+1=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$$

Επομένως το σημείο Μ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{7}{4}$ που είναι παράλληλη στην ΒΓ. Επιπλέον, με $x=3$ έχουμε $y=\dfrac{9}{4}+\dfrac{7}{4}=4$, οπότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το Α.

δ) Είδαμε ότι $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=7$, οπότε $(AB\Gamma)=\dfrac{7}{2}$. Επιπλέον,

$$\overrightarrow{B\Gamma}=(-4,-3) \text{ και } \overrightarrow{BM}=(4\alpha-3,3\alpha-4) \text{, οπότε}$$

$$\det(\overrightarrow{B\Gamma},\overrightarrow{BM})=\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 4\alpha-3 & 3\alpha-4\end{vmatrix}=-12\alpha+16+12\alpha-9=7$$

που σημαίνει ότι $(MB\Gamma)=\dfrac{7}{2}=(AB\Gamma)$.

Τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ, ΜΒΓ είναι ίσα για οποιαδήποτε θέση του Μ, αφού τα τρίγωνα έχουν την ίδια βάση ΒΓ και το ύψος τους υ είναι ίσο με την απόσταση των δυο παράλληλων ευθειών του σχήματος.