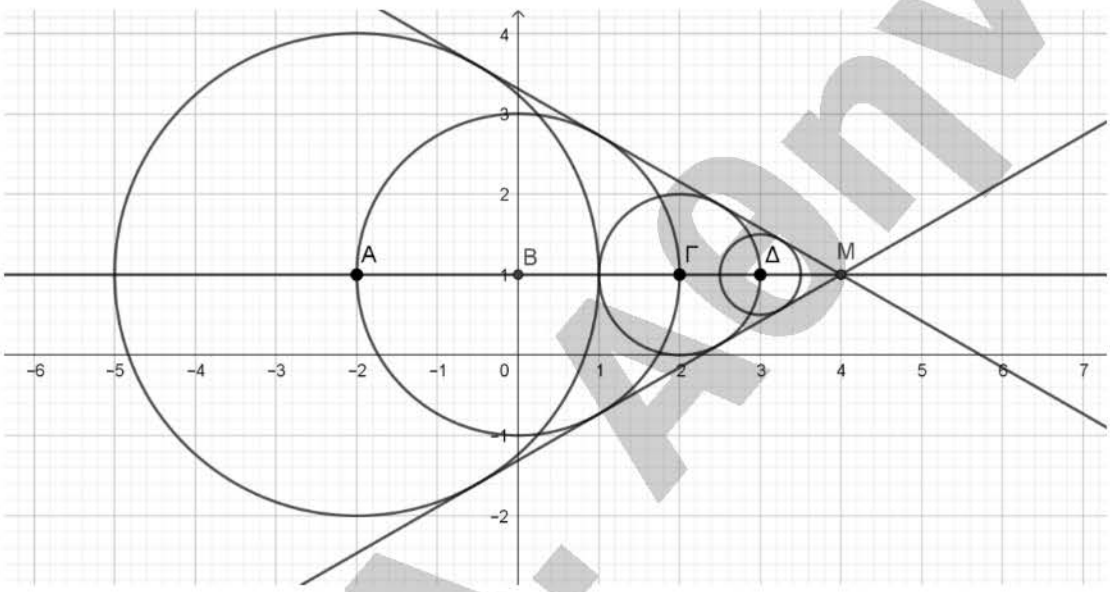
Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

ΘΕΜΑ 4

Επιστήμονες προκειμένου να μελετήσουν υδρόβιο έντομο κατέγραψαν στιγμιότυπα από τους κύκλους με κέντρα τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta$ και ακτίνες $3, 2, 1, \frac{1}{2}$ αντίστοιχα, που σχηματίζονται σε κάθε προσγείωση του στο νερό. Η εικόνα από τις εναέριες λήψεις αποτυπώθηκαν σε σύστημα αξόνων όπως φαίνεται στο σχήμα. Το έντομο κινούμενο ευθύγραμμα περνάει από τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta$ για να καταγραφεί την στιγμή που καταλήγει στο σημείο M.



α) Να βρείτε την εξίσωση της πορείας του εντόμου.

(Μονάδες 4)

β)

i. Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon_1): y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{3-4\sqrt{3}}{3}$ είναι κοινή εφαπτόμενη των τεσσάρων κύκλων.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της άλλης κοινής εφαπτομένης.

(Μονάδες 10)

γ) Με βάση το μοτίβο που ακολουθούν οι κινήσεις του εντόμου να βρείτε ότι η τελική θέση του εντόμου είναι το σημείο $\mathrm{M}(4,1)$.

(Μονάδες 4)

Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

ΛΥΣΗ

α) Η πορεία του εντόμου είναι στην ευθεία της διακέντρου των κύκλων. Οι δύο πρώτοι κύκλοι, σύμφωνα με το σχήμα, έχουν κέντρα $\mathrm{A}(-2,1)$ και $\mathrm{B}(0,1)$, οι οποίοι βρίσκονται στην ευθεία $y=1$. Τα κέντρα των υπόλοιπων κύκλων ανήκουν στην ίδια ευθεία, άρα η πορεία του εντόμου είναι η $y=1$.

β)

i. Έχουμε για τους τέσσερεις; κύκλους:

C_1: κέντρο $\mathrm{A}(-2,1)$ και $\rho_1=3$

C_2: κέντρο $\mathrm{B}(0,1)$ και $\rho_2=2$

C_3: κέντρο $\Gamma(2,1)$ και $\rho_3=1$

C_4: κέντρο $\Delta(3,1)$ και $\rho_4=\frac{1}{2}$.

Μια ευθεία εφάπτεται σε κύκλο αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου από την ευθεία ισούται με την ακτίνα. Έχουμε

$$d(\mathrm{A},\varepsilon_1)=\frac{\left|3+2\sqrt{3}-3+4\sqrt{3}\right|}{\sqrt{12}}=\frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=3=\rho$$

$$d(\mathrm{B},\varepsilon_1)=\frac{\left|3-3+4\sqrt{3}\right|}{\sqrt{12}}=\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=2=\rho_2$$

$$d(\Gamma,\varepsilon_1)=\frac{\left|3-2\sqrt{3}-3+4\sqrt{3}\right|}{\sqrt{12}}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=1=\rho$$

$$d(\Delta,\varepsilon_1)=\frac{\left|3-3\sqrt{3}-3+4\sqrt{3}\right|}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}=$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon_1): y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{3-4\sqrt{3}}{3}$ είναι κοινή εφαπτόμενη των τεσσάρων κύκλων.

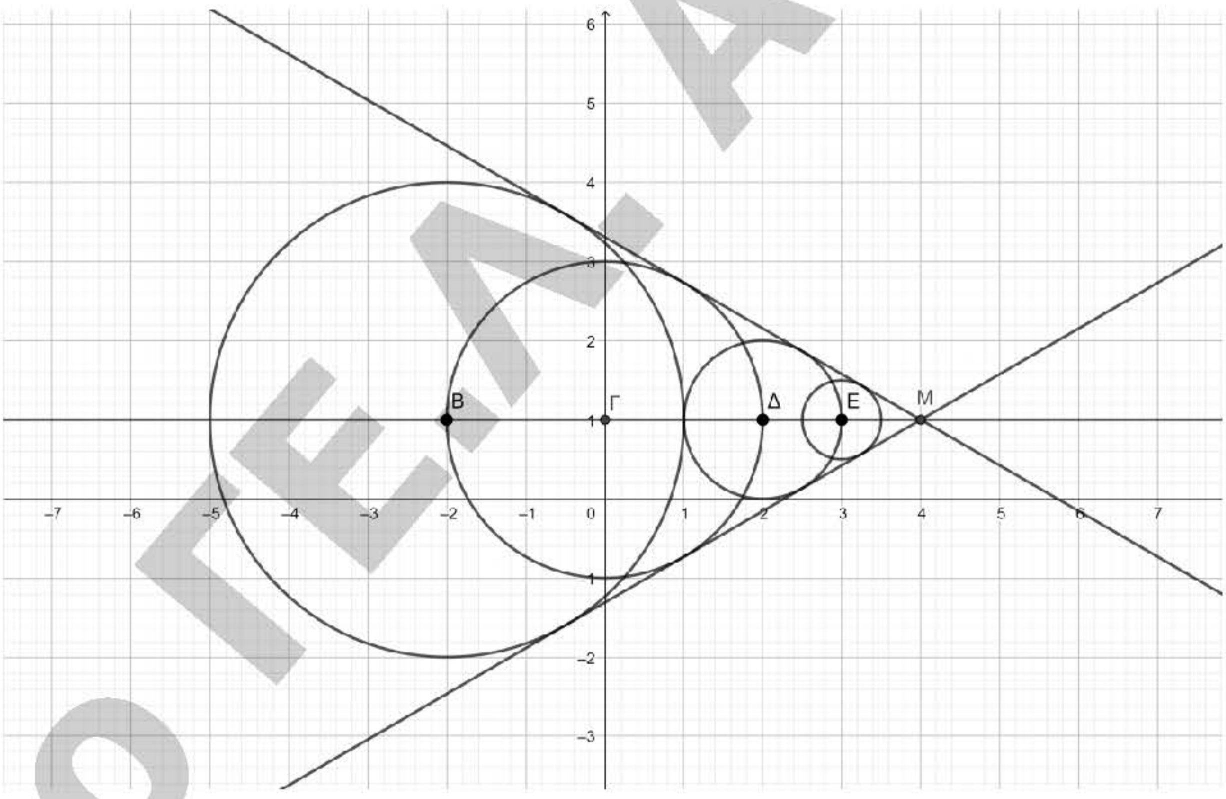
ii. Η εφαπτομένη (ε_1) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ άρα και με την ευθεία $y=1$ γωνία ω, με $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε $\omega=30^\circ$. Επίσης διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(4,1)$ αφού $\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 4+\frac{3-4\sqrt{3}}{3}=1$, δηλαδή οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Λόγω συμμετρίας του σχήματος η άλλη κοινή εφαπτόμενη (ε_2) θα σχηματίζει με την ευθεία $y=1$ άρα και με τον άξονα $x'x$ γωνία $\varphi=150^\circ$, οπότε $\varepsilon\varphi\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Οπότε έχουμε για την (ε_2): $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\beta$.

Λόγω της συμμετρίας η (ε_2) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(4,1)$, οπότε $1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 4+\beta \Leftrightarrow \beta=\frac{3+4\sqrt{3}}{3}$.

Τελικά (ε_2): $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{3+4\sqrt{3}}{3}$.

γ) Οι εφαπτόμενες (ε_1) και (ε_2) διέρχονται από το σημείο M από το ερώτημα β), το ίδιο και η ευθεία της διακέντρου, άρα το σημείο στάσης του εντόμου είναι το $\mathrm{M}(4,1)$.



ΘΕΜΑ 4

Το κέντρο K ενός κύκλου (c) βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και είναι σημείο της ευθείας (ε): y=2x – 1. Ο κύκλος (c) έχει ακτίνα ρ=$3\sqrt{2}$ και η ευθεία (ζ): x + y -2 = 0 εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο Α.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου (c) είναι $(x-3)^2+(y-5)^2=18$.

(Μονάδες 09)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Η εξίσωση της ευθείας ΚΑ είναι η $x-y+2=0$.

(Μονάδες 05)

ii. Οι συντεταγμένες του Α είναι (0,2).

(Μονάδες 04)

γ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΛΜ, όπου Μ και Λ είναι τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τον κύκλο (c).

(Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ

α) Έστω $\mathrm{K}(\mathrm{x_K}, y_\mathrm{K})$ το κέντρο του κύκλου.

Αφού το Κ είναι σημείο της ευθείας ε: y= 2x – 1 , ισχύει $y_K = 2x_K - 1$. Άρα $\mathrm{K}(x_K, 2x_K - 1)$.

Ο κύκλος c εφάπτεται της ευθείας ζ: x + y – 2 = 0 άρα ισχύει $\mathrm{d}(\mathrm{K}, \zeta) = \rho$.

Έχουμε:

$$\mathrm{d}(\mathrm{K}, \zeta) = \rho \Leftrightarrow \frac{|\mathrm{x_K} + 2\mathrm{x_K} - 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |3\mathrm{x_K} - 3| = 6$$

$$\Leftrightarrow 3x_K - 3 = 6 \text{ ή } 3x_K - 3 = -6 \Leftrightarrow x_K = 3 \text{ ή } x_K = -1 .$$

Αφού το Κ είναι σημείο του πρώτου τεταρτημορίου είναι $\mathrm{x_K} > 0$ οπότε $\mathrm{x_K} = 3$. Επομένως το κέντρο του κύκλου είναι το Κ(3,5) και η εξίσωση του κύκλου είναι :

$$\text{c: } (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 18.$$

β)

i. Η ευθεία ΚΑ είναι κάθετη στην εφαπτομένη ζ του κύκλου c στο Α, άρα ισχύει:

$$\lambda_{\mathrm{KA}}\lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\mathrm{KA}} = 1.$$

Επομένως η ευθεία (ΚΑ) έχει εξίσωση :

$$y - y_\mathrm{K} = \lambda_{\mathrm{KA}}(x - x_\mathrm{K}) \Leftrightarrow y - 5 = 1(x - 3)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{x} - \mathrm{y} + 2 = 0$$

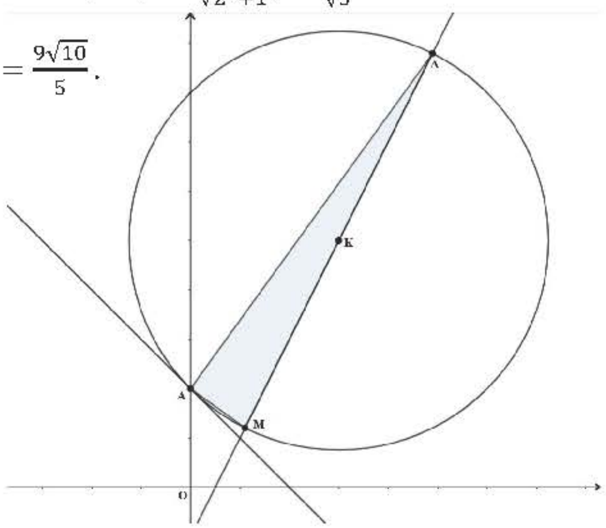
ii. Το σημείο Α είναι το σημείο τομής της ευθείας ζ με την ευθεία ΚΑ. Για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών ζ και ΚΑ.

$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$ άρα το Α έχει συντεταγμένες (0,2).

γ) Η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο στα σημεία Μ, Λ που είναι αντιδιαμετρικά. Επομένως ΜΛ=2ρ. Το ύψος του τριγώνου ΑΛΜ προς την ΛΜ είναι ίσο με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.

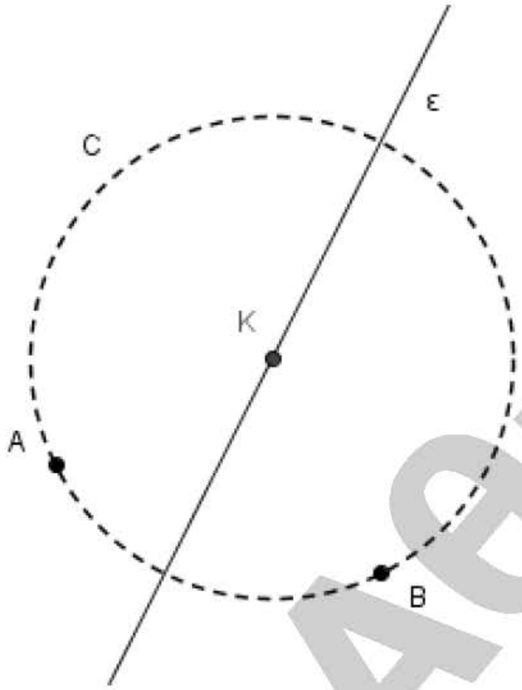
Είναι ε: $\mathrm{y} = 2\mathrm{x} - 1 \Leftrightarrow 2\mathrm{x} - \mathrm{y} - 1 = 0$, άρα $\upsilon = d(A, \varepsilon) = \frac{|0-2-1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Οπότε: $(\mathrm{A\Lambda M}) = \frac{\mathrm{M\Lambda} \cdot \upsilon}{2} = \frac{2\rho \cdot \upsilon}{2} = 3\sqrt{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}$.



ΘΕΜΑ 4

Τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(6,\ 1)$ βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο C από το κέντρο K του οποίου διέρχεται η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 7$. Να βρείτε:



α) τις συντεταγμένες του κέντρου K του κύκλου C.

(Μονάδες 12)

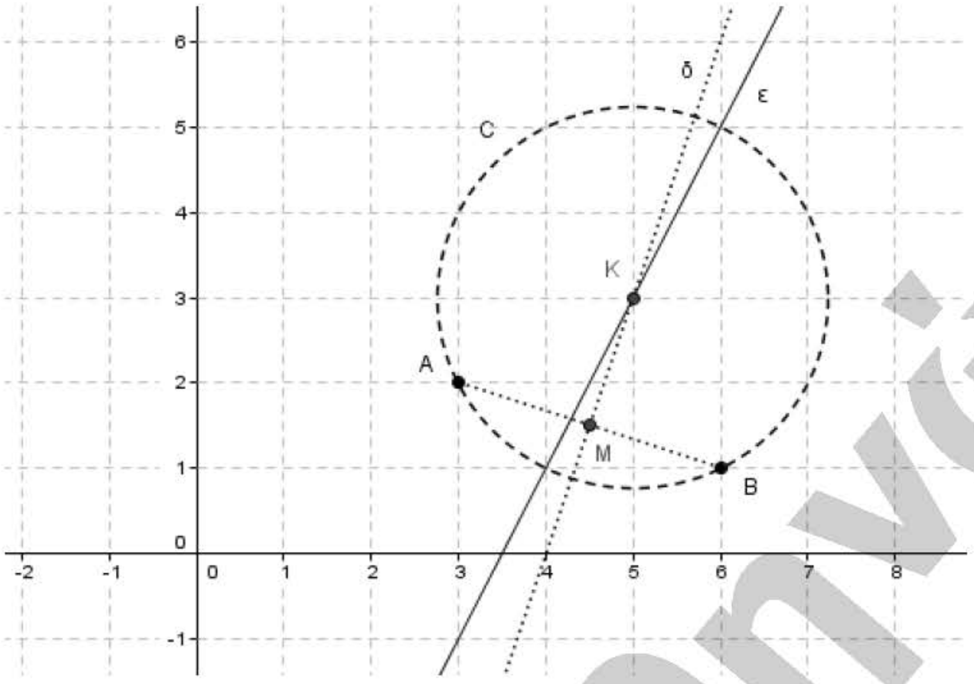
β) την ακτίνα R του κύκλου C.

(Μονάδες 8)

γ) την εξίσωση του κύκλου C.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ



α) Το κέντρο K του κύκλου μπορεί να προσδιοριστεί ως το σημείο τομής της δοσμένης ευθείας ε και της μεσοκάθετης ευθείας δ της χορδής ΑΒ.

Θα βρούμε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας δ της χορδής ΑΒ.

Οι συντεταγμένες του μέσου M της χορδής AB είναι το ημιάθροισμα των συντεταγμένων των σημείων $A(3,2)$ και $B(6,\ 1)$, δηλαδή $M\left(\frac{3+6}{2},\frac{2+1}{2}\right)$ ή ισοδύναμα $M\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Επίσης, $\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-2}{6-3}=-\frac{1}{3}$ και $\lambda_{AB}\cdot\lambda_\delta=-1$, άρα: $\lambda_\delta=3$.

Επομένως, η εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας δ της χορδής ΑΒ είναι :

$y-y_M=\lambda_\delta\cdot(x-x_M)$, δηλαδή $y-\frac{3}{2}=3\cdot\left(x-\frac{9}{2}\right)$, ή ισοδύναμα $y=3x-12$.

Οι συντεταγμένες του κέντρου K του κύκλου είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής της δοσμένης ευθείας ε και της μεσοκάθετης ευθείας δ της χορδής ΑΒ, δηλαδή η λύση του συστήματος: $\begin{cases} y=2x-7 \\ y=3x-12 \end{cases}$ που είναι το ζεύγος $(x,y)=(5,3)$. Άρα, το κέντρο του κύκλου C είναι το σημείο $K(5,3)$.

β) Όπως φαίνεται και στο σχήμα, η ακτίνα R είναι:

$R=|AK|=\sqrt{(x_K-x_A)^2+(y_K-y_A)^2}=\sqrt{(5-3)^2+(3-2)^2}=\sqrt{5}$.

γ) Η εξίσωση κύκλου με κέντρο K και ακτίνα R είναι: $(x-x_K)^2+(y-y_K)^2=R^2$.

Οπότε, από το α) και β) ερώτημα, έχουμε: $(x-5)^2+(y-3)^2=5$.

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε το σημείο $A = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ και το σημείο $B = (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta,\ \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)$, όπου $\theta \in [0, 2\pi)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B ανήκουν σε δύο κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

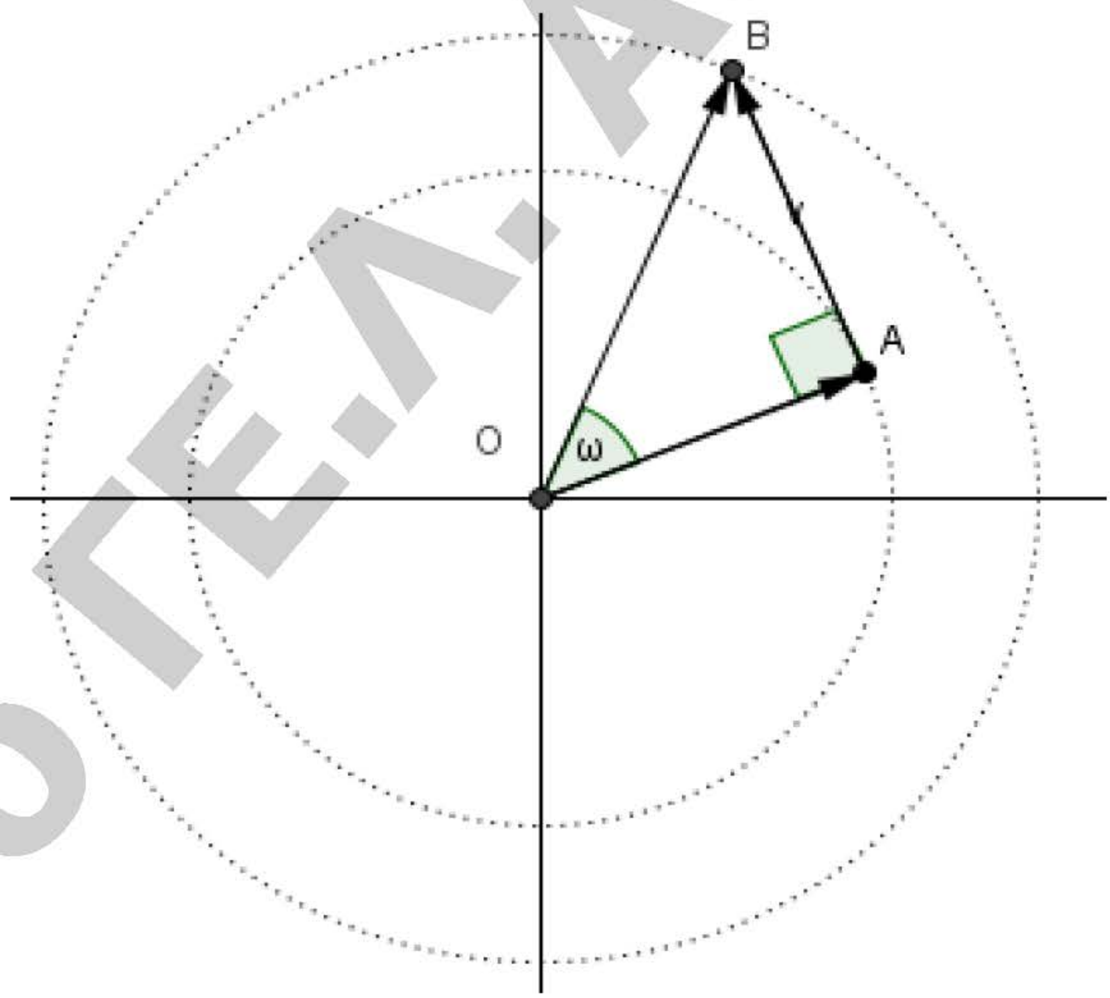
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας ω μεταξύ των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$.

(Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

α) Για το σημείο A είναι: $x = \sigma\upsilon\nu\theta$ και $y = \eta\mu\theta$, οπότε $x^2 + y^2 = \sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$. Άρα, το A ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ακτίνα $R = 1$.

Για το σημείο B είναι: $x = \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta$ και $y = \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta$, οπότε

$$x^2 + y^2 = (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)^2 + (\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 =$$

$$= [\sigma\upsilon\nu^2\theta - 2\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta + \eta\mu^2\theta] + [\eta\mu^2\theta + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta] =$$

$$= 2[\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta] = 2 \cdot 1 = 2 .$$

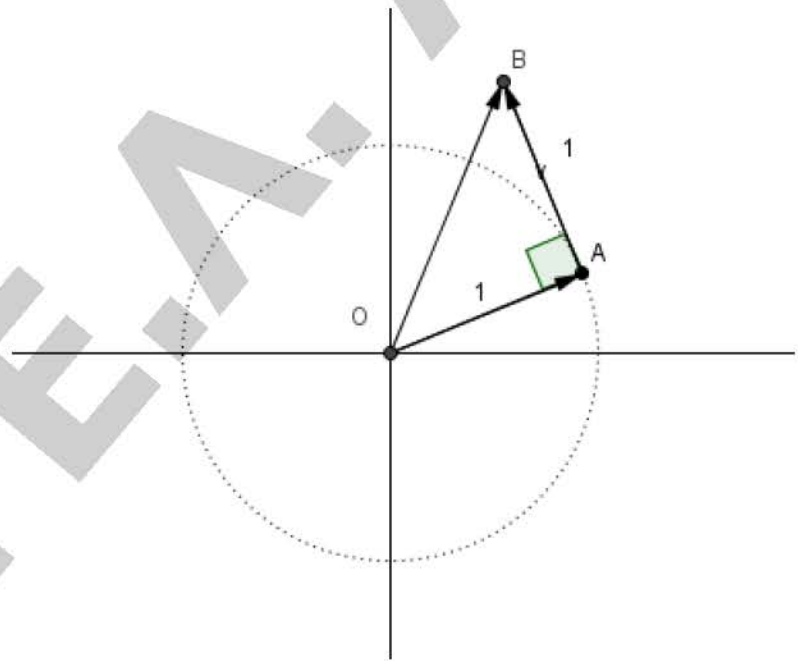
Άρα, το B ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ακτίνα $R = \sqrt{2}$.

β) $\overrightarrow{OA} = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta, \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta) - (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta) = (-\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$.

Οπότε, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta) \cdot (-\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta + \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = 0$.

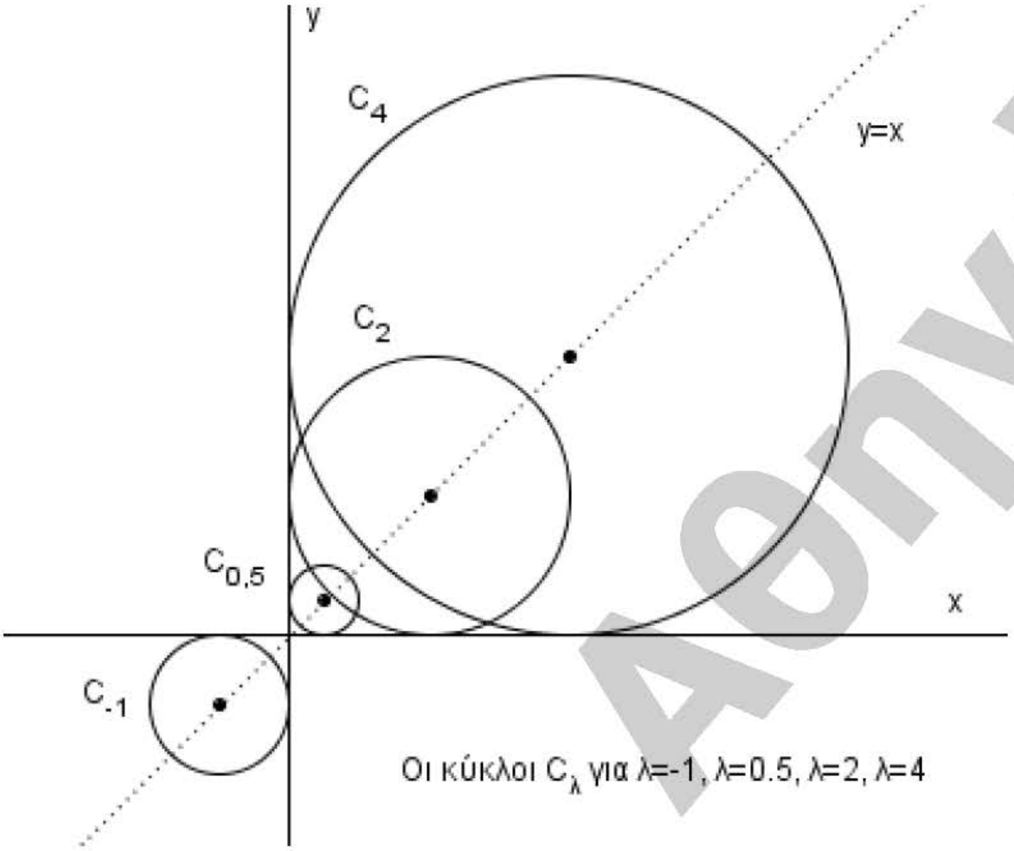
Άρα, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$.



γ) Από το β) ερώτημα, το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο (με την ορθή γωνία στην κορυφή Α). Επιπλέον, από το β) ερώτημα, αφού $\overrightarrow{OA} = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ και $\overrightarrow{AB} = (-\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$, έχουμε ότι $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AB}| = 1$. Επομένως, το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, άρα όλες οι οξείες γωνίες του είναι ίσες με 45°. Επομένως, $\omega = 45^{\circ}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η οικογένεια κύκλων : $(x-\lambda)^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2$, με $\lambda \neq 0$.



α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα κάθε κύκλου C_λ, $\lambda \neq 0$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το κέντρο κάθε κύκλου C_λ βρίσκεται στην ευθεία $y=x$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x=0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους C_λ, $\lambda \neq 0$. Να εξηγήσετε με συντομία ότι το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία $y=0$.

(Μονάδες 6)

δ) Έστω $\alpha \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x=\alpha$ εφάπτεται σε έναν, και μόνο έναν, από τους κύκλους C_λ. Να εξηγήσετε με συντομία ότι το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία $y=\alpha$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Γενικά, η εξίσωση $(x - {}_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ παριστά κύκλο με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ, αν $\rho > 0$ (ή ακτίνα $|\rho|$, αν $\rho \neq 0$). Συνεπώς, αν $\lambda \neq 0$, η εξίσωση $(x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2$ παριστά κύκλο με κέντρο $K(\lambda, \lambda)$ και ακτίνα $|\lambda|$.

β) Παρατηρούμε ότι για $\quad = \lambda$ και $y = \lambda$ επαληθεύεται η εξίσωση $y = x$. Επομένως, για κάθε $\lambda \neq 0$, το κέντρο $K(\lambda, \lambda)$ του κύκλου C_λ είναι σημείο της ευθείας $y = x$.

Για τα ερωτήματα γ), δ), ε) υπενθυμίζουμε ότι μία ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ (με $|A| + |B| \neq 0$) εφάπτεται σε ένα κύκλο με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ αν και μόνο αν $\mathbf{d}(K, \varepsilon) = \rho$ ή ισοδύναμα αν

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \rho \quad (1).$$

Επίσης, από το α) ερώτημα, για κάθε $\lambda \neq 0$, η εξίσωση $(x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2$ παριστά κύκλο C_λ με κέντρο $K(\lambda, \lambda)$ και ακτίνα $|\lambda|$. Οπότε:

$${}_0 = \lambda, \quad y_0 = \lambda, \quad \rho = |\lambda|$$

γ) Θεωρούμε την ευθεία $\quad = 0$. Εδώ: $A = 1$, $B = 0$, $\Gamma = 0$. Οπότε, η σχέση (1) ικανοποιείται για κάθε $\lambda \neq 0$, αφού: $\frac{|1 \cdot \lambda + 0 \cdot \lambda + 0|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |\lambda|$ (ταυτότητα).

Άρα, η ευθεία $\quad = 0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους C_λ, $\lambda \neq 0$.

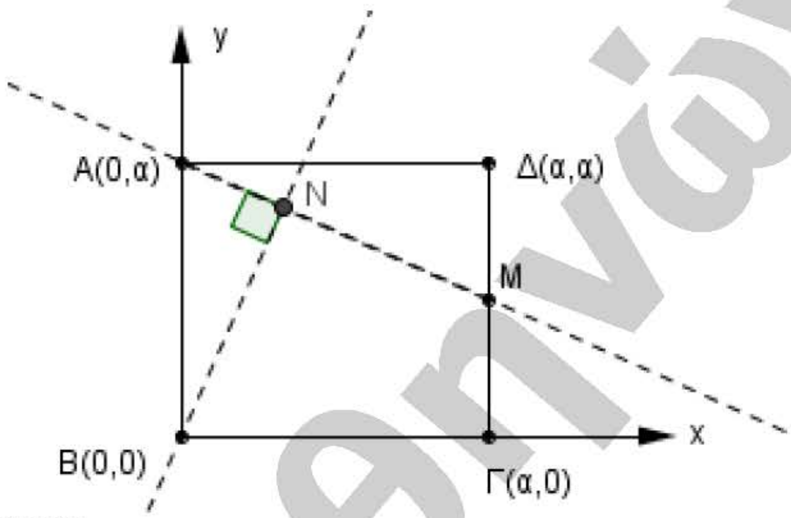
Για να δείξουμε ότι η ευθεία $y = 0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους C_λ θα μπορούσαμε να εργαστούμε όμοια με παραπάνω ή να παρατηρήσουμε ότι υπάρχει συμμετρία ως προς την 1^{η} διχοτόμο, καθώς η εξίσωση $(x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2$ παραμένει αναλλοίωτη αν εναλλάξουμε τους ρόλους των x και y.

δ) Έστω $\alpha \neq 0$. Θεωρούμε την ευθεία $x = \alpha$. Εδώ: $A = 1$, $B = 0$, $\Gamma = -\alpha$. Οπότε, η σχέση (1) γίνεται: $\frac{|1 \cdot \lambda + 0 \cdot \lambda - \alpha|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |\lambda| \Leftrightarrow |\lambda - \alpha| = |\lambda| \Leftrightarrow \lambda - \alpha = \pm\lambda$. Το θετικό πρόσημο δίνει $\alpha = 0$ (πράγμα αδύνατο, αφού έχει υποτεθεί $\alpha \neq 0$), ενώ το αρνητικό πρόσημο δίνει την μοναδική αποδεκτή τιμή του λ που είναι το $\frac{\alpha}{2}$.

Λόγω συμμετρίας, το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία $y = \alpha$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ με μήκος πλευράς $α$ $(α > 0)$ και κορυφές $Α(0, α)$, $Β(0,0)$, $Γ(α, 0)$ και $Δ(α, α)$. $Μ$ είναι το μέσο της πλευράς $ΓΔ$ και το τμήμα $ΒΝ$ είναι κάθετο στο τμήμα $ΑΜ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών:

i. $ΑΜ$

(Μονάδες 5)

ii. $ΒΝ$

(Μονάδες 5)

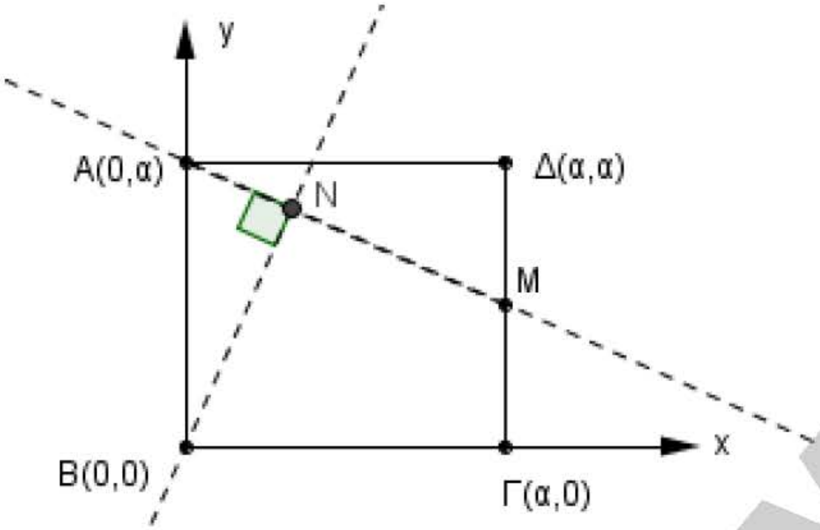
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $Ν$.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο $Ν$ ανήκει σε κύκλο με κέντρο $Γ$ και ακτίνα ίση με $α$. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου αυτού.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ



α) i. Στο τρίγωνο ΑΔΜ έχουμε $(ΑΔ) = α$ και $(ΜΔ) = \frac{α}{2}$, άρα $λ_{AM} = -\frac{1}{2}$. Επίσης, από την υπόθεση, οι ευθείες ΑΜ και ΒΝ είναι κάθετες, οπότε $λ_{AM} \cdot λ_{BN} = -1$. Συνεπώς, $λ_{BN} = 2$.

Έτσι, η εξίσωση της ευθείας ΑΜ είναι: $y - y_A = λ_{AM}(x - x_A)$, δηλαδή $y - α = -\frac{1}{2}(x - 0)$ ή ισοδύναμα $y = -\frac{1}{2}x + α$.

ii. Όμοια, η εξίσωση της ευθείας ΒΝ είναι: $y - y_B = λ_{BN}(x - x_B)$, δηλαδή $y - 0 = 2(x - 0)$, ή ισοδύναμα $y = 2x$.

β) Οι συντεταγμένες του σημείου Ν, ως σημείο τομής των ευθειών ΑΜ και ΒΝ, είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + α \\ y = 2x \end{cases}$.

Όμως, $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + α \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{1}{2}x + α \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}x = α \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2α}{5} \\ y = \frac{4α}{5} \end{cases}$.

Άρα, $N(\frac{2α}{5}, \frac{4α}{5})$.

γ) Η απόσταση του σημείου $N(\frac{2α}{5}, \frac{4α}{5})$ από το σημείο $Γ(α, 0)$ είναι ίση με:

$$\sqrt{(x_Γ - x_N)^2 + (y_Γ - y_N)^2} = \sqrt{(α - \frac{2α}{5})^2 + (0 - \frac{4α}{5})^2} = \sqrt{(\frac{3α}{5})^2 + (\frac{4α}{5})^2} = \sqrt{\frac{25α^2}{25}} = α.$$

Άρα, το σημείο Ν ανήκει σε κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα ίση με α. Αφού ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο το σημείο $Γ(α, 0)$ και ακτίνα α, έπεται ότι έχει εξίσωση: $(x - α)^2 + y^2 = α^2$.

ΘΕΜΑ 2

Έστω Ω το σύνολο όλων των σημείων (x, y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $x^2 + y^2 \leq 9$.

α) Να σχεδιάσετε το σύνολο Ω σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy.

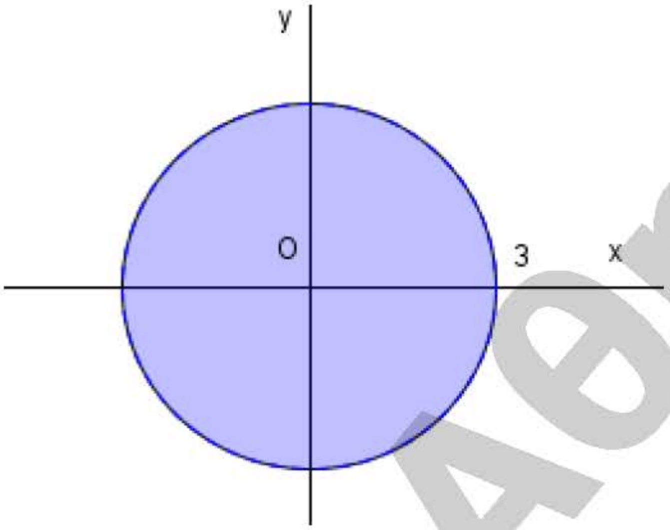
(Μονάδες 13)

β) Υπάρχει σημείο A στο σύνολο Ω τέτοιο ώστε $|\overrightarrow{OA}| = 4$, όπου O η αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Η συνθήκη $x^2 + y^2 \leq 9$ είναι ισοδύναμη με: $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 3$, οπότε το σύνολο Ω αποτελείται από όλα τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση μικρότερη ή ίση του 3. Δηλαδή, πρόκειται για τον κυκλικό δίσκο (συμπεριλαμβανομένης της περιφέρειας) που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 3.



β) Όχι, καθώς: (i) $|\overrightarrow{OA}| = 4$, (ii) το μέτρο $|\overrightarrow{OA}|$ δηλώνει την απόσταση του σημείου A από την αρχή των αξόνων O και (iii) όλες αυτές οι αποστάσεις για τα σημεία του συνόλου Ω είναι μικρότερες ή ίσες του 3, όπως εξηγήσαμε στην απάντηση του α) ερωτήματος.

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+y^2-2x+4y=0$, (1) και η ευθεία $\varepsilon: x-2y+3=0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ.

(Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία ε έχει κοινά σημεία με τον κύκλο C.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες ε_1, ε_2 του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία ε.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)=2\rho$. Πως αιτιολογείται γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό;

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α. Είναι:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 5 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$$

Επομένως η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1, -2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$.

β. Υπολογίσουμε την απόσταση του κέντρου Κ του κύκλου από την ευθεία (ε). Είναι:

$$d(K, \varepsilon) = \frac{|1+4+3|}{\sqrt{1+4}} = \frac{8}{\sqrt{5}} > \sqrt{5}$$

οπότε η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.

γ. Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = \frac{1}{2}$, οπότε οι ζητούμενες εφαπτόμενες που είναι κάθετες σ' αυτήν έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -2$, είναι δηλαδή της μορφής $y = -2x + \beta$. Η εξίσωση αυτή γράφεται $2x + y - \beta = 0$ και η ευθεία που παριστάνει απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση ίση με την ακτίνα του.

Έτσι, έχουμε:

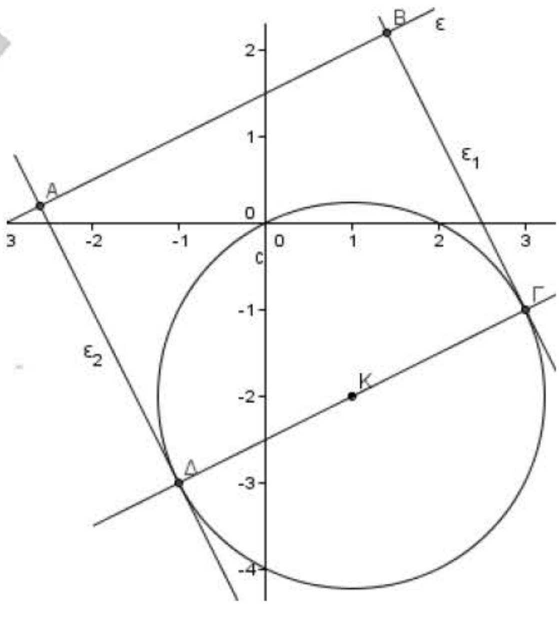
$$\frac{|2 \cdot 1 - 2 - \beta|}{\sqrt{1+4}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |\beta| = 5 \Leftrightarrow \beta = \pm 5$$

Επομένως οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι οι

$\varepsilon_1 : y = -2x + 5$ και $\varepsilon_2 : y = -2x - 5$

δ. Ένα σημείο πάνω στην ευθεία ε_1 είναι το $M(0, 5)$ και ισχύει:

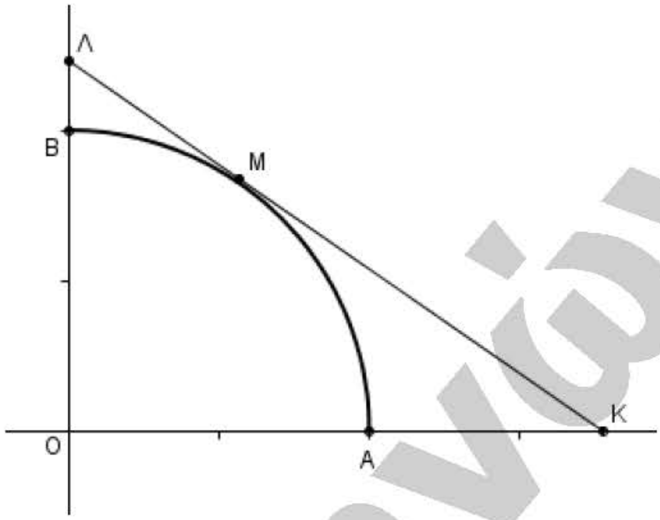
$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(M, \varepsilon_2) = \frac{|0+5+5|}{\sqrt{1+4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} = 2\rho$$



Γεωμετρικά, αν από το κέντρο Κ του κύκλου φέρουμε τις ακτίνες ΚΓ και ΚΔ τότε αυτές είναι παράλληλες στην ευθεία ε . Αλλά από το Κ διέρχεται μια μόνο παράλληλη στην ε, οπότε τα σημεία Γ, Κ, Δ είναι συνευθειακά και συνεπώς τα Γ, Δ είναι αντιδιαμετρικά οπότε $(\Gamma\Delta) = 2\rho$.

ΘΕΜΑ 4

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το πρώτο τεταρτημόριο του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ και το τυχαίο σημείο του $M(x_1, y_1)$, $0 < x_1 < 2$ ανάμεσα στα Α, Β.



α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του στο Μ και τις συντεταγμένες των σημείων τομής της Κ, Λ με τους άξονες.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το μήκος d του τμήματος ΚΛ είναι $d = \dfrac{8}{x_1 y_1}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε το μήκος d_o του τμήματος ΚΛ όταν $x_1 = \sqrt{2}$.

(Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι, όταν το Μ κινείται στο τεταρτοκύκλιο, τότε: $d \geq d_o$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση της εφαπτομένης του τεταρτοκυκλίου στο σημείο Μ είναι: $xx_1+yy_1=4$.

- Αν $y=0$, τότε έχουμε $x=\frac{4}{x_1}$, οπότε $K\left(\frac{4}{x_1},0\right)$.
- Αν $x=0$, τότε έχουμε $y=\frac{4}{y_1}$ (προφανώς $y_1\neq 0$), οπότε $\Lambda\left(0,\frac{4}{y_1}\right)$.

β) Το μήκος του τμήματος ΚΛ, δεδομένου ότι $x_1^2+y_1^2=4$, είναι:

$$d=\sqrt{\frac{16}{x_1^2}+\frac{16}{y_1^2}}=4\sqrt{\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{y_1^2}}=4\sqrt{\frac{x_1^2+y_1^2}{x_1^2y_1^2}}=4\frac{\sqrt{4}}{x_1y_1}=\frac{8}{x_1y_1}$$

που είναι το ζητούμενο.

γ) Όταν $x_1=\sqrt{2}$, τότε από την ισότητα $x_1^2+y_1^2=4$ με $y_1>0$ έχουμε :

$$y_1^2=4-x_1^2\Leftrightarrow y_1^2=4-2\Leftrightarrow y_1^2=2\Leftrightarrow y_1=\sqrt{2}$$

οπότε $d_o=\frac{8}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{8}{2}=4$.

δ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{8}{x_1y_1}\geq 4$, ή αρκεί, $\frac{4}{x_1y_1}\geq 2$, για την απόδειξη της οποίας αρκεί να δείξουμε ότι $x_1^2+y_1^2\geq 2x_1y_1$, που ισχύει, αφού προκύπτει άμεσα από την προφανή ανισότητα $(x_1-y_1)^2\geq 0$.

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(2, 4)$.

α) Να βρείτε όλα τα σημεία Μ στον άξονα $y'y$ ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΒ.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου C με διάμετρο ΑΒ.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C διέρχεται από τα σημεία Μ που προσδιορίσατε στο ερώτημα (α). Κατόπιν, να το επιβεβαιώσετε γεωμετρικά.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Έστω $M(0, y)$ ένα τέτοιο σημείο. Ισχύει:

$$\overrightarrow{MA} = (1, 1-y), \overrightarrow{MB} = (2, 4-y)$$

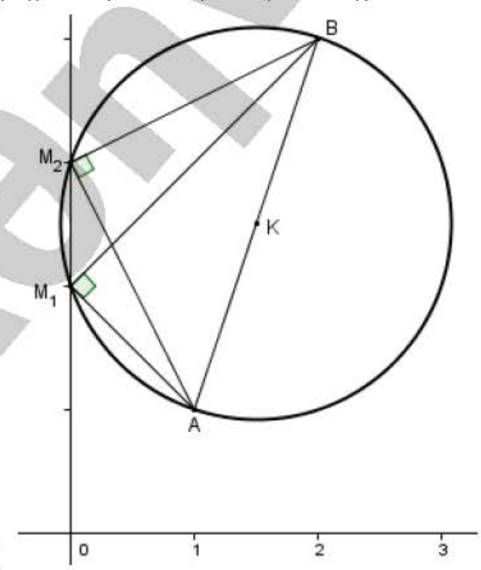
και το τρίγωνο ΜΑΒ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα ΑΒ μόνο όταν ισχύει:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow (1, 1-y)\cdot(2, 4-y) = 0 \Leftrightarrow 2+4-4y-y+y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \text{ ή } y = 3$$

Επομένως υπάρχουν δυο τέτοια σημεία, τα $M_1(0, 2)$ και $M_2(0, 3)$.

β) Ο κύκλος με διάμετρο ΑΒ έχει κέντρο το μέσο Κ του τμήματος ΑΒ δηλαδή το σημείο



$K\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ και η ακτίνα του ρ είναι

$$\rho = \frac{1}{2}(AB) = \frac{1}{2}\sqrt{(2-1)^2 + (4-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10}.$$

Άρα η εξίσωση του είναι:

$$C: \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

γ) Θα αποδείξουμε, πρώτα αλγεβρικά, ότι ο κύκλος διέρχεται από τα σημεία $M_1(0, 2)$ και $M_2(0, 3)$.

- Με $x = 0$ και $y = 2$ στην εξίσωση του κύκλου C έχουμε:

$$\left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$$

  οπότε το $M_1(0, 2)$ είναι πάνω στον κύκλο C.

- Με $x = 0$ και $y = 3$ στην εξίσωση του κύκλου C έχουμε:

$$\left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$$

  οπότε το $M_2(0, 3)$ είναι πάνω στον κύκλο C.

Γεωμετρικά, οι γωνίες $A\hat{M}_1B$ και $A\hat{M}_2B$ βλέπουν το τμήμα ΑΒ με ορθή γωνία, οπότε σύμφωνα με γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας βρίσκονται πάνω στον κύκλο με διάμετρο ΑΒ.

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = x + 2$, $\varepsilon_2 : y = x - 2$ και τα σημεία $\mathrm{A}(-2,0)$, $\mathrm{B}(2,0)$ των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα.

i. Να αποδειχθεί ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

(Μονάδες 04)

ii. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου M, του AB.

(Μονάδες 02)

iii. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαραλλήλου των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

(Μονάδες 06)

β) Ο κύκλος (K, ρ) έχει την ιδιότητα να εφάπτεται των ευθειών ε_1 και ε_2. Αν το κέντρο K του κύκλου (K, ρ) ανήκει στην ευθεία $(\eta) : x = \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε:

i. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου K, συναρτήσει του λ.

(Μονάδες 05)

ii. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ είναι ανεξάρτητη του λ και να γράψετε την εξίσωση που παριστάνει όλους τους κύκλους (K, ρ), για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

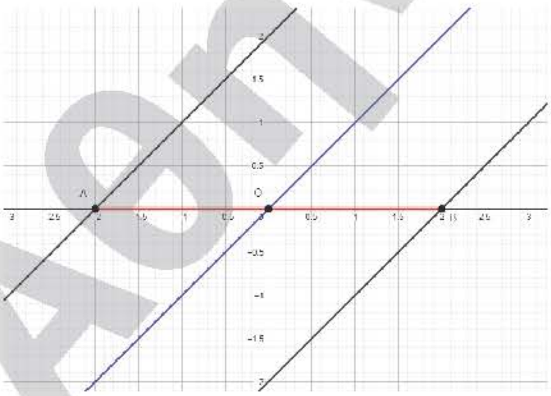
α)

i. Είναι $\varepsilon_1: y = x + 2$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = 1$ και $\varepsilon_2: y = x - 2$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = 1$. Είναι $\lambda_1 = \lambda_2$ άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

ii. Είναι $\frac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}}}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0$ και $\frac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{B}}}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$ άρα το μέσο του AB είναι η αρχή των αξόνων $\mathrm{O}(0,0)$.

iii. **α τρόπος**

Είναι γνωστό ότι η μεσοπαράλληλος των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλη προς αυτές και διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ και διέρχεται από το μέσο $\mathrm{O}(0,0)$ του AB. Η ζητούμενη εξίσωση είναι η $\varepsilon: y = \lambda x \Leftrightarrow y = 1 \cdot x \Leftrightarrow y = x$.



β τρόπος

Το σημείο $\mathrm{M}(x,y)$, είναι σημείο της μεσοπαραλλήλου των ευθειών $\varepsilon_1: x - y + 2 = 0, \varepsilon_2: x - y - 2 = 0$ αν και μόνο αν ισχύει $d(M,\varepsilon_1) = d(M,\varepsilon_2)$.

Έτσι, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
& d(M,\varepsilon_1) = d(M,\varepsilon_2) \Leftrightarrow \\
& \frac{|x-y+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|x-y-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \Leftrightarrow \\
& |x-y+2| = |x-y-2| \Leftrightarrow \\
& x-y+2 = x-y-2 \text{ ή } x-y+2 = -x+y+2 \Leftrightarrow \\
& 2 = -2 \text{ ή } x-y = -x+y \Leftrightarrow \\
& 2x = 2y \Leftrightarrow \\
& y = x
\end{aligned}
$$

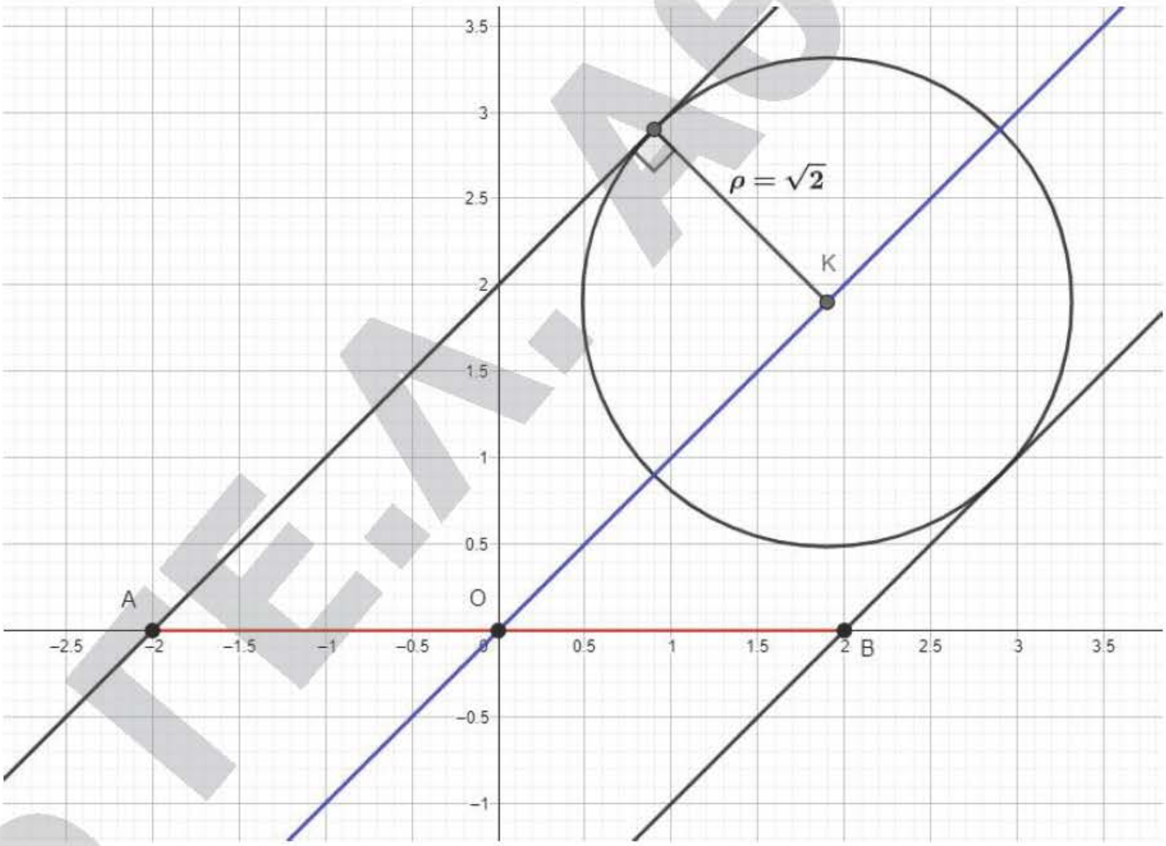
Επομένως, η εξίσωση της μεσοπαραλλήλου των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι η $\varepsilon: y = x$.

β)

i. Αφού το κέντρο $\mathrm{K}(x_{\mathrm{K}}, y_{\mathrm{K}})$ του κύκλου (K, ρ) ανήκει στην ευθεία $(\eta): x=\lambda$, θα έχει $x_{\mathrm{K}}=\lambda$. Επιπλέον το κέντρο K είναι το μέσο της απόστασης των δυο εφαπτομένων του κύκλου $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Οπότε ανήκει στη μεσοπαράλληλο τους. Δηλαδή, είναι $y_{\mathrm{K}}=x_{\mathrm{K}} \Leftrightarrow y_{\mathrm{K}}=\lambda$ με $\mathrm{K}(\lambda, \lambda)$.

ii. Είναι $\varepsilon_1: x-y+2=0$ οπότε η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με $\rho=d(\mathrm{K}, \varepsilon_1)=\dfrac{|x_{\mathrm{K}}-y_{\mathrm{K}}+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|\lambda-\lambda+2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}=\sqrt{2}$, ανεξάρτητη του λ.

Η ζητούμενη εξίσωση για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι η $(x-x_{\mathrm{K}})^2+(y-y_{\mathrm{K}})^2=\rho^2 \Leftrightarrow (x-\lambda)^2+(y-\lambda)^2=2$.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$:(1).

α) Να δείξετε ότι ο κύκλος C έχει κέντρο $K(3,4)$ και ακτίνα $\rho = 5$.

(10 μονάδες)

β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K του κύκλου από την ευθεία $\varepsilon : 3x + 4y = 0$ ισούται με 5 μονάδες μήκους.

(08 μονάδες)

γ) Να δικαιολογήσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός: «Ο κύκλος C και η ευθεία ε εφάπτονται».

(07 μονάδες)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2+y^2-6x-8y=0 \Leftrightarrow \left(x^2-6x\right)+\left(y^2-8y\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2\right)+\left(y^2-2\cdot 4\cdot y+4^2\right)=3^2+4^2$$
$$\Leftrightarrow \left(x-3\right)^2+\left(y-4\right)^2=25.$$

Άρα ο κύκλος έχει κέντρο $K\left(3,4\right)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{25}=5$.

β) Έχουμε $d\left(K,\varepsilon\right)=\dfrac{\left|3x_K+4y_K\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{\left|3\cdot 3+4\cdot 4\right|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{\left|9+16\right|}{\sqrt{25}}=\dfrac{|25|}{5}=\dfrac{25}{5}=5$ μονάδες μήκους.

γ) Από τα προηγούμενα ερωτήματα παρατηρούμε ότι η απόσταση $d\left(K,\varepsilon\right)$ ισούται με την ακτίνα ρ του κύκλου C, οπότε ο ισχυρισμός «Ο κύκλος C και η ευθεία ε εφάπτονται» είναι αληθής.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ο κύκλος $c)$ με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$ και το σημείο $A(3,1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου και να αποδείξετε οτι το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου.

(Μονάδες 07)

β)

i. Να αποδείξετε οτι οι ευθείες που εφάπτονται στον κύκλο $c)$ και διέρχονται από το σημείο A έχουν εξισώσεις (ε_1): $2x - y = 5$ και ε_2 : $x + 2y = 5$.

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$, όπου B και Γ είναι αντίστοιχα τα σημεία επαφής των ευθειών (ε_1) και ε_2 με τον κύκλο.

(Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση του κύκλου είναι $c)$: $x^2 + y^2 = 5$.

Επιπλέον είναι: $OA) = \sqrt{(3-0)^2 + \ 1-0)^2} = \sqrt{10} > \sqrt{5} = \rho$.

Ως εκ τούτου, το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου.

β)

i. Η εξίσωση εφαπτομένης κύκλου, με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ, στο σημείο $M(x_1, y_1)$ του κύκλου, είναι η $xx_1 + yy_1 = \rho^2 \Leftrightarrow xx_1 + yy_1 = 5$, (1).

Το σημείο $A(3,1)$ όμως επαληθεύει την (1), δηλαδή $3x_1 + y_1 = 5$.

Επιπλέον το σημείο $M \ \ x_1, y_1)$ ανήκει στον κύκλο, δηλαδή $x_1^2 + y_1^2 = 5$.

Η εύρεση των x_1, y_1 και ως εκ τούτου της εφαπτομένης, προκύπτει από την επίλυση του συστήματος:

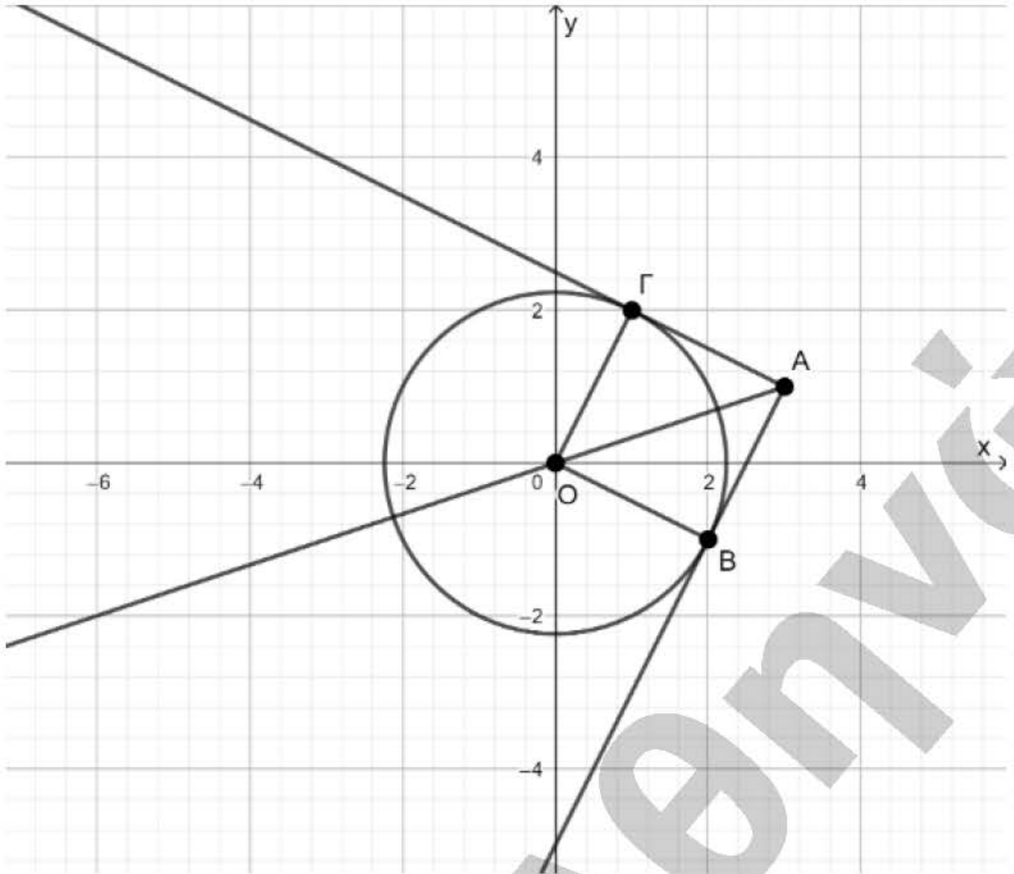
$$\begin{cases} 3x_1 + y_1 = 5 \\ x_1^2 + y_1^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 5 - 3x_1 \\ x_1^2 + \ \ 5 - 3x_1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 5 - 3x_1 \\ x_1^2 - 3x_1 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y_1 = -1 \\ x_1 = 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y_1 = 2 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Άρα τα σημεία επαφής είναι το $B(2,-1)$ και το $\Gamma(1,2)$.

Επομένως οι εξισώσεις των δύο εφαπτόμενων, είναι αντίστοιχα:

$$\varepsilon_1): \ 2x - y = 5 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2): \ x + 2y = 5$$



ii. Η ζητούμενη διχοτόμος είναι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία O και A, διότι το O απέχει ίση απόσταση από της πλευρές της γωνίας, αφού $(OB) = (O\Gamma) = \rho$.

Ο συντελεστής διεύθυνσής της είναι $\lambda_{OA} = \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$ και ένα σημείο της το $O(0,0)$.

Επομένως η εξίσωσή της είναι η $y - 0 = \frac{1}{3}(x - 0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις $C_1: x^2+y^2-6x+5=0$ και $C_2: x^2+y^2=1$.

α) Να δείξετε ότι:

i. Η εξίσωση του κύκλου C_1 γράφεται στη μορφή $(x-3)^2+y^2=4$.

(Μονάδες 5)

ii. Οι κύκλοι C_1, C_2 εφάπτονται εξωτερικά.

(Μονάδες 4)

β) Να βρείτε:

i. Το σημείο επαφής των δύο κύκλων C_1 και C_2.

(Μονάδες 6)

ii. Την εξίσωση της εσωτερικής κοινής εφαπτομένης των δύο κύκλων C_1 και C_2.

(Μονάδες 4)

γ) Αν τα σημεία M_1, M_2 διατρέχουν τους κύκλους C_1, C_2 αντίστοιχα, να βρείτε τη μέγιστη απόσταση ανάμεσα στα σημεία αυτά.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) i. Στην εξίσωση $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ προσθέτουμε και αφαιρούμε το 9 έτσι ώστε να προκύψει το ανάλογο ανάπτυγμα τετραγώνου για το x,

$$x^2 + y^2 - 6x + 9 - 9 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 9 = 4 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4.$$

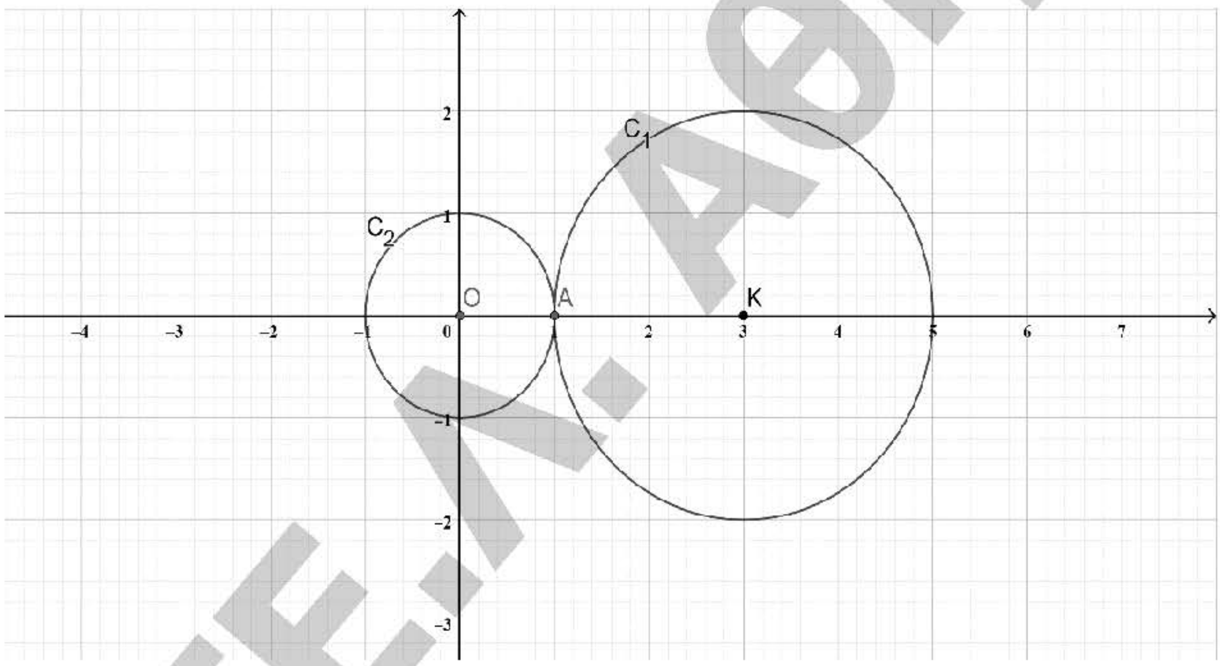
ii. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(3,0)$ και ακτίνα $\rho_1 = 2$.

Ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho_2 = 1$.

Επειδή, η διάκεντρος (ΚΟ)=3=$\rho_1 + \rho_2$ τότε οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

Εναλλακτική λύση:

Τη σχετική θέση των δύο κύκλων μπορούμε να τη βρούμε σχεδιάζοντας τους δύο κύκλους C_1 και C_2 στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Παρατηρούμε πως, οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α(1,0).



β) i. Για να βρούμε το σημείο επαφής αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων των δύο κύκλων.

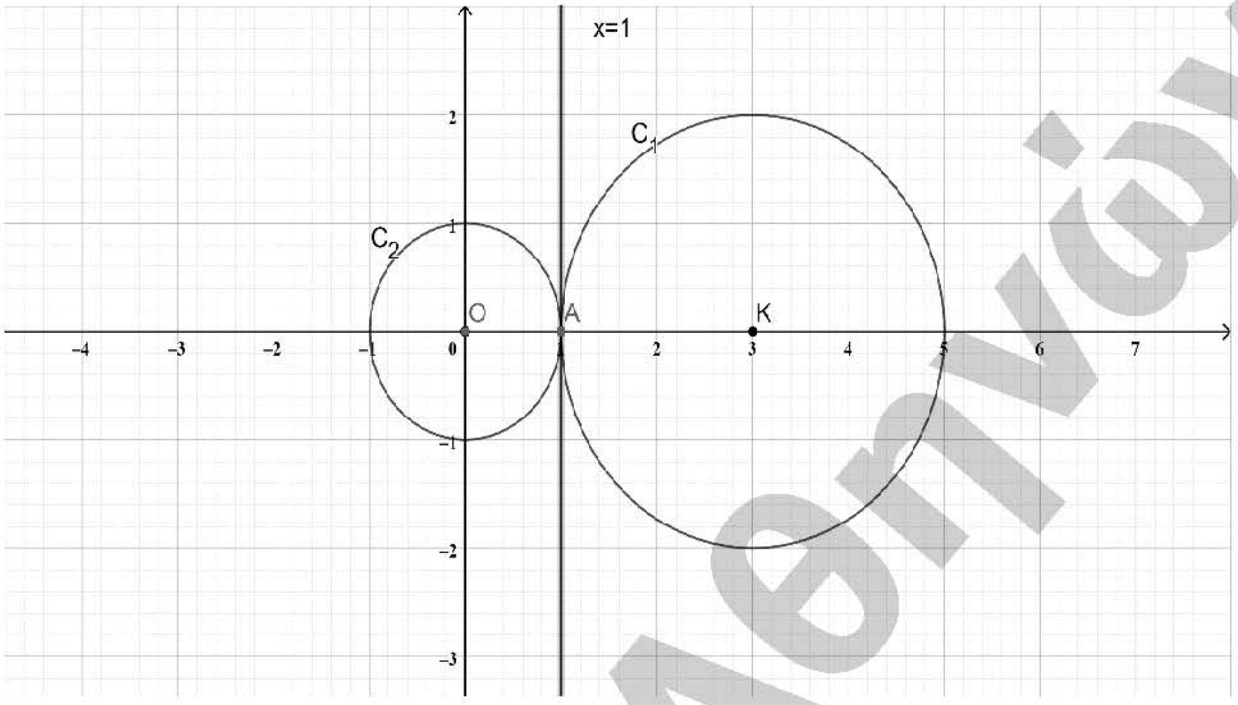
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 6x + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Άρα, το σημείο επαφής των δύο κύκλων είναι το $A(1,0)$.

Εναλλακτικά, το σημείο επαφής Α προκύπτει και από το σχήμα στο ερώτημα α). Παρατηρούμε πως οι δύο κύκλοι εφάπτονται πάνω στον άξονα x΄x, στο σημείο (1,0).

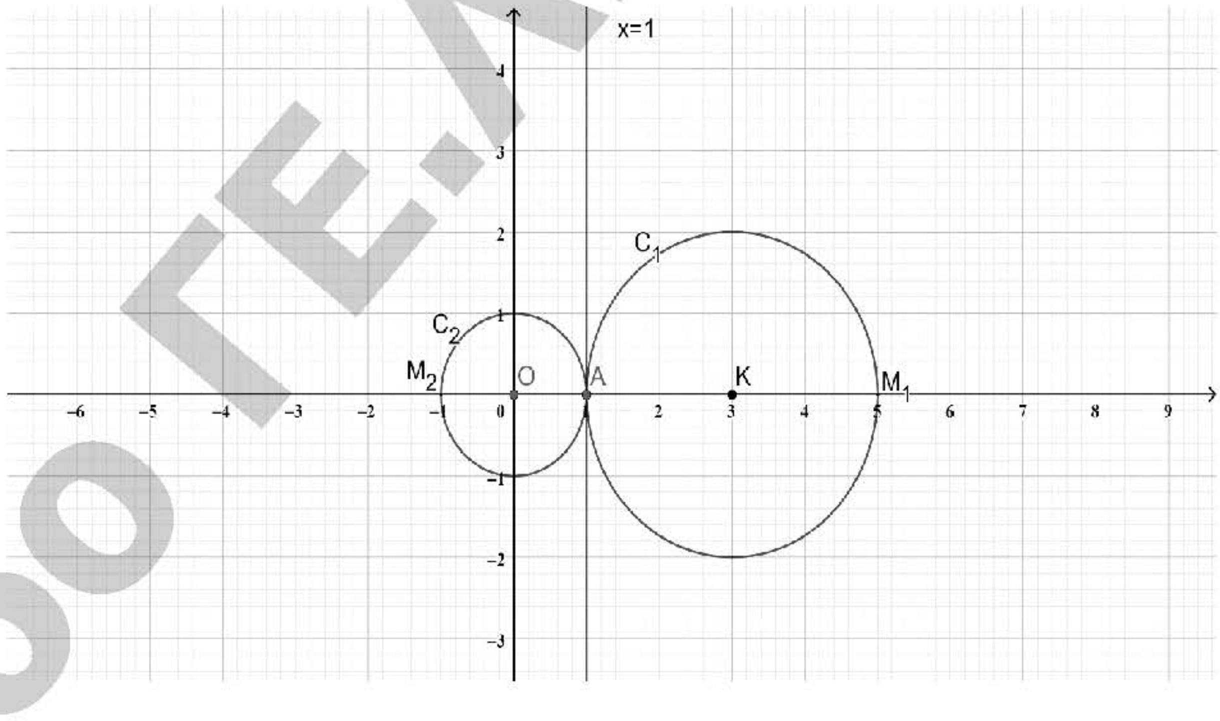
ii. Η εσωτερική κοινή εφαπτομένη είναι η εφαπτομένη των δύο κύκλων στο σημείο επαφής $A(1,0)$. Αφού θα είναι εφαπτομένη του κύκλου C_2 θα έχει τη μορφή $x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = \rho^2$.

Επομένως, η εσωτερική κοινή εφαπτομένη είναι κάθετη στη διάκεντρο και με εξίσωση $x = 1$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



γ) Η μεγαλύτερη χορδή ενός κύκλου είναι η διάμετρός του. Άρα, καθώς τα M_1, M_2 διατρέχουν τους κύκλους C_1, C_2 αντίστοιχα, η μεγαλύτερη απόσταση τους είναι ίση με το άθροισμα των δύο διαμέτρων, δηλαδή,

$$(M_1M_2) = (M_1A) + (AM_2) = 2\rho_1 + 2\rho_2 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 6.$$



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(x-1)^2+(y+2)^2=2(x+3)$: (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2,-2)$ και ακτίνα $\rho=3$.

(06 μονάδες)

β) Να δείξετε ότι η αρχή Ο των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

(04 μονάδες)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία Α και Β ώστε η αρχή των αξόνων να είναι το μέσο της χορδής ΑΒ.

(08 μονάδες)

δ) Αν η ευθεία (ε) του προηγούμενου ερωτήματος έχει εξίσωση $y=x$ τότε να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΚΑΒ.

(07 μονάδες)

ΛΥΣΗ

α) Η δοθείσα γράφεται:

$$x^2-2x+1+(y+2)^2=2x+6 \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2-4x+1+3\right)+(y+2)^2=3+6 \Leftrightarrow$$
$$(x-2)^2+(y+2)^2=9$$

Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2,-2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{9}=3$.

β) Για να δείξουμε ότι η αρχή Ο των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου αρκεί να δείξουμε ότι η αρχή των αξόνων Ο απέχει από το κέντρο Κ απόσταση μικρότερη από την ακτίνα.

Πράγματι, είναι:

$$(KO)=\sqrt{(0-2)^2+(0+2)^2}=\sqrt{8}<\sqrt{9}=3=\rho \text{ και έπεται το ζητούμενο.}$$

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΚΟ είναι:

$$\lambda_{KO}=\frac{y_O-y_K}{x_O-x_K}=\frac{0-(-2)}{0-2}=\frac{2}{-2}=-1.$$

Το τμήμα ΚΟ (απόστημα) είναι κάθετο στην (ε) έτσι, έχουμε:

$$(\varepsilon)\perp KO \Rightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{KO}=-1 \Rightarrow \lambda_\varepsilon \cdot (-1)=-1 \Rightarrow \lambda_\varepsilon=1.$$

Η ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=1$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα έχει εξίσωση:

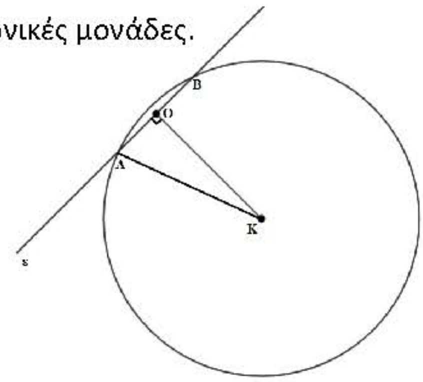
$$y=\lambda_\varepsilon x \Leftrightarrow y=x.$$

δ) Είναι $(KAB)=\frac{1}{2}(KO)(AB)=\frac{1}{2}\sqrt{8}(AB)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}(AB)=(AB)\sqrt{2}$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΚ έχουμε:

$$(OA)^2=(KA)^2-(KO)^2 \Leftrightarrow (OA)^2=3^2-\left(\sqrt{8}\right)^2 \Leftrightarrow (OA)^2=9-8=1 \Leftrightarrow (OA)=1.$$

Άρα $(AB)=2(OA)=2\cdot 1=2$ οπότε $(KAB)=2\sqrt{2}$ τετραγωνικές μονάδες.



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(0,-1)$ και ο κύκλος c_1 με εξίσωση

$$c_1:\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=2.$$

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων $N(x,y)$ του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $\overrightarrow{NA}^2-\overrightarrow{NB}^2=4$, ανήκουν στην ευθεία $\varepsilon)$ με εξίσωση $y=-x-2$.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων P του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση $2x^2+2y^2+10x+14y+21=0$, ανήκουν σε κύκλο c_2 κέντρου $\Lambda\left(-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνας $R=2\sqrt{2}$.

(Μονάδες 06)

γ)

i. Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι c_1 και c_2 εφάπτονται εξωτερικά και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση των σημείων τους.

(Μονάδες 06)

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon)$ είναι κοινή εφαπτομένη των κύκλων c_1 και c_2.

(Μονάδες 06)

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε σημείο $N(x,y)$ του επιπέδου. Τότε $\overrightarrow{NA} = \ 1-x,-y)$, $\overrightarrow{NB} = \ -x,-1-y)$, οπότε ισχύει:

$$\overrightarrow{NA}^2 - \overrightarrow{NB}^2 = 4 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{NA}\right|^2 - \left|\overrightarrow{NB}\right|^2 = 4 \Leftrightarrow \ 1-x)^2 + y^2 - x^2 - \ 1+y)^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$x + y + 2 = 0.$$

Άρα τα ζητούμενα σημεία N ανήκουν σε ευθεία με εξίσωση $\ \varepsilon): \ y = -x - 2$.

β) Έστω σημείο $P(x,y)$ του επιπέδου. Τότε, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου, ισχύει:

$$2x^2 + 2y^2 + 10x + 14y + 21 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 5x + 7y + \frac{21}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x\frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + y^2 + 2y\frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -\frac{21}{2} + \frac{25}{4} + \frac{49}{4} \Leftrightarrow$$

$$c_2: \ \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = 8$$

Άρα τα σημεία P ανήκουν σε κύκλο c_2, με κέντρο $\Lambda\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνα $R = 2\sqrt{2}$.

<u>2^{ος} τρόπος</u>:

$$2x^2 + 2y^2 + 10x + 14y + 21 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 5x + 7y + \frac{21}{2} = 0.$$

Αλλά $5^2 + 7^2 - 4 \cdot \frac{21}{2} = 32 > 0$, επομένως η εξίσωση παριστάνει κύκλο, με κέντρο $\Lambda\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2}$.

γ)

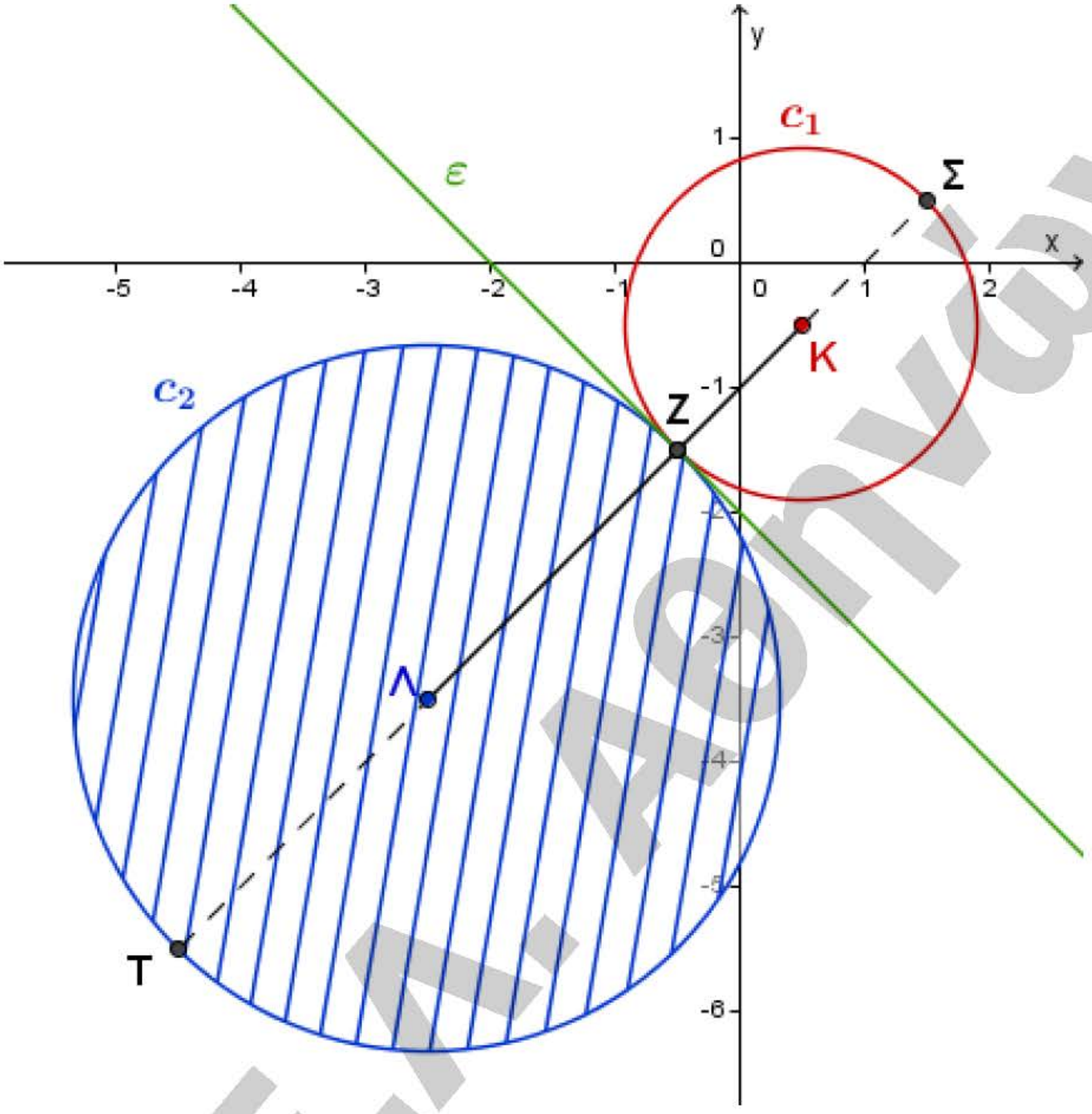
i. Οι κύκλοι c_1 και c_2 εφάπτονται εξωτερικά, διότι έχουν διάκεντρο

$$\delta = \ K\Lambda) = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2} + \frac{7}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2} \text{ και ισχύει } \delta = \rho + R.$$

Άρα η ελάχιστη απόσταση των σημείων των δύο κύκλων είναι μηδέν και η μέγιστη απόσταση είναι ίση με $\Sigma T = \Sigma Z + ZT = 2\rho + 2R = 6\sqrt{2}$.

ii. Είναι $d\ \ K,\varepsilon) = \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2\right|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = \rho$ και $d(\Lambda,\varepsilon) = \frac{\left|-\frac{5}{2} - \frac{7}{2} + 2\right|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = R$.

Άρα η ευθεία $\ \varepsilon)$ είναι η ζητούμενη κοινή εφαπτομένη.


y
x
c_1
c_2
ε
Σ
K
Z
Λ
T
0
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
-6

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(3,0)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας $\zeta)$ του ευθύγραμμου τμήματος AB.

(Μονάδες 07)

β) Αν K είναι ένα τυχαίο σημείο της ευθείας $\zeta)$, να βρείτε την εξίσωση $c)$ όλων των κύκλων, οι οποίοι έχουν κέντρο K και διέρχονται από τα σημεία A και B, συναρτήσει μιας παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 08)

γ) Αν η εξίσωση $(x-2)^2 + \ y-\lambda)^2 = \lambda^2 + 1,\ \lambda \in \mathbb{R}$, παριστάνει όλους τους κύκλους $c)$ του ερωτήματος β), τότε:

i. Να σχεδιάσετε τον κύκλο, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB.

(Μονάδες 05)

ii. Να αποδείξετε οτι η ευθεία $\varepsilon): x + \lambda y - 1 = 0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους $c)$ στο σημείο $A(1,0)$.

(Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

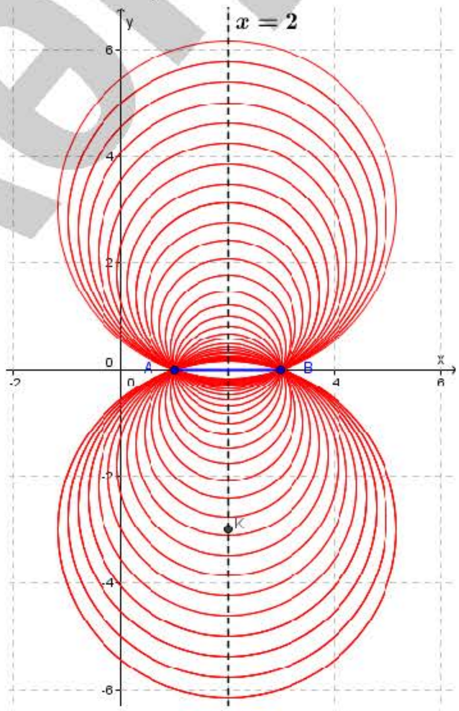
α) Το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι το σημείο $M\left(\frac{_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$, δηλαδή το $M\ \ 2{,}0)$. Επιπλέον, το ευθύγραμμο τμήμα AB βρίσκεται πάνω στον άξονα x΄x. Επομένως, η μεσοκάθετη ευθεία του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι η κατακόρυφη ευθεία (ζ) που διέρχεται από το σημείο M και έχει εξίσωση $x = 2$.

β) Η εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ είναι η $\ x - x_0)^2 + \ y - y_0)^2 = \rho^2$.

Αφού το σημείο K ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $x = 2$, τότε θα είναι της μορφής $K(2,\lambda)$, με $\lambda\epsilon\mathbb{R}$. Το κέντρο των κύκλων λοιπόν είναι το σημείο $K(2,\lambda)$.

Αφού οι κύκλοι διέρχονται από τα σημεία A και B, τότε η ακτίνα τους είναι:

$\rho = \ \ KB) = \ \ KA) = \sqrt{(2-1)^2 + \ \lambda - 0)^2} = \sqrt{1+\lambda^2}$.



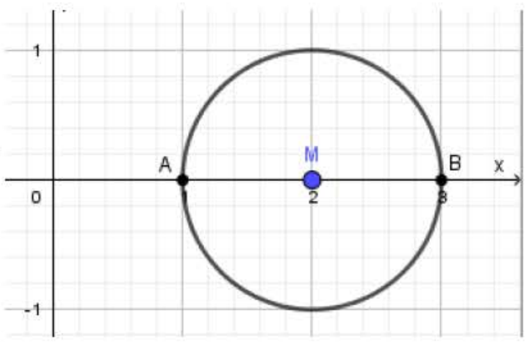
Επομένως, η εξίσωσή τους είναι η

$x - 2)^2 + \ y - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1,\ \lambda \in \mathbb{R}$ (1).

γ) i. Ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο το μέσον $M(2{,}0)$ της διαμέτρου AB, επομένως το $\lambda = 0$. Έτσι η εξίσωσή του είναι η $\ x - 2)^2 + y^2 = 1$.

ii. Το σημείο $A(1{,}0)$ ανήκει στην ευθεία $\ \varepsilon)$ και σε όλους τους κύκλους.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $d(K,\varepsilon) = \rho$.



Πραγματικά είναι

$$d(K,\varepsilon) = \frac{|1\cdot 2 + \lambda\cdot\lambda - 1|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{|1+\lambda^2|}{\sqrt{1+\lambda^2}} =$$

$$= \frac{1+\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{1+\lambda^2)\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\lambda^2)} = \sqrt{1+\lambda^2}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τετράγωνο MM_1OM_2 με $M(4,4), M_1(4,0), M_2(0,4)$. Αν O η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, τότε:

α) Να δείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου MM_1OM_2 έχει εξίσωση $C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x + y = 8$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου C

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το σημείο επαφής της ευθείας ε με τον κύκλο C.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η πλευρά του τετραγώνου είναι $(MM_1) = 4$. Η διαγώνιος OM είναι η διάμετρος του ζητούμενου κύκλου.

Έχουμε $(OM) = \sqrt{(OM_1)^2 + (MM_1)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, δηλαδή $\rho = 2\sqrt{2}$

Το μέσον της OM έχει συντεταγμένες $K(2,2)$.

Άρα ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου (περιγεγραμμένος κύκλος) έχει εξίσωση $C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$.

β) Για να είναι η ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου θα πρέπει η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία να είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.

Έχουμε:

$d(K,\varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2+2-8|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = \rho.$

Άρα η ευθεία ε είναι εφαπτομένη του κύκλου.

γ) Έστω $N(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής. Τότε οι συντεταγμένες του σημείου θα πρέπει να επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας και του κύκλου.

Έχουμε:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 8 \\ (x_1-2)^2 + (y_1-2)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

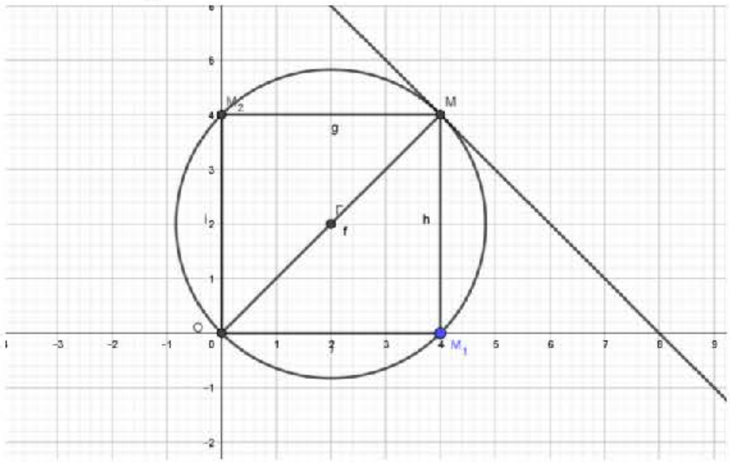
$$\begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ (8 - y_1 - 2)^2 + (y_1 - 2)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ (6 - y_1)^2 + (y_1 - 2)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ 36 - 12y_1 + {y_1}^2 + {y_1}^2 - 4y_1 + 4 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ 2{y_1}^2 - 16y_1 + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ {y_1}^2 - 8y_1 + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ (y_1 - 4)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 4 \end{cases}.$$

Άρα το σημείο επαφής είναι το $M(4,4)$.



ΘΕΜΑ 2

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ ώστε $A(5,6)$, $B(1,2)$, $\Gamma(12,2)$ και το ύψος του $A\Delta$, όπου Δ σημείο της ΒΓ, όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $B\Gamma$ και $A\Delta$.

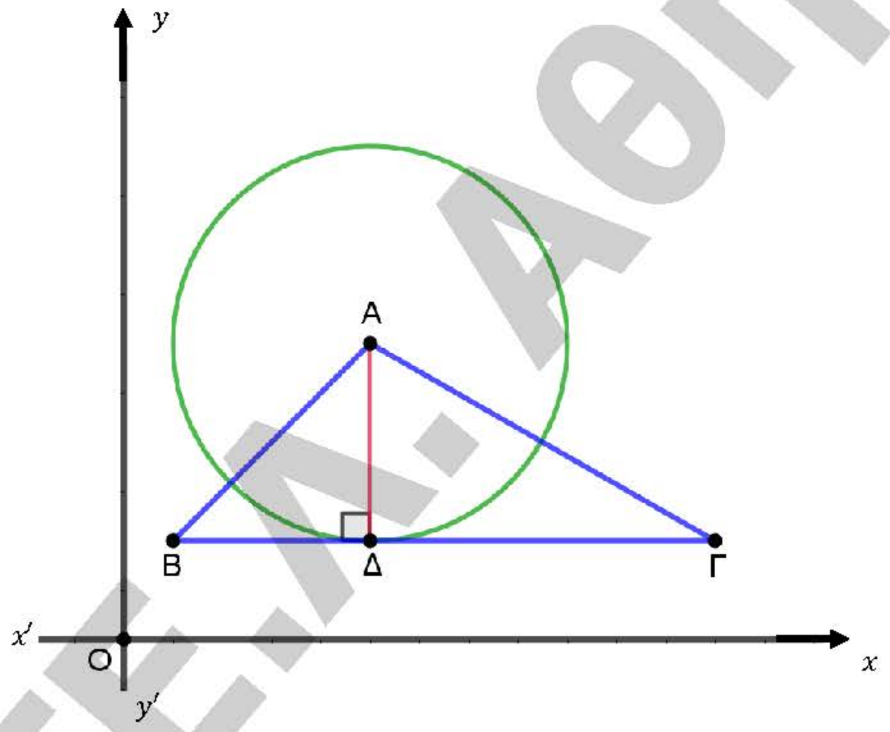
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο A, ο οποίος εφάπτεται της ευθείας $B\Gamma$ στο σημείο Δ.

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

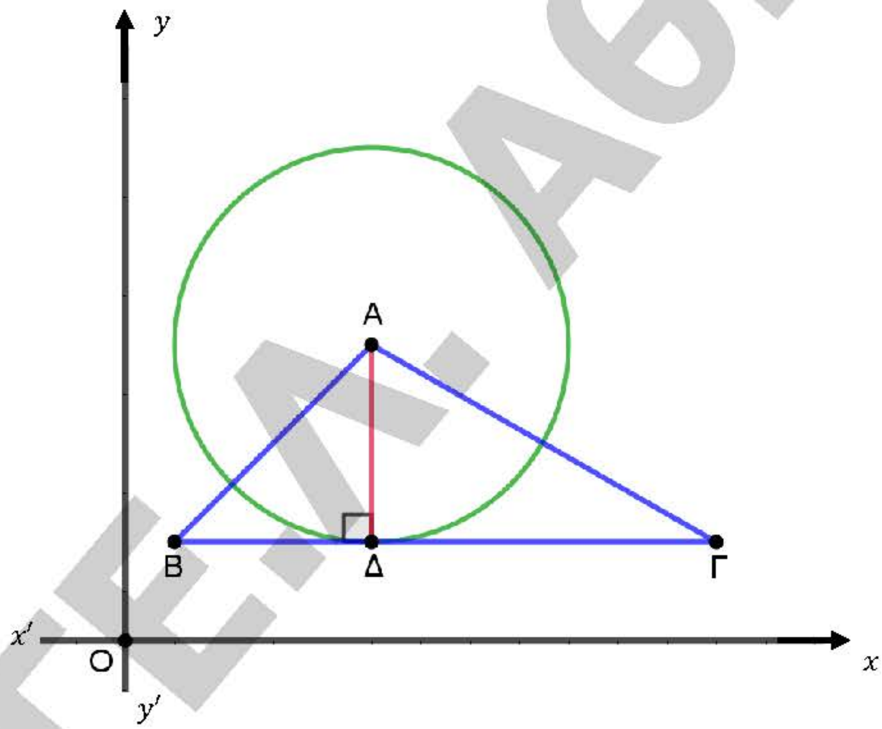
α) Παρατηρούμε ότι τα σημεία Β και Γ έχουν την ίδια τεταγμένη 2, άρα κάθε σημείο της ευθείας $ΒΓ$ έχει τεταγμένη 2 και επομένως η ευθεία ΒΓ είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, άρα $ΒΓ$: $y = 2$.

Η ευθεία ΑΔ είναι κάθετη στην ΒΓ, άρα παράλληλη προς τον άξονα $y'y$ και καθώς το σημείο Α έχει τετμημένη 5, θα είναι $ΑΔ: x = 5$.

β) Αφού το σημείο Δ είναι η τομή των ευθειών με εξισώσεις $ΑΔ$: $x = 5$ και $ΒΓ: y = 2$, άρα θα είναι $Δ(5, 2)$.

γ) Η ακτίνα του κύκλου θα είναι το μήκος ΑΔ $= y_Α - y_Δ = 6 - 2 = 4$.

Άρα ο κύκλος έχει εξίσωση $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 16$.



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(1,2), B(2,4)$ και $\Gamma(3,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η $B\hat{A}\Gamma = 90°$.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου c, ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ.

(Μονάδες 09)

γ) Αν ο κύκλος c έχει εξίσωση $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$, τότε να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του, οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (2-1, 4-2) = (1,2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (3-1, 1-2) = (2,-1)$.

Τότε $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$. Επομένως τα διανύσματα είναι κάθετα και ως εκ τούτου $B\hat{A}\Gamma = 90°$.

Εναλλακτική λύση: $\lambda_{AB} = \frac{4-2}{2-1} = 2$, $\lambda_{A\Gamma} = \frac{1-2}{3-1} = -\frac{1}{2}$ και $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1$.

β) Αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A, ο κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ έχει διάμετρο την υποτείνουσα $B\Gamma$ του τριγώνου και κέντρο το μέσο K της $B\Gamma$.

Αλλά $x_K = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$, $y_K = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$, οπότε $K\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Για την ακτίνα του, είναι: $\rho = \frac{(B\Gamma)}{2} = \frac{\sqrt{(3-2)^2+(1-4)^2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Ως γνωστόν, η εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ είναι η

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Επομένως, η εξίσωση του κύκλου c είναι η $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$.

γ) Έστω $\varepsilon: y = \lambda\, x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0$ εξίσωση ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία ισούται με την ακτίνα του ρ. Είναι λοιπόν:

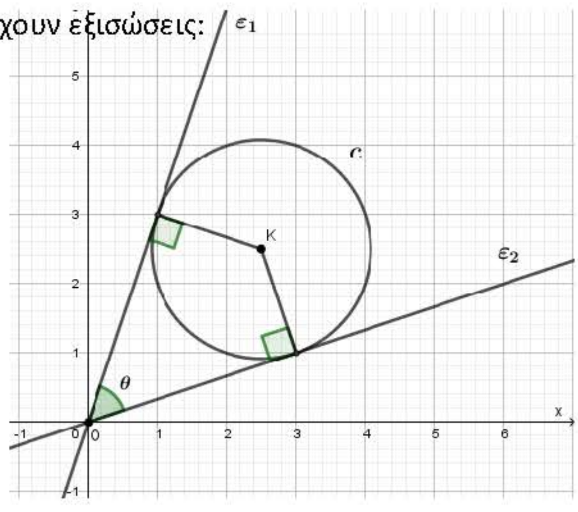
$$d(K,\varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{\left|\lambda \cdot \frac{5}{2} - 1 \cdot \frac{5}{2} + 0\right|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot |\lambda - 1| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow$$

$$25\,(\lambda-1)^2 = 10\,(\lambda^2+1) \Leftrightarrow 3\lambda^2 - 10\lambda + 3 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64 > 0$ και οι λύσεις της δευτέρου βαθμού εξίσωσης που έχει προκύψει είναι οι $\lambda_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} \Leftrightarrow \lambda_1 = 3$ ή $\lambda_2 = \frac{1}{3}$.

Επειδή από ένα σημείο εκτός κύκλου φέρονται δύο ακριβώς εφαπτόμενες προς αυτόν, οι ζητούμενες ευθείες που εφάπτονται στον κύκλο έχουν εξισώσεις:

$\varepsilon_1: y = 3x$ και $\varepsilon_2: y = \frac{1}{3}x$



ΘΕΜΑ 4

Οι κορυφές A , Γ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι τα σημεία $(1,4)$ και $(3,0)$ αντιστοίχως.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$ γράφεται στη μορφή $y-2=\frac{1}{2}\ x-2)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma$ γράφεται στη μορφή $(x-2)^2+(y-2)^2=5$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών B,Δ του τετραγώνου. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ 2

α) Το μέσο K του ευθυγράμμου τμήματος $ΑΓ$ έχει συντεταγμένες

$x = \frac{x_A+x_Γ}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$ και $y_k = \frac{y_A+y_Γ}{2} = \frac{4+0}{2} = 2$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $ΑΓ$ είναι ίσος με $\lambda_1 = \frac{4-0}{1-3} = -2$, κατά

συνέπεια η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Άρα η εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος ΑΓ είναι $y - 2 = \frac{1}{2}(x-2)$.

β) Το κέντρο του κύκλου διαμέτρου $ΑΓ$ είναι το σημείο $K(2,2)$ και η ακτίνα είναι ίση με $\rho = (AK) = \sqrt{(1-2)^2+(4-2)^2} = \sqrt{5}$.

Επομένως η εξίσωση του κύκλου διαμέτρου ΑΓ είναι $(x-2)^2+(y-2)^2 = 5$.

γ) Οι ζητούμενες κορυφές $B, Δ$ του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ ισαπέχουν από τα σημεία Α, Γ και βλέπουν το ΑΓ υπό ορθή γωνία, άρα είναι τα σημεία τομής της μεσοκαθέτου του τμήματος $ΑΓ$ και του κύκλου διαμέτρου $ΑΓ$.

Λύνουμε το σύστημα :

$y - 2 = \frac{1}{2}(x-2)$ (1)

$(x-2)^2+(y-2)^2 = 5$ (2)

Η εξίσωση (2) με τη βοήθεια της (1) γράφεται

$(x-2)^2 + \frac{1}{4}(x-2)^2 = 5 \Leftrightarrow 4(x-2)^2+(x-2)^2 = 20 \Leftrightarrow 5(x-2)^2 = 20 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2 = 4 \Leftrightarrow x-2 = 2$ ή $x-2=-2 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = 0$.

Για $x = 4$ βρίσκουμε $y = 3$ και για $x = 0$ βρίσκουμε $y = 1$.

Επομένως οι ζητούμενες κορυφές είναι τα σημεία $(4,3)$ και $(0,1)$.

ΘΕΜΑ 4

Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy η εξίσωση $3x + 4y = 25$ περιγράφει τη θέση ενός αγωγού ύδρευσης. Σε αυτό το σύστημα θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα 2.

α)

i. Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που περιγράφει την θέση του σιντριβανιού;

(Μονάδες 04)

ii. Να εξετάσετε αν ο αγωγός ύδρευσης διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, προκειμένου να ενωθεί με αυτό. (Μονάδες 05)

iii. Αν ο αγωγός ύδρευσης δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, ποιο σημείο του αγωγού ύδρευσης πρέπει να ενωθεί με το κέντρο του σιντριβανιού ώστε να έχουμε την μικρότερη δυνατή απόσταση, άρα και οικονομικότερη κατασκευή;

(Μονάδες 08)

β) Ο μηχανικός που θέλει να χαράξει έναν ευθύγραμμο δρόμο, κατέληξε στην εξίσωση $\lambda x + y + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \neq 0$. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει για ποια τιμή του λ ο δρόμος αυτός εφάπτεται του σιντριβανιού; (Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α)

i. Ο κύκλος έχει κέντρο το O(0,0) και ακτίνα ρ = 2. Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το O(0,0) είναι της μορφής $x^2 + y^2 = \rho^2$. Επομένως η εξίσωση γίνεται $x^2 + y^2 = 4$.

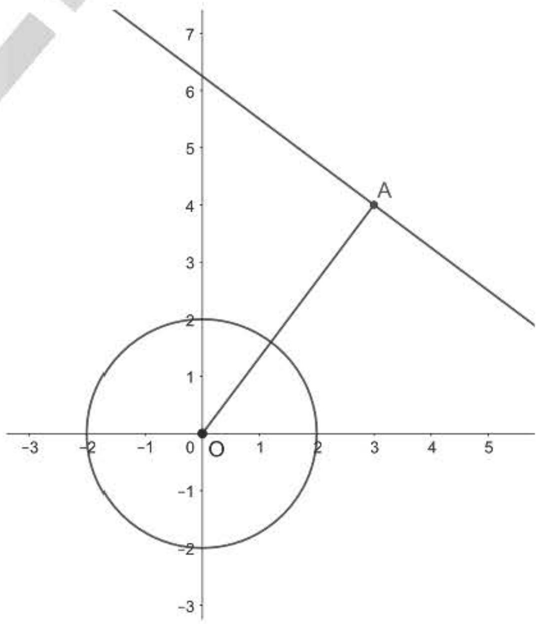
ii. Για να διέρχεται ο αγωγός από το κέντρο Ο θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση 3x+4y = 25, δηλαδή $3\cdot 0+4\cdot 0=0$, που δεν είναι ίσο με 25. Επομένως, ο αγωγός δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού.

iii. Για να έχουμε την ελάχιστη δυνατή απόσταση θα πρέπει να φέρουμε την κάθετη ΟΑ από το κέντρο Ο προς την ευθεία του αγωγού. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας του αγωγού είναι $\lambda_1 = -\frac{A}{B}=-\frac{3}{4}$. Για να είναι η ΑΟ κάθετη στον αγωγό πρέπει $\lambda_1\lambda_{AO}=-1$ ή $-\frac{3}{4}\lambda_{AO}=-1$ ή $\lambda_{AO}=\frac{4}{3}$. Η εξίσωση της ΑΟ θα είναι:

$y-y_O=\lambda_{AO}\left(x-x_O\right)$ ή $y-0=\frac{4}{3}(x-0)$ ή $y=\frac{4}{3}x$. Το σημείο Α είναι το σημείο τομής της ΑΟ και της ευθείας του αγωγού. Για να βρεθεί λύνουμε το σύστημά τους.

$$\begin{cases} 3x+4y=25 & (1) \\ y=\frac{4}{3}x & (2) \end{cases}$$

Η (1) γίνεται $3x+4\frac{4}{3}x=25$ ή 9x + 16x = 75 ή 25x = 75, δηλαδή x = 3. Η (2) γίνεται $y=\frac{4}{3}3=4$. Επομένως το σημείο Α είναι το (3,4).



β) Για να εφάπτεται ο δρόμος του κυκλικού σιντριβανιού πρέπει η απόσταση του κέντρου Ο από την ευθεία του δρόμου να ισούται με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή d(Ο,ε) = ρ.

d(O,ρ) = $\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|\lambda\cdot 0+0+\lambda-2|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 2$ ή $\frac{|\lambda-2|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 2$ ή $|\lambda-2| = 2\sqrt{\lambda^2+1}$

$|\lambda-2|^2 = \left(2\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2$ ή $\lambda^2-4\lambda+4 = 4\left(\lambda^2+1\right)$ ή $3\lambda^2+4\lambda=0$ ή λ(3λ+4) = 0.

Έχουμε λ = 0 που απορρίπτεται λόγω της υπόθεσης (λ $\neq$ 0) ή λ = - $\frac{4}{3}$.

ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\overrightarrow{AB} = (\lambda, \lambda + 1)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (3\lambda, \lambda - 1)$ και το σημείο Μ είναι το μέσο της ΒΓ με $\lambda \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM} = (2\lambda, \lambda)$ (Μονάδες 08)

β) Δίνεται επιπλέον ότι η γωνία $B\widehat{A}\Gamma = 90^o$.

i. Να υπολογίσετε το λ. (Μονάδες 08)

ii. Αν $\lambda = \frac{1}{2}$ και $A(2, \frac{3}{2})$ να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 09)

ΛΥΣΗ

α) Το διάνυσμα της διαμέσου $\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}=\frac{(\lambda,\lambda+1)+(3\lambda,\lambda-1)}{2}=$

$=\frac{(\lambda+3\lambda,\lambda+1+\lambda-1)}{2}=\frac{(4\lambda,2\lambda)}{2}=(2\lambda,\lambda)$.

β)

i. Αφού $B\widehat{A}\Gamma=90^{\circ}$ θα είναι $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$ ή $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0$ ή $(\lambda,\lambda+1)\cdot(3\lambda,\lambda-1)=0$

ή $3\lambda^2+(\lambda-1)(\lambda+1)=0$ ή $3\lambda^2+\lambda^2-1=0$ ή $4\lambda^2=1$ ή $\lambda=\pm\frac{1}{2}$.

ii. Ο ζητούμενος κύκλος διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου Α,Β,Γ. Επειδή όμως η εγγεγραμμένη γωνία $B\widehat{A}\Gamma=90^{\circ}$ η απέναντί πλευρά ΒΓ θα είναι διάμετρος του κύκλου. Το κέντρο του θα βρίσκεται στο μέσο Μ(x,y) της διαμέτρου ΒΓ.

Από το (α) ερώτημα έχουμε ότι $\overrightarrow{AM}=(2\lambda,\lambda)=\left(2\cdot\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(1,\frac{1}{2}\right)$ και $A\left(2,\frac{3}{2}\right)$.

Όμως $\overrightarrow{AM}=\left(x_M-x_A,y_M-y_A\right)$ ή $\left(1,\frac{1}{2}\right)=\left(x_M-2,y_M-\frac{3}{2}\right)$ ή $\begin{cases}x_M-2=1\\ y_M-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\end{cases}$

ή $\begin{cases}x_M=3\\ y_M=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2\end{cases}$. Επομένως το κέντρο Μ είναι το (3,2).

Η ακτίνα θα είναι η απόσταση (ΑΜ)=$\sqrt{\left(x_M-x_A\right)^2+\left(y_M-y_A\right)^2}=$

$\sqrt{(3-2)^2+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο $\left(x_0,y_0\right)$ και ακτίνα ρ δίνεται από την εξίσωση $\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=\rho^2$. Για κέντρο το (3,2) και ακτίνα $\frac{\sqrt{5}}{2}$ έχουμε

$\left(x-3\right)^2+\left(y-2\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$ ή $\left(x-3\right)^2+\left(y-2\right)^2=\frac{5}{4}$.

ΘΕΜΑ 4

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία M(x,y), A(-1,0), B(1,0) για τα οποία ισχύει

$\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 9|\overrightarrow{AB}|$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι ο κύκλος με εξίσωση

$x^2 + y^2 = 8$. (Μονάδες 10)

β) Έστω Γ και Δ δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε $\Gamma\Delta^2 = 32$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Γ και Δ και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία.

(Μονάδες 08)

ii. Αν το σημείο M κινείται στον κύκλο, να υπολογίσετε το $\overrightarrow{M\Gamma} \cdot \overrightarrow{M\Delta}$ (Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ

α) $\vec{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A) = (x-(-1), y-0) = (x+1, y)$. $|\vec{AM}| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$\vec{BM} = (x_M - x_B, y_M - y_B) = (x-1, y-0) = (x-1, y)$. $|\vec{BM}| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$

$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-(-1))^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2^2+0} = 2$.

$\vec{AM}^2 + \vec{BM}^2 = 9|\vec{AB}|$, άρα $|\vec{AM}|^2 + |\vec{BM}|^2 = 9 \cdot 2$ ή $\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)^2 = 18$ ή

$x^2+2x+1+y^2+x^2-2x+1+y^2=18$ ή $2x^2+2y^2+2=18$ ή $x^2+y^2=8$

β)

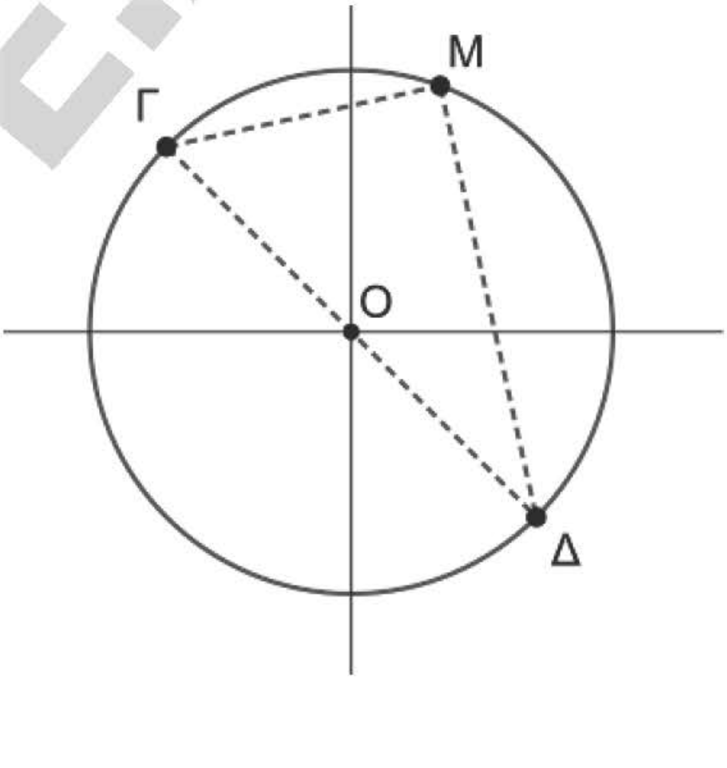
i. Για τα σημεία Γ και Δ του κύκλου ισχύει $\Gamma\Delta^2 = 32$

δηλαδή ΓΔ $= \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$.

Η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2+y^2=8$, οπότε η ακτίνα του ρ είναι ρ = $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ και το κέντρο του το O(0,0).

Παρατηρούμε ότι ΓΔ = 2ρ, οπότε τα σημεία Γ και Δ είναι αντιδιαμετρικά και επομένως η διάμετρος ΓΔ θα διέρχεται από το κέντρο O του κύκλου.

ii. Αφού η ΓΔ είναι διάμετρος και το σημείο M είναι σημείο του κύκλου, τότε η γωνία $\Gamma\widehat{M}\Delta = 90^\circ$ γιατί είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Επειδή τα διανύσματα $\vec{M\Gamma}$ και $\vec{M\Delta}$ είναι κάθετα, το εσωτερικό τους γινόμενο θα ισούται με μηδέν.



ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε την ευθεία ε: $3x - 4y = 0$ και το σημείο Α(-2,1).

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία είναι 2. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (η) κάθετης στην (ε) που διέρχεται από το σημείο Α.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Α και εφάπτεται στην ευθεία (ε). (Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ

α) Η απόσταση του σημείου (x_o, y_o) από την ευθεία Αx + Βy + Γ = 0 δίνεται από τον τύπο:

$d = \frac{|Ax_o + By_o + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Επομένως έχουμε $d(A,\varepsilon) = \frac{|3\cdot(-2) - 4\cdot 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$

β) Η ζητούμενη ευθεία (η) είναι κάθετη στην (ε), οπότε το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης της (η) και της (ε) θα είναι -1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι $\lambda_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$.

Επομένως ο συντελεστής διεύθυνσης της ζητούμενης ευθείας (η) θα είναι $-\frac{4}{3}$.

Η ευθεία διέρχεται από το Α(-2,1), οπότε η εξίσωση θα είναι $y - y_o = \lambda(x - x_o)$ ή $y - 1 = -\frac{4}{3}(x+2)$

ή $y = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{3} + 1$ ή $y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$.

γ) Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο (x_o, y_o) και ακτίνα ρ δίνεται από την εξίσωση $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = \rho^2$ (1). Για να εφάπτεται ο κύκλος στην ευθεία (ε), θα πρέπει η απόσταση του κέντρου του Α από την (ε) να ισούται με την ακτίνα ρ. Στο ερώτημα (α) βρήκαμε ότι η απόσταση του Α από την (ε) είναι 2, επομένως ρ = 2 και η (1) γίνεται

$(x - (-2))^2 + (y-1)^2 = 2^2$ ή $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$.

ΘΕΜΑ 4

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο Ο(0,0) θεωρούμε τους κύκλους (Κ, R) και (Λ, ρ) με εξισώσεις

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0 \quad (2)$$

αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου.

(Μονάδες 08)

γ) Έστω Μ, Ν τυχαία σημεία των κύκλων (Κ, R) και (Λ, ρ) αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση των σημείων Μ και Ν.

(Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, με $A = -6$, $B = -8$, $\Gamma = 21$ και $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 36 + 64 - 84 = 16 > 0$.

Επομένως, το κέντρο Κ του κύκλου είναι

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = (3,4)$$

και η ακτίνα του ισούται με

$$R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$$

Η εξίσωση (2) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, με $A = 2$, $B = -2$, $\Gamma = 1$ και $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4 + 4 - 4 = 4 > 0$.

Επομένως, το κέντρο Λ του κύκλου είναι

$$\Lambda\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = (-1,1)$$

και η ακτίνα του ισούται με

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

β) Η απόσταση των κέντρων των δύο κύκλων είναι

$$(K\Lambda) = \sqrt{(x_\Lambda - x_K)^2 + \left(y_\Lambda - y_K\right)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Επίσης, $R + \rho = 3$.

Αφού $(K\Lambda) > R + \rho$, συμπεραίνουμε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου.

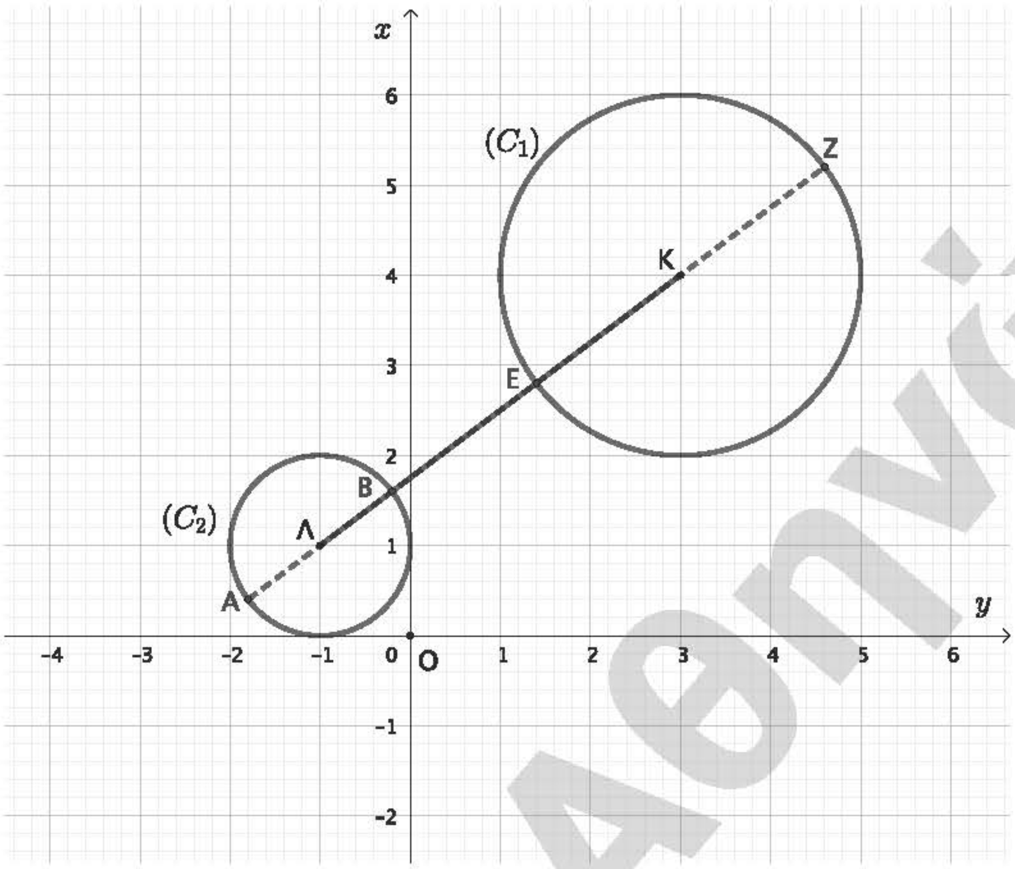
γ) Φέρουμε τη διακεντρική ευθεία ΚΛ, η οποία τέμνει τον κύκλο (Κ, R) στα σημεία Ε και Ζ και τον κύκλο (Λ, ρ) στα σημεία Α και Β, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Η ελάχιστη απόσταση του τυχαίου σημείου Μ του κύκλου (Κ, R) από το τυχαίο σημείο Ν του κύκλου (Λ, ρ) ισούται με (ΒΕ), οπότε:

$$(BE) = (K\Lambda) - (EK) - (\Lambda B) = (K\Lambda) - R - \rho = 5 - 2 - 1 = 2$$

Η μέγιστη απόσταση του τυχαίου σημείου Μ του κύκλου (Κ, R) από το τυχαίο σημείο Ν του κύκλου (Λ, ρ) ισούται με (ΑΖ), οπότε:

$$(AZ) = (K\Lambda) + (A\Lambda) + (KZ) = (K\Lambda) + R + \rho = 5 + 2 + 1 = 8$$



x
y
(C_1)
(C_2)
Z
K
E
B
Λ
A
O

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση

$$(y-1)^2 = (3+x)(1-x) \quad (1)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R=2$.

(Μονάδες 9)

β) Η αρχή $O(0,0)$ των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (K,R).

(Μονάδες 7)

γ) Η ευθεία (ε): $x+y=2$ είναι τέμνουσα του κύκλου (K,R).

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) γράφεται διαδοχικά:

$$(y-1)^2=(3+x)(1-x)$$
$$(y-1)^2=3-3x+x-x^2$$
$$(y-1)^2=3-2x-x^2$$
$$(x^2+2x+1)+(y-1)^2=4$$
$$(x+1)^2+(y-1)^2=4$$

Άρα, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R=2$.

β) Υπολογίζουμε την απόσταση ΟΚ της αρχής $O(0,0)$ των αξόνων από το κέντρο $K(-1,1)$ του κύκλου. Είναι:

$$OK=\sqrt{(x_K-x_O)^2+(y_K-y_O)^2}=\sqrt{(-1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}<R=2$$

Άρα, η αρχή Ο των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (K,R).

γ) Υπολογίζουμε την απόσταση του κέντρου Κ του κύκλου από την ευθεία (ε) με εξίσωση $x+y-2=0$. Είναι:

$$d(K,\varepsilon)=\frac{|-1+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}<\ R=2$$

Άρα, η ευθεία (ε) είναι τέμνουσα του κύκλου (K,R).

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + \lambda y + \lambda - 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση (1), ο οποίος εφάπτεται της ευθείας ε: $x + y + 2 = 0$. (Μονάδες 9)

γ) Για $\lambda = 1$, στον κύκλο που προκύπτει από την εξίσωση (1), να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του, που διέρχονται από το σημείο $M(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε την εξίσωση $x^2 + y^2 + λx + λy + λ - 1 = 0$ (1), $λ \in \mathbb{R}$, για την οποία:

$A = λ$, $B = λ$ και $Γ = λ - 1$, οπότε $A^2 + B^2 - 4Γ = λ^2 + λ^2 - 4(λ - 1) = 2λ^2 - 4λ + 4 =$

$2(λ^2 - 2λ + 2) > 0$ για κάθε $λ \in \mathbb{R}$, εφόσον η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $Δ = -4 < 0$.

Άρα η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $λ \in \mathbb{R}$.

β) Το κέντρο και η ακτίνα των κύκλων που ορίζονται από την (1), συναρτήσει του $λ \in \mathbb{R}$

είναι το $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}) = (-\frac{λ}{2}, -\frac{λ}{2})$ και η

$ρ = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4Γ} = \frac{1}{2}\sqrt{2(λ^2 - 2λ + 2)} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{λ^2 - 2λ + 2}$ αντίστοιχα.

Για να εφάπτεται ο κύκλος που ορίζεται από την (1), της ευθείας ε: $x + y + 2 = 0$, θα πρέπει $d(K, ε) = ρ$ (2).

Είναι: $d(K, ε) = \frac{|-\frac{λ}{2} - \frac{λ}{2} + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-λ + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|2 - λ|}{\sqrt{2}}$, οπότε από τη (2), ισοδύναμα παίρνουμε:

$\frac{|2-λ|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{λ^2 - 2λ + 2} \Leftrightarrow |2 - λ| = \sqrt{λ^2 - 2λ + 2}$ και υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο οπότε:

$|2 - λ|^2 = \sqrt{λ^2 - 2λ + 2}^{\,2} \Leftrightarrow (2 - λ)^2 = λ^2 - 2λ + 2 \Leftrightarrow 4 - 4λ + λ^2 = λ^2 - 2λ + 2 \Leftrightarrow$

$2λ = 2 \Leftrightarrow λ = 1$ η λύση, που επαληθεύει την αρχική εξίσωση επομένως είναι δεκτή.

Για $λ = 1$, το κέντρο του εφαπτόμενου κύκλου στην ε είναι το $K(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

και ακτίνα η $ρ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

γ) Για $λ = 1$, από την εξίσωση (1) παίρνουμε τον κύκλο C: $x^2 + y^2 + x + y = 0$, που λόγω του ερωτήματος (β) έχει κέντρο το $K(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ και ακτίνα $ρ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Από το σημείο $M(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ διέρχονται οι ευθείες ζ: $y - y_M = κ(x - x_M)$ με $κ \in \mathbb{R}$ ή

ζ: $y + \frac{1}{2} = κ(x + \frac{3}{2})$ ή ζ: $2κx - 2y + 3κ - 1 = 0$ με $κ \in \mathbb{R}$.

Η ευθεία ζ εφάπτεται του κύκλου C $\Leftrightarrow d(K, ζ) = ρ \Leftrightarrow d(K, ζ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (3).

Όμως d(K, ζ) = $\dfrac{|2\kappa(-\frac{1}{2})-2(-\frac{1}{2})+3\kappa-1|}{\sqrt{(2\kappa)^2+(-2)^2}}$ = $\dfrac{|-\kappa+1+3\kappa-1|}{\sqrt{2}}$ = $\dfrac{|2\kappa|}{\sqrt{4\kappa^2+4}}$ = $\dfrac{2|\kappa|}{2\sqrt{\kappa^2+1}}$ =

$\dfrac{|\kappa|}{\sqrt{\kappa^2+1}}$, οπότε από τη (2), ισοδύναμα παίρνουμε:

$\dfrac{|\kappa|}{\sqrt{\kappa^2+1}}$ = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο οπότε:

$\dfrac{\kappa^2}{\kappa^2+1}$ = $\dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $2\kappa^2 = \kappa^2 + 1 \Leftrightarrow \kappa^2 = 1 \Leftrightarrow \kappa = -1$ ή $\kappa = 1$ οι λύσεις, που επαληθεύουν την αρχική εξίσωση επομένως είναι δεκτές.

Για κ = 1 από την εξίσωση της ζ προκύπτει η ζ_1: $2x - 2y + 2 = 0$ ή ζ_1: $x - y + 1 = 0$.

Για κ = -1 από την εξίσωση της ζ προκύπτει η ζ_2: $-2x - 2y - 4 = 0$

ή ζ_2: $x + y + 2 = 0$. Οι ζ_1, ζ_2 είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες του κύκλου C από το σημείο Μ. Παρατηρούμε ότι η ζ_2 είναι η ευθεία ε που δόθηκε στο ερώτημα (β), κάτι που ήταν αναμενόμενο εφόσον το σημείο Μ ανήκει στην ε (οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν).

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία Α(α, 0) και Β(0, β) με α, β > 0 και α + β =10 .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση των κύκλων με διάμετρο την ΑΒ, για κάθε τιμή των α και β είναι $x^2 + y^2 - \alpha x - (10 - \alpha)y = 0$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι με διάμετρο την ΑΒ, για τις διάφορες τιμές των α και β διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, την αρχή Ο των αξόνων και ένα σημείο Ρ του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων όλων των κύκλων με διάμετρο την ΑΒ για τις διάφορες τιμές των α και β. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Το κέντρο των κύκλων με διάμετρο την ΑΒ, είναι το μέσο της Μ, επομένως

$$M\left(\frac{\alpha+0}{2},\frac{\beta+0}{2}\right) \text{ ή } M\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)$$

και η ακτίνα τους είναι

$$\rho=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(0-\alpha)^2+(\beta-0)^2}}{2}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}.$$

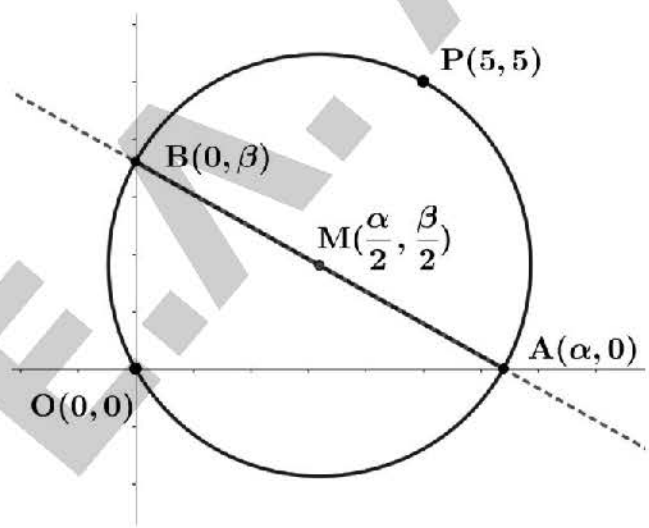
επομένως η εξίσωση των κύκλων είναι:

$$\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2-2\cdot x\cdot\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{4}+y^2-2y\frac{\beta}{2}+\frac{\beta^2}{4}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}\Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2-\alpha x-\beta y+\cancel{\frac{\alpha^2}{4}}+\cancel{\frac{\beta^2}{4}}=\cancel{\frac{\alpha^2}{4}}+\cancel{\frac{\beta^2}{4}}\Leftrightarrow x^2+y^2-\alpha x-\beta y=0. \quad (1)$$

Είναι όμως $\alpha+\beta=10$, τότε $\beta=10-\alpha$ και η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2+y^2-\alpha x-(10-\alpha)y=0.$$



β) Για α = 1 έχουμε τον κύκλο C_1 : $x^2+y^2-x-9y=0$. (1)

Για α = 9 έχουμε τον κύκλο C_2: $x^2+y^2-9x-y=0$. (2)

Θα βρούμε τα κοινά σημεία των δύο παραπάνω κύκλων, αν υπάρχουν.

Η αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις των παραπάνω κύκλων έχουμε:

$$8x-8y=0\Rightarrow x=y$$

τότε από την εξίσωση (2) έχουμε:

$$x^2 + x^2 - 9x - x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 5$$

Για x = 0 έχουμε y = 0 και για x = 5 έχουμε y = 5, άρα οι δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Ο (0,0) και Ρ(5,5).

Όλοι οι κύκλοι διέρχονται από το σημείο Ρ(5,5) αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση των κύκλων $x^2 + y^2 - \alpha x - (10-\alpha)y = 0$.
Πράγματι αντικαθιστώντας τις τιμές $x = 5$ και $y = 5$ έχουμε:

$$0^2 + 0^2 - \alpha \cdot 0 - (10-\alpha) \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Ομοίως, όλοι οι κύκλοι διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

γ) Έστω τυχαίο σημείο M(x, y) είναι σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου, αν και μόνο αν

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\alpha}{2} \\ y &= \frac{\beta}{2} \\ \alpha + \beta = 10&,\ \alpha > 0,\ \beta > 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \alpha &= 2x \\ \beta &= 2y \\ \alpha + \beta = 10&,\ \alpha > 0,\ \beta > 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow 2x + 2y = 10 \Leftrightarrow x + y = 5 .\ (\varepsilon)$$

Η παραπάνω ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία (5,0) και (0,5). Επειδή α, β > 0 έχουμε:

$$\alpha > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ και}$$

$$\beta > 0 \Leftrightarrow y > 0.$$

Συνεπώς ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, που ορίζεται από την ευθεία $x + y = 5$ με x > 0 και y > 0 εκτός από τα άκρα του Α(5,0) και Β(0,5).

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - x - y - \frac{7}{2} = 0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $R = 2$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ είναι σημείο του κύκλου (K,R).

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (K,R) στο A.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, με $A=-1$, $B=-1$, $\Gamma=-\dfrac{7}{2}$.

Είναι

$$A^2+B^2-4\Gamma=1+1+14=16>0$$

Επομένως, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο

$$K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

και η ακτίνα του ισούται με

$$R=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{16}}{2}=2$$

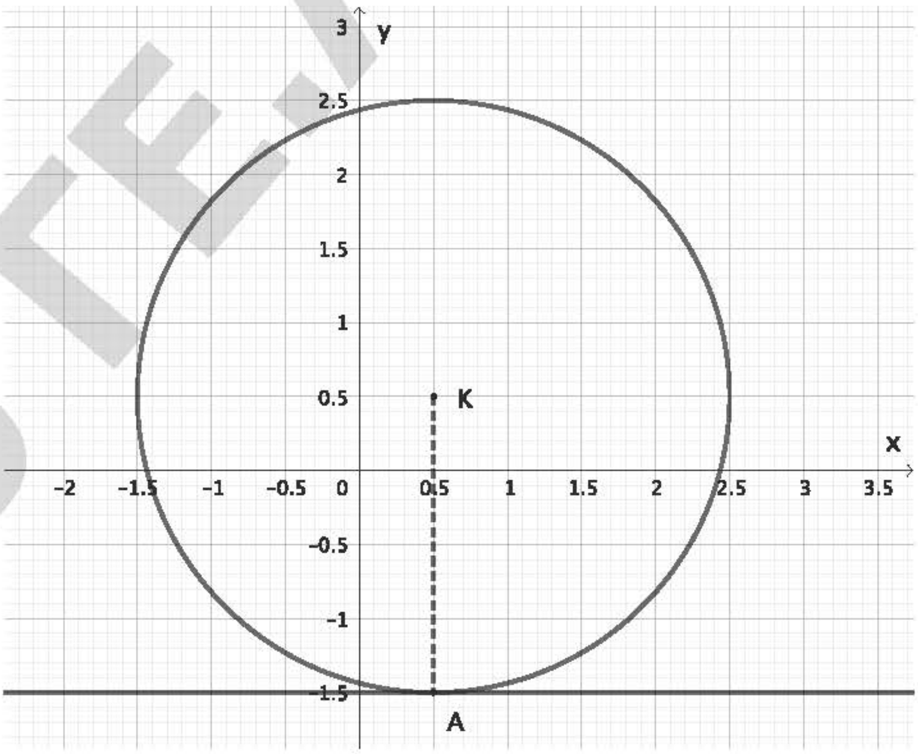
β) Οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{7}{2}=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}=\frac{10}{4}-\frac{5}{2}=0$$

Άρα, το σημείο Α είναι σημείο του κύκλου (K,R).

γ) Η εφαπτομένη του κύκλου (K,R) στο Α είναι κάθετη στην ακτίνα ΚΑ. Αφού είναι $x_K=x_A$, η ακτίνα ΚΑ είναι κάθετη στον άξονα x΄x, οπότε η εφαπτομένη του κύκλου στο Α θα είναι παράλληλη στον άξονα x΄x. Άρα, θα έχει εξίσωση

$$y=y_A \text{ ή } y=-\frac{3}{2}$$



ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία Α(0,3), Β(3,4) και Γ(1,0).

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το μέσο Κ της υποτείνουσας ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ότι: $\overrightarrow{AB}$ = (x_B-x_A, y_B-y_A) = (3-0 , 4-3) = (3 , 1),

$\overrightarrow{A\Gamma}$ = (x_Γ-x_A, y_Γ-y_A) = (1-0 , 0-3) = (1 , -3).

Οπότε $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 3 - 3 = 0$, άρα $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A\Gamma}$ ή $B\widehat{A}\Gamma = 90^o$.

β) Το σημείο Κ που είναι το μέσο του τμήματος ΒΓ θα έχει συντεταγμένες:

Κ $\left(\frac{x_B+x_\Gamma}{2}, \frac{y_B+y_\Gamma}{2}\right)$ ή Κ $\left(\frac{3+1}{2}, \frac{4+0}{2}\right)$ ή Κ(2 , 2).

γ) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι η γωνία $B\widehat{A}\Gamma$ είναι ορθή και τα σημεία Α, Β και Γ είναι σημεία του ζητούμενου κύκλου, άρα η γωνία $B\widehat{A}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο, συνεπώς η υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, θα είναι διάμετρος του κύκλου και ισούται με:

(ΒΓ) = $\sqrt{(x_\Gamma - x_B)^2 + (y_\Gamma - y_B)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Όμως ΒΓ = 2R, άρα 2R = $2\sqrt{5}$ ή R = $\sqrt{5}$.

Ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ θα έχει ακτίνα R και κέντρο το σημείο Κ του ερωτήματος β) και η εξίσωσή του θα είναι:

$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$.

ΘΕΜΑ 4

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο Ο θεωρούμε κύκλο (C) και ευθεία (ε) με εξισώσεις $x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0$ (1) και $4x + 3y - 10 = 0$ (2) αντίστοιχα.

α)

i. Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα R του κύκλου (C).

(Μονάδες 5)

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία.

(Μονάδες 4)

iii. Να προσδιορίσετε τα σημεία Α και Β στα οποία η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C).

(Μονάδες 5)

β) Αν είναι $A(1,2)$ και $B(4, -2)$, τότε:

i. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο ΑΒ διέρχεται από το σημείο Ο.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) i. Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, με $A = -9$, $B = -3$, $\Gamma = 10$ και $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 81 + 9 - 40 = 50 > 0$.

Επομένως, το κέντρο του κύκλου είναι

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

και η ακτίνα του

$$R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

<u>Εναλλακτική λύση (με συμπλήρωση τετραγώνου)</u>

Η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0$$

$$\left[x^2 - 2\cdot\frac{9}{2}x + \left(\frac{9}{2}\right)^2\right] + \left[y^2 - 2\cdot\frac{3}{2}y + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 10$$

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} + \frac{9}{4} - \frac{40}{4}$$

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{50}{4}$$

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

ii. Η απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία (ε) είναι

$$d(K,\varepsilon) = \frac{\left|4\cdot\frac{9}{2} + 3\cdot\frac{3}{2} - 10\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{\left|\frac{25}{2}\right|}{5} = \frac{5}{2} < \frac{5\sqrt{2}}{2} = R$$

Άρα, η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία Α και Β.

ii. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2). Η εξίσωση (1) γίνεται:

$$3y = 10 - 4x \Leftrightarrow y = \frac{10 - 4x}{3}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1), οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$x^2 + \left(\frac{10 - 4x}{3}\right)^2 - 9x - 3\left(\frac{10 - 4x}{3}\right) + 10 = 0$$

$$x^2 + \frac{(10 - 4x)^2}{9} - 9x - (10 - 4x) + 10 = 0$$

$$x^2 + \frac{(10 - 4x)^2}{9} - 9x + 4x = 0$$

$$x^2 + \frac{(10-4x)^2}{9} - 5x = 0$$

$$9x^2 + \left(100 - 80x + 16x^2\right) - 45x = 0$$

$$25x^2 - 125x + 100 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad (3)$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (3) είναι $x = 1$, $x = 4$.

Για $x = 1$ είναι $y = 2$.

Για $x = 4$ είναι $y = -2$.

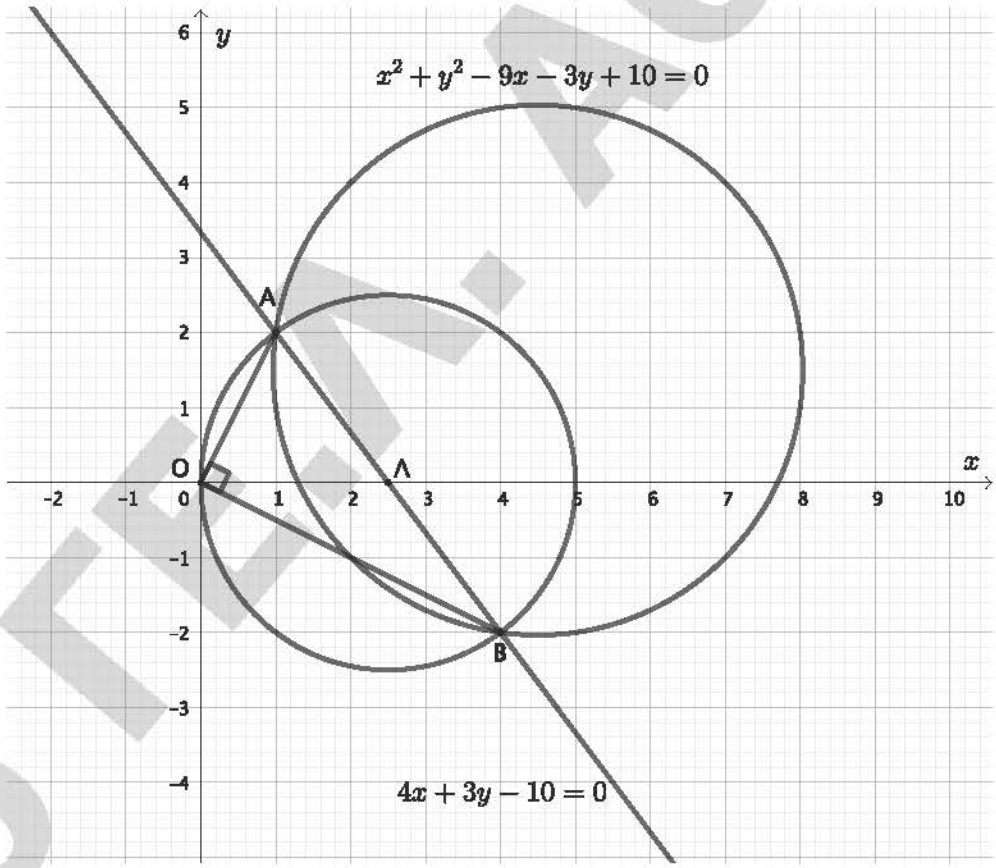
Άρα, τα σημεία τομής της ευθείας (ε) και του κύκλου (C) είναι $A(1,2)$ και $B(4,-2)$.

β) i. Είναι: $\overrightarrow{OA} = \left(x_A - x_O, y_A - y_O\right) = (1,2)$

$\overrightarrow{OB} = \left(x_B - x_O, y_B - y_O\right) = (4,-2)$

Οπότε: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) = 0$

ii.



Αφού είναι $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, η γωνία $A\hat{O}B$ θα είναι ορθή. Επομένως, ο κύκλος με διάμετρο AB είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του ορθογωνίου τριγώνου OAB. Συνεπώς, διέρχεται από το σημείο O.

ΘΕΜΑ 4

Σε μια σύγχρονη πόλη, κατασκευάζεται σιδηροδρομικό δίκτυο που περιλαμβάνει:

- τη γραμμή $γ_1$, κάθε σημείο της οποίας στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι της μορφής: $A(λ-1,\ 2λ+1)$, $λ \in R$.
- τη γραμμή $γ_2$, που περνάει από το σταθμό $Σ(-4,\ 2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (-1,\ 3)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι γραμμές $γ_1$ και $γ_2$. (Μονάδες 10)

β) Η είσοδος του αθλητικού σταδίου μιας συνοικίας θα βρίσκεται στο σημείο $K(1,\ 1)$ του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Οι κατασκευαστές θέλουν να συνδέσουν την είσοδο του σταδίου απ' ευθείας με κάθετο δρόμο, με μια από τις γραμμές $γ_1$ και $γ_2$. Να βρείτε με ποια από τις δύο γραμμές είναι πιο συμφέρουσα η σύνδεση. Δίνεται ότι το κόστος σύνδεσης ανά μονάδα μήκους, είναι το ίδιο και για τις δύο γραμμές. (Μονάδες 9)

γ) Γύρω από το στάδιο θα δημιουργηθεί κυκλικό πάρκο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που θα ορίζει το πάρκο, αν το κέντρο του είναι το σημείο Κ και επιπλέον ο κύκλος αυτός εφάπτεται της γραμμής $γ_1$. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε Α(λ-1, 2λ+1), $\lambda \in R$, οπότε αν Α(x, y) τότε:

$$\begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = 2\lambda + 1 \\ \lambda \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x + 1 \\ y = 2(x+1) + 1 \\ \lambda \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ \lambda = x + 1 \\ \lambda \in R \end{cases}$$, οπότε γ_1: 2x – y + 3 = 0,

η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκετε η γραμμή γ_1.

Επίσης ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{u}$ = (-1, 3) είναι:

$\lambda = \frac{y}{x} = \frac{3}{-1} = -3 = \lambda_{\gamma_2}$, οπότε

γ_2: $y - y_\Sigma = \lambda_{\gamma_2}(x - x_\Sigma)$ ή γ_2: y - 2 = -3(x + 4) ή γ_2: y - 2 = -3x – 12 ή γ_2: 3x + y + 10 = 0,

η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκετε η γραμμή γ_2.

β) Είναι Κ(1, 1), οπότε λόγω του ερωτήματος (α) είναι:

$d(K, \gamma_1) = \frac{|2\cdot 1 - 1\cdot 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|4|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ και

$d(K, \gamma_2) = \frac{|3\cdot 1 + 1\cdot 1 + 10|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|14|}{\sqrt{10}} = \frac{14}{\sqrt{10}} = \frac{14\sqrt{10}}{10} = \frac{7\sqrt{10}}{5}$.

Εφόσον $\frac{4\sqrt{5}}{5} < \frac{7\sqrt{10}}{5} \Leftrightarrow d(K, \gamma_1) < d(K, \gamma_2)$, προφανώς συμφέρει η σύνδεση του σταδίου με τη γραμμή γ_1.

γ) Το κέντρο του ζητούμενου κύκλου που ορίζει το κυκλικό πάρκο γύρω από το στάδιο, είναι το σημείο Κ(1, 1). Εφόσον ο κύκλος αυτός εφάπτεται στη γραμμή γ_1, η ακτίνα του λόγω του ερωτήματος (β), είναι $\rho = d(K, \gamma_1) = \frac{4}{\sqrt{5}}$. Επομένως:

C: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = (\frac{4}{\sqrt{5}})^2$ ή C: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{16}{5}$, είναι η εξίσωσή του.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x(x-4)+y(y-2)=2(x+y-4)$ (1) .

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3,2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

(Μονάδες 6)

β) Δίνονται τα σημεία $A(4,4)$ και $B(2,0)$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο ΑΒ. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η ευθεία (η) με εξίσωση $y=\lambda x+4$ να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία Γ και Δ ώστε $(\Gamma\Delta)=\sqrt{20}$. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Η δοθείσα γράφεται $x^2-4x+y^2-2y=2x+2y-8 \Leftrightarrow x^2-6x+y^2-4y=-8 \Leftrightarrow$

$x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2+y^2-2\cdot 2\cdot y+2^2=3^2+2^2-8 \Leftrightarrow$

$(x-3)^2+(y-2)^2=5 (1)$.

Άρα η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3,2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

β)

i. Η (1) για $x=4$ και $y=4$ δίνει $(4-3)^2+(4-2)^2=5 \Leftrightarrow 1^2+2^2=5$ που ισχύει. Επίσης η

(1) για $x=2$ και $y=0$ δίνει $(2-3)^2+(0-2)^2=5 \Leftrightarrow 1^2+2^2=5$ που ισχύει.

Συνεπώς τα σημεία Α και Β είναι πάνω στον κύκλο. Για να είναι αντιδιαμετρικά αρκεί το κέντρο Κ να είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ. Πράγματι $x_K=\dfrac{x_A+x_B}{2} \Leftrightarrow 3=\dfrac{4+2}{2} \Leftrightarrow 3=3$ ισχύει και $y_K=\dfrac{y_A+y_B}{2} \Leftrightarrow 2=\dfrac{4+0}{2} \Leftrightarrow 2=2$ ισχύει.

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της διαμέτρου ΑΒ είναι $\lambda=\dfrac{0-4}{2-4}=2$.

Άρα και οι ζητούμενες εφαπτόμενες έχουν κλίση 2.

Έστω ε: $y=2x+\beta \Leftrightarrow 2x-y+\beta=0$ η εξίσωση της εφαπτόμενης του κύκλου .

Για να εφάπτεται στον κύκλο αρκεί $d(K,\varepsilon)=\rho \Rightarrow \dfrac{|2\cdot 3-2+\beta|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5} \Rightarrow |\beta+4|=5$, οπότε

β + 4 = 5 ή β + 4 = -5 δηλαδή β = 1 ή β = - 9. Επομένως οι εφαπτόμενες του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο ΑΒ έχουν εξισώσεις ε_1: y = 2x + 1 και ε_2: y = 2x - 9.

γ) Ισχύει $(\Gamma\Delta)=\sqrt{20}=2\sqrt{5}=2\rho$. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία Γ και Δ είναι αντιδιαμετρικά δηλαδή η ευθεία (η) πρέπει να διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου. Άρα αντικαθιστώντας στην εξίσωση της (η) τις συντεταγμένες του κέντρου $x=3$ και $y=2$ έχουμε : $2=3\lambda+4 \Rightarrow \lambda=-\dfrac{2}{3}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 4\alpha x - 4\alpha y = 0 \qquad (1)$$

όπου α είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε το κέντρο K και την ακτίνα R των κύκλων ως συνάρτηση του α.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του α του ερωτήματος (α).

(Μονάδες 5)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται στον άξονα x΄x.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

με $A = -4\alpha$, $B = -4\alpha$ και $\Gamma = 0$.

Για να παριστάνει κύκλο θα πρέπει $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$. Είναι:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16\alpha^2 + 16\alpha^2 = 32\alpha^2$$

Επομένως, θα πρέπει

$$\alpha^2 > 0$$

Η τελευταία σχέση ικανοποιείται αν και μόνο αν $\alpha \neq 0$.

β) Τα κέντρα των κύκλων που παριστάνει η εξίσωση (1) για $\alpha \neq 0$, είναι

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = (2\alpha, 2\alpha)$$

και η ακτίνα

$$R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{32\alpha^2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}|\alpha|}{2} = 2\sqrt{2}|\alpha|$$

γ) Για τα κέντρα των κύκλων έχουμε:

$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 2\alpha \\ \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Επομένως, τα κέντρα των κύκλων κινούνται πάνω στην ευθεία $y = x$ με εξαίρεση το σημείο $O(0,0)$, αφού είναι $x \neq 0$ και $y \neq 0$.

δ) Για να εφάπτεται κάποιος από τους κύκλους που ορίζονται από την εξίσωση (1) στον άξονα x΄x, θα πρέπει να ισχύει:

$$|y_K| = R$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$|2\alpha| = 2\sqrt{2}|\alpha| \quad \acute{\eta} \quad |\alpha| = \sqrt{2}|\alpha| \quad \acute{\eta} \quad |\alpha|(1 - \sqrt{2}) = 0 \quad \acute{\eta} \quad \alpha = 0$$

Όμως, $\alpha \neq 0$, οπότε δεν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται του άξονα x΄x.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(3,-3), Β(2,-8) και Γ(7,-3). Να βρείτε:

α) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 10)

β) την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το Α και εφάπτεται στην πλευρά ΒΓ.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: ΒΓ: $y - y_Γ = \frac{y_B - y_Γ}{x_B - x_Γ}(x - x_Γ)$ ή ΒΓ: $y + 3 = \frac{-8+3}{2-7}(x - 7)$ ή ΒΓ: $y + 3 = \frac{-5}{-5}(x - 7)$

ή ΒΓ: $y + 3 = x - 7$ ή ΒΓ: $x - y - 10 = 0$.

β) Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι

$ρ = d(A, BΓ) = \frac{|1 \cdot 3 - 1 \cdot (-3) - 10|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$,

οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι:

C: $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = ρ^2$ ή C: $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = (2\sqrt{2})^2$ ή C: $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 8$.

ΘΕΜΑ 4

Τα σημεία Α(-7, -1) και Β(3, -5) είναι σημεία ενός κύκλου C κέντρου Κ. Το σημείο Μ είναι το μέσο της χορδής ΑΒ και μία ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία Κ και Μ.

α) Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του σημείου Μ. (Μονάδες 04)

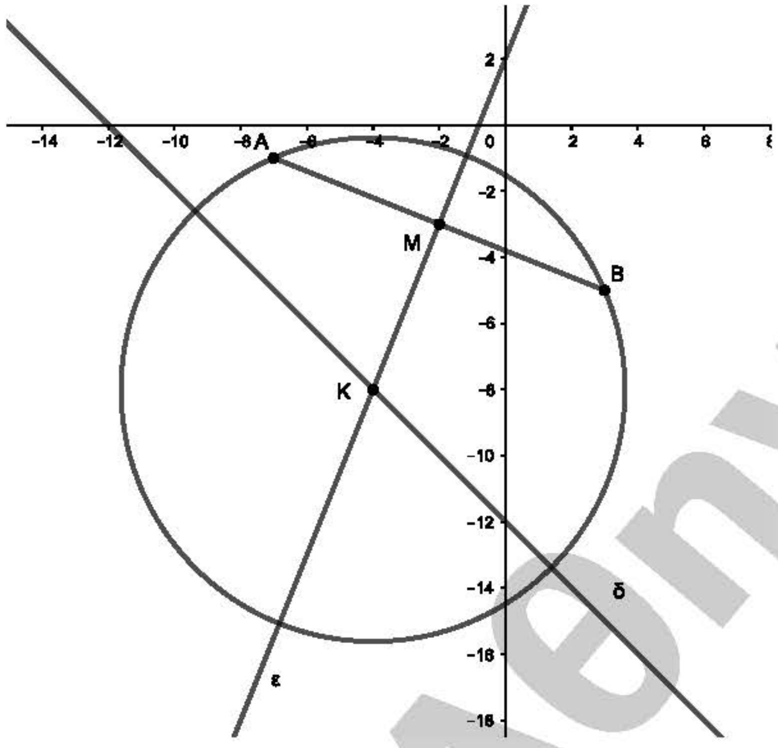
ii. Την εξίσωση της ευθείας ΚΜ. (Μονάδες 08)

β) Αν από το κέντρο Κ του κύκλου διέρχεται η ευθεία (δ): x+y= -12, τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Κ. (Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C. (Μονάδες 06)

ΛΥΣΗ



α)

i. Το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες $M\left(\frac{7+3}{2}, \frac{1-5}{2}\right)$ = (-2, -3).

ii. Το τμήμα ΚΜ ενώνει το κέντρο του κύκλου με το μέσο Μ της χορδής ΑΒ, οπότε είναι το απόστημα της χορδής και ΚΜ⊥ΑΒ. Οπότε $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{KM} = -1$.

Είναι $\lambda_{AB} = \frac{5+1}{3+7} = -\frac{2}{5}$, επομένως $\lambda_{KM} = \frac{5}{2}$. Η εξίσωση της ευθείας ΚΜ είναι

(ΚΜ): $y - y_M = \frac{5}{2}(x - x_M) \Leftrightarrow y + 3 = \frac{5}{2}(x + 2) \Leftrightarrow 2y + 6 = 5x + 10 \Leftrightarrow 5x - 2y + 4 = 0$

β)

i. Το κέντρο Κ του κύκλου ανήκει στην ευθεία δ και στην ευθεία ΚΜ. Άρα η τομή των δύο ευθειών, δηλαδή η λύση του συστήματος των δύο εξισώσεών τους, θα είναι οι συντεταγμένες του σημείου Κ.

(Σ) $\begin{cases} 5x - 2y = -4 \\ x + y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2y = -4 \\ 2x + 2y = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = -28 \\ x + y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -8 \end{cases}$

Άρα Κ(-4, -8).

ii. Αρκεί να βρούμε την ακτίνα του κύκλου που είναι το μήκος του τμήματος ΚΑ. (ΚΑ) = $\sqrt{(-4+7)^2 + (-8+1)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$.

Η εξίσωση του κύκλου είναι C: $(x+4)^2 + (y+8)^2 = 58$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2+y^2=25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

α) τον κύκλο C.

(Μονάδες 9)

β) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον yy' και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

(Μονάδες 8)

γ) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον xx' και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

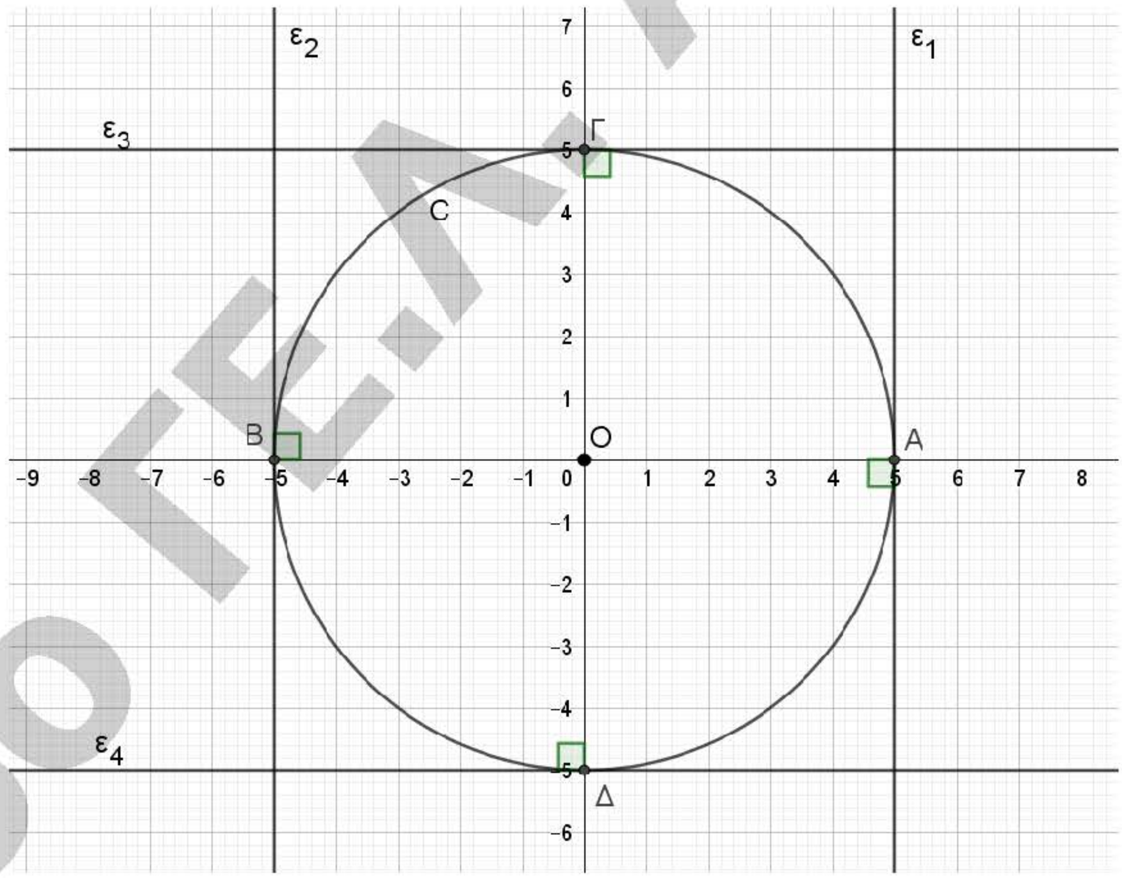
(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, έχει κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=5$. Τα σημεία τομής με τον άξονα xx' είναι τα σημεία $A(5,0)$ και $B(-5,0)$ ενώ τα σημεία τομής με τον άξονα yy' είναι τα σημεία $\Gamma(0,5)$ και $\Delta(0,-5)$.

β) Αναζητούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία $\Gamma(0,5)$ και $\Delta(0,-5)$. Οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες στον yy' οπότε παράλληλες στον xx' και διέρχονται από τα σημεία $\Gamma(0,5)$ και $\Delta(0,-5)$, άρα έχουν εξισώσεις $y=5$ και $y=-5$ αντίστοιχα. Είναι οι ευθείες $\varepsilon_3,\varepsilon_4$ που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

γ) Αναζητούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία $A(5,0)$ και $B(-5,0)$. Οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες στον xx' οπότε παράλληλες στον yy' και διέρχονται από τα σημεία $A(5,0)$ και $B(-5,0)$, άρα έχουν εξισώσεις $x=5$ και $x=-5$ αντίστοιχα. Είναι οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(-2,0)$ και $B(2,-2)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C με διάμετρο AB έχει εξίσωση $C: x^2+(y+1)^2=5$.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία $(AMB)=5$ ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1: x+2y-3=0$ και $\varepsilon_2: x+2y+7=0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 εφάπτονται του κύκλου C.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Το μέσο K του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $\left(\frac{-2+2}{2},\frac{0-2}{2}\right)$ δηλαδή $(0,-1)$.

Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\left(2-(-2)\right)^2+(-2-0)^2} = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

β) Ο κύκλος C με διάμετρο AB έχει κέντρο $K(0,-1)$ και ακτίνα $\rho = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = \sqrt{5}$. Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$C: x^2+(y+1)^2 = 5.$$

γ) Έστω $M(x,y)$. Τότε $(ABM) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)\right|$ με $\overrightarrow{AM} = (x+2,y)$ και $\overrightarrow{AB} = (4,-2)$

Οπότε:

$$\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)\right| = 5 \Leftrightarrow \left|\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ x+2 & y \end{vmatrix}\right| = 10 \Leftrightarrow$$

$$|4y+2(x+2)| = 10 \begin{cases} 4y+2x+4=10 \\ \text{ή} \\ 4y+2x+4=-10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+4y-6=0 \\ \text{ή} \\ 2x+4y+14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3=0 \\ \text{ή} \\ x+2y+7=0 \end{cases}$$

δ) Για να εφάπτονται οι ε_1 και ε_2 στο κύκλο C πρέπει $d(K,\varepsilon_1) = d(K,\varepsilon_2) = \sqrt{5}$.

Είναι

$$d(K,\varepsilon_1) = \frac{|0+2(-1)-3|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

και

$$d(K,\varepsilon_1) = \frac{|0+2(-1)+7|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - (\lambda + 8)x + \lambda y + 7 = 0$ (1), με $\lambda \in \mathbf{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathfrak{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων αυτών. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathfrak{R}$, όλοι οι παραπάνω κύκλοι, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρεθούν. (Μονάδες 7)

δ) Θεωρούμε τον κύκλο που ορίζεται από την (1) για $\lambda=0$. Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου αυτού, που απέχουν από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε την εξίσωση $x^2 + y^2 - (\lambda + 8)x + \lambda y + 7 = 0$ (1), με $\lambda \in \mathbb{R}$, για την οποία:

$A = -(\lambda+8)$, $B = \lambda$ και $\Gamma = 7$, οπότε $A^2 + B^2 - 4\Gamma = [-(\lambda+8)]^2 + \lambda^2 - 4\cdot 7 = (\lambda+8)^2 + \lambda^2 - 28 =$

$\lambda^2 + 16\lambda + 64 + \lambda^2 - 28 = 2\lambda^2 + 16\lambda + 36 = 2(\lambda^2 + 8\lambda + 18) > 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,

εφόσον η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = -8 < 0$.

Άρα η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Επίσης το κέντρο των κύκλων που ορίζονται από την (1) είναι το

$K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}) = (-\frac{-(\lambda+8)}{2}, -\frac{\lambda}{2}) = (\frac{\lambda+8}{2}, -\frac{\lambda}{2})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και ακτίνα η

$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{2(\lambda^2 + 8\lambda + 18)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Λόγω του ερωτήματος (α), τα κέντρα των κύκλων που εκφράζει η εξίσωση (1) είναι

τα $K(\frac{\lambda+8}{2}, -\frac{\lambda}{2})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν $K(x, y)$, τότε:

$\begin{cases} x = \frac{\lambda+8}{2} \\ y = -\frac{\lambda}{2} \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2y+8}{2} \\ \lambda = -2y \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + 4 \\ \lambda = -2y \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ \lambda = -2y \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$. Άρα τα κέντρα των κύκλων της εξίσωσης (1), κινούνται στην ευθεία ε: $x + y - 4 = 0$.

γ) Η εξίσωση (1) για κάθε $\lambda \in \Re$ γράφεται:

$x^2 + y^2 - \lambda x - 8x + \lambda y + 7 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 8x + 7) + \lambda(y - x) = 0$, οπότε:

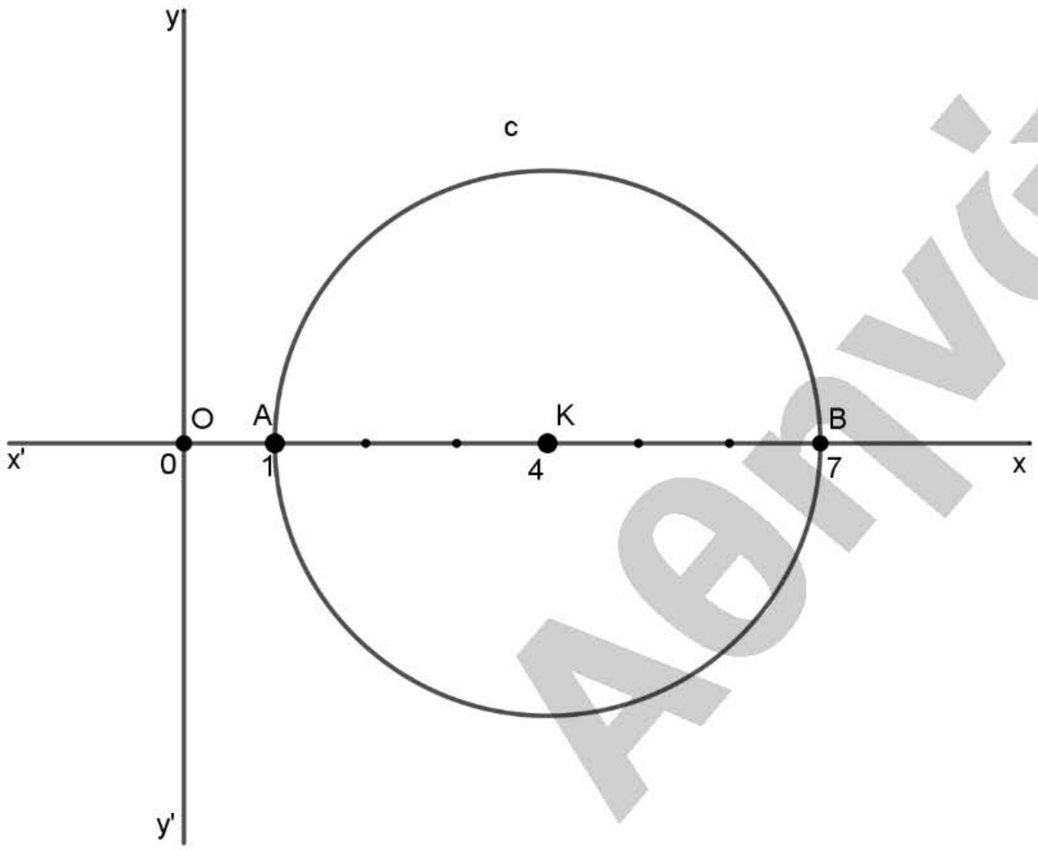
$\begin{cases} y - x = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + x^2 - 8x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x^2 - 8x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = x \\ x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, άρα $x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} = y$ ή $x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = y$.

Επομένως για κάθε $\lambda \in \Re$, όλοι οι κύκλοι (1), διέρχονται από τα σταθερά σημεία

$M(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ και $N(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{2}}{2})$.

δ) Λόγω του ερωτήματος (α), για $\lambda = 0$ η εξίσωση (1), εκφράζει κύκλο με κέντρο το $K(4, 0)$ και ακτίνα $\rho = 3$. Ο κύκλος αυτός φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σημεία του κύκλου που απέχουν την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων βρίσκονται πάνω στην ΟΚ. Οπότε το σημείο του που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το $O(0, 0)$, είναι το $A(1, 0)$ και το σημείο του που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση είναι το $B(7, 0)$.


y
c
O
A
K
B
x'
0
1
4
7
x
y'

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 5.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C και να τον σχεδιάσετε στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται το σημείο $A(3, -4)$.

i. Να αποδείξετε ότι το σημείο A ανήκει στον κύκλο C.

(Μονάδες 05)

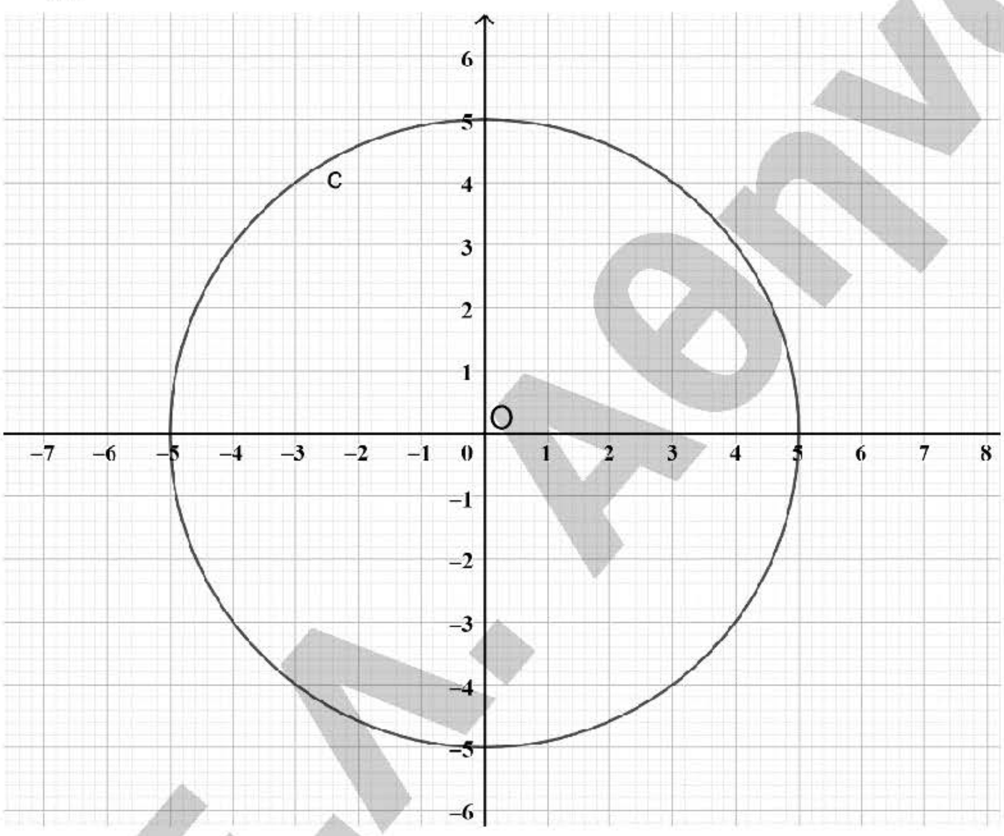
ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο A.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων, δηλαδή το $(0,0)$ και ακτίνα 5 είναι $C: x^2 + y^2 = 25$.

Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και με τη βοήθεια του διαβήτη κατασκευάζουμε κύκλο με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα ίση με την απόσταση του O από το σημείο $(5,0)$. Προκύπτει το παρακάτω σχήμα:



β) i. Το σημείο $A\,(3,-4)$ επαληθεύει την εξίσωση του κύκλου C, δηλαδή

$3^2 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25.$

Επίσης, από το σχήμα που κάναμε στο α) ερώτημα φαίνεται ότι το σημείο $A(3,-4)$ ανήκει στον κύκλο C.

ii. Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $A(x_1, y_1)$ του κύκλου της μορφής $x^2 + y^2 = \rho^2$ δίνεται από το τύπο $x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = \rho^2$.

Άρα, η εξίσωση εφαπτομένης στο $A(3,-4)$ του κύκλου C είναι $\varepsilon: 3x - 4y = 25$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(x-3\lambda)^2+(y+2\lambda)^2=1$ (1) όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x+3y=0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) ανήκουν στην ευθεία ε.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ που απέχουν μεταξύ τους 2 μονάδες και έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία ε.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Η (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $\mathrm{K}(3\lambda,-2\lambda)$ που ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 2x+3y=0$, αφού $2\cdot 3\lambda+3(-2\lambda)=6\lambda-6\lambda=0$.

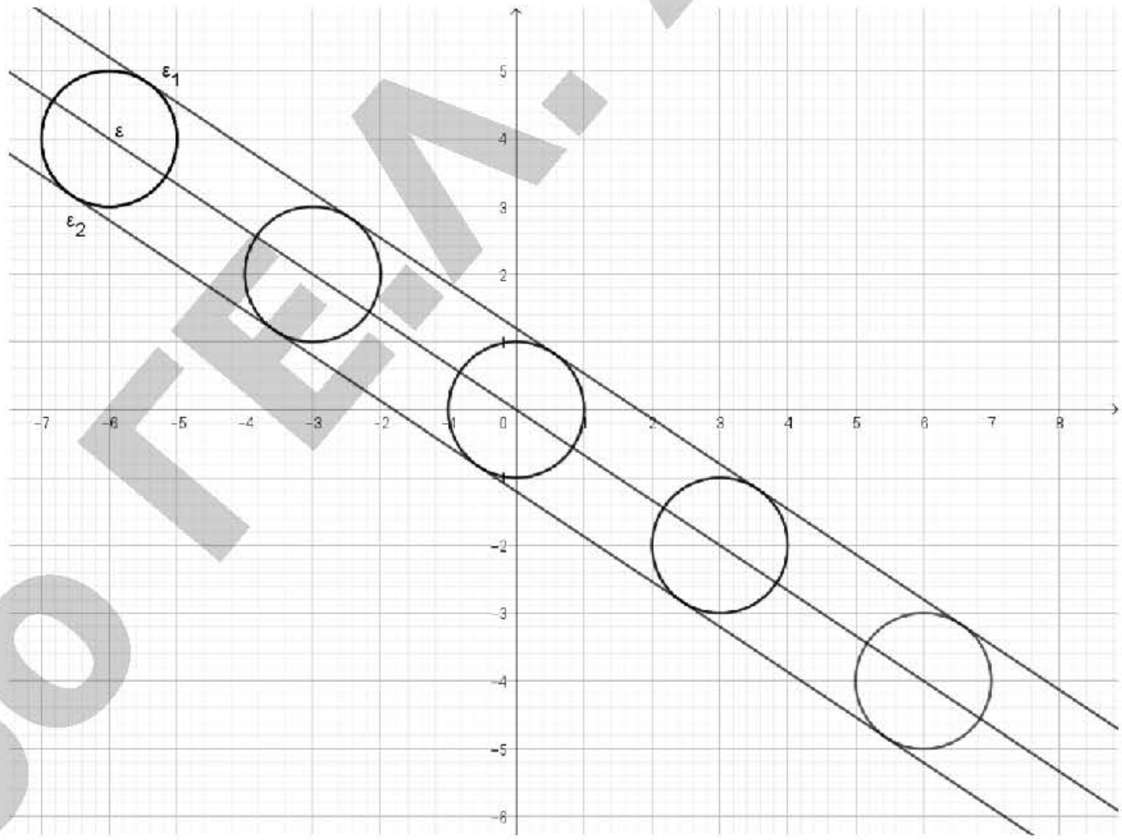
β) Αν $\mathrm{M}(x,y)$ τυχαίο σημείο μιας εκ των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, τότε

$$d(\mathrm{M},\varepsilon)=1 \Leftrightarrow \frac{|2x+3y|}{\sqrt{2^2+3^2}}=1 \Leftrightarrow |2x+3y|=\sqrt{13}$$ οπότε $2x+3y=\sqrt{13}$ ή

$2x+3y=-\sqrt{13}$ που είναι οι ζητούμενες εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

γ) Αφού τα κέντρα $\mathrm{K}(3\lambda,-2\lambda)$ όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1), ανήκουν στην $\varepsilon: 2x+3y=0$, δηλαδή στη μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, έχουμε ότι $d(\mathrm{K},\varepsilon_1)=d(\mathrm{K},\varepsilon_2)=1=\rho$. Συνεπώς όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

δ) Ένα τετράγωνο του οποίου οι δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, θα έχει μήκος πλευράς ίσο με την απόσταση των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, δηλαδή 2. Συνεπώς το εμβαδόν του θα είναι ίσο με 4.



ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(3, 2)$, $\Gamma(1, 4)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς ΒΓ.

(Μονάδες 7)

Έστω ότι η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$.

γ) Να βρείτε σημείο Κ στην μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ που ισαπέχει από τα Α, Β.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\overrightarrow{AB}=(4,\,0) \text{ και } \overrightarrow{A\Gamma}=(2,\,2)$$

και επειδή $\det(\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{A\Gamma})=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}=8\neq 0$, τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά, οπότε σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Η πλευρά ΒΓ έχει μέσο το σημείο $M\left(\dfrac{3+1}{2},\dfrac{2+4}{2}\right)$ δηλαδή το $M(2,\,3)$ και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{B\Gamma}=\dfrac{4-2}{1-3}=\dfrac{2}{-2}=-1$, οπότε η μεσοκάθετη (ε) της ΒΓ διέρχεται από το Μ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$. Επομένως, η εξίσωσης της ευθείας (ε) είναι $y-3=x-2$ δηλαδή $y=x+1$.

γ) Έστω $K(x,\,y)$ το σημείο της μεσοκάθετης που ισαπέχει από τα σημεία Α, Β. Με $y=x+1$, έχουμε:

$$(KA)=(KB)\Leftrightarrow(KA)^2=(KB)^2\Leftrightarrow(x+1)^2+(x-1)^2=(x-3)^2+(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2-6x+9\Leftrightarrow 8x=8\Leftrightarrow x=1$$

οπότε $y=2$. Άρα, $K(1,\,2)$.

δ) Το σημείο Κ από τον τρόπο προσδιορισμού του ισαπέχει από τις κορυφές Α, Β, Γ του τριγώνου, άρα είναι το περίκεντρό του. Σε ότι αφορά στην ακτίνα ρ του περιγεγραμμένου κύκλου ισχύει

$$\rho=(KA)=\sqrt{(-1-1)^2+(2-2)^2}=\sqrt{4}=2$$

Επομένως, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ έχει εξίσωση $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο *ΑΒΓ* και σημείο του επιπέδου *Μ*, τέτοιο ώστε:

$$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0}$$

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία *Β, Γ, Μ* είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το *Μ* είναι το μέσο του $B\Gamma$.

(Μονάδες 2)

γ) Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \kappa$ και $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \lambda$.

Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι για τα μη παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{AB}$ ισχύει ότι $\kappa\,\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\kappa = \lambda = 0$.

(Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο *ΑΒΓ* είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Να προσδιορίσετε την ορθή γωνία και τις πλευρές που είναι ίσες.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\mu \in R$ έτσι ώστε $\overrightarrow{B\Gamma} = \mu\, \overrightarrow{BM}$.

Πράγματι, θεωρώντας το *Β* ως σημείο αναφοράς, είναι:

$$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} - 2\left(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{BA}\right) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BM} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{BM}$$

β) Το *Μ* είναι το μέσο του τμήματος *ΒΓ*, διότι

$$\overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{BM}$$

γ) i. Επειδή τα σημεία *Α, Β, Γ* ως κορυφές τριγώνου δεν είναι συνευθειακά, έπεται ότι τα μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα.

Είναι $\kappa\, \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\, \overrightarrow{AB}$.

Αν $\kappa \neq 0$, τότε $\kappa\, \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\, \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma} = \frac{\lambda}{\kappa}\, \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma} // \overrightarrow{AB}$.

Αν $\lambda \neq 0$, τότε $\kappa\, \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\, \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{\kappa}{\lambda}\, \overrightarrow{A\Gamma} \Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma} // \overrightarrow{AB}$.

Επομένως πρέπει $\kappa = \lambda = 0$.

ii) Τότε είναι: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0 \\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = 0 \end{cases}$

Αφού $\overrightarrow{AB} \cdot A\Gamma = 0$ έπεται ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα. Επομένως, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, με $\hat{A} = 90°$.

Αφού $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = 0$ έπεται ότι η διάμεσος *ΑΜ* του ορθογώνιου τριγώνου είναι κάθετη στην πλευρά *ΒΓ*, δηλαδή είναι και ύψος.

Ως εκ τούτου το τρίγωνο είναι και ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση

$$(x-1)(x+3)+(y+1)(y-3)=-4 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R=2$.

(Μονάδες 9)

β)

i. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του κύκλου (K,R) τα οποία έχουν τετμημένη ίση με -1.

(Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) γράφεται διαδοχικά:

$$(x-1)(x+3)+(y+1)(y-3)=-4$$
$$(x^2+3x-x-3)+(y^2-3y+y-3)=-4$$
$$x^2+2x+y^2-2y=2$$
$$(x^2+2x+1)+(y^2-2y+1)=4$$
$$(x+1)^2+(y-1)^2=2^2 \quad (2)$$

Άρα, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R=2$.

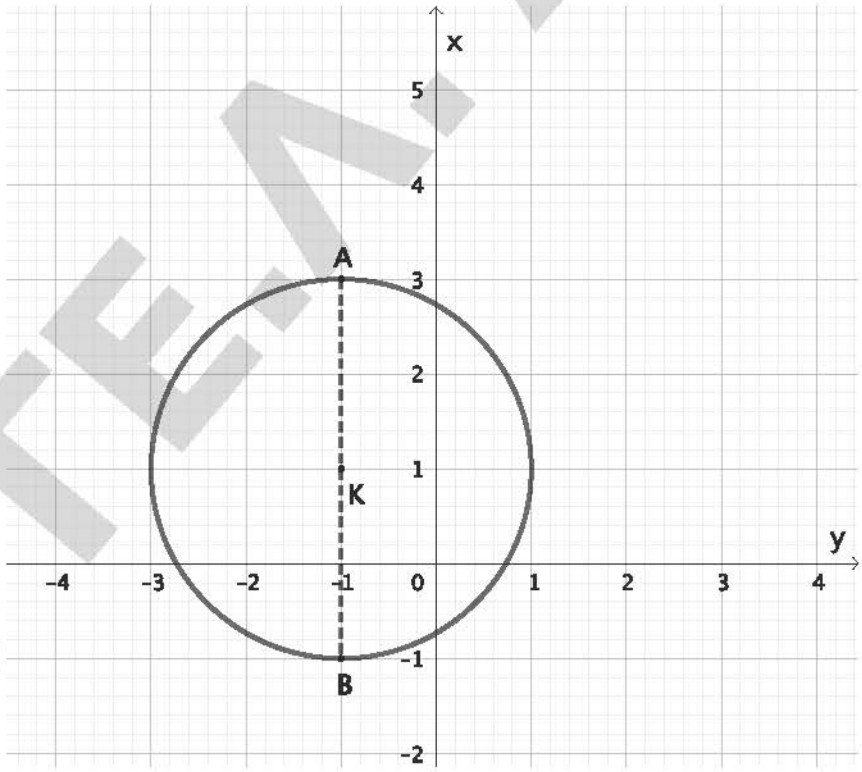
β)

i. Η εξίσωση (2) γίνεται για $x=-1$:

$$(-1+1)^2+(y-1)^2=2^2$$
$$(y-1)^2=4$$
$$y-1=2 \text{ ή } y-1=-2$$
$$y=3 \text{ ή } y=-1$$

Επομένως, τα ζητούμενα σημεία είναι:

$$A(-1,-1) \text{ και } B(-1,3)$$



ii. Τα σημεία Α και Β βρίσκονται στην ευθεία $x=-1$, η οποία διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου. Επομένως, τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2=1$.

α) Αν Α και Α΄ είναι τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Οx και Οx΄ αντίστοιχα, τότε:

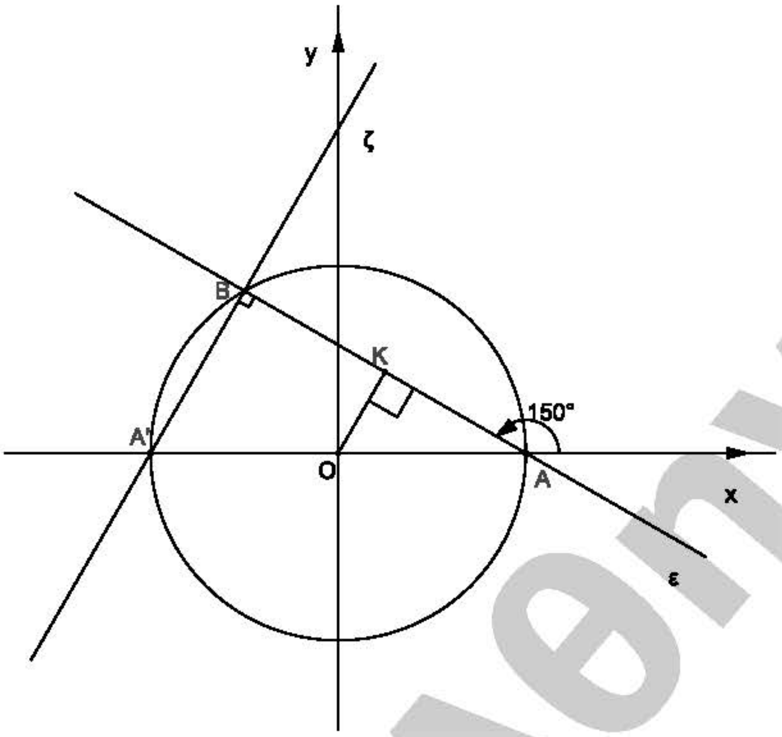
i. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α και Α΄ είναι Α(1,0) και Α΄(-1,0). (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το Α και σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 150°. (Μονάδες 06)

β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C και στο σημείο Β, να αποδείξετε ότι η χορδή ΑΒ έχει μήκος $\sqrt{3}$. (Μονάδες 08)

γ) Αν η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) που διέρχεται από τα σημεία Α΄ και Β. (Μονάδες 06)

ΛΥΣΗ



α)

i. Τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Οx και Οx΄ έχουν τεταγμένη μηδέν. Επομένως, για y=0 έχουμε: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Άρα Α΄(-1,0) και Α(1,0).

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο Α(1,0), είναι $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Οπότε η εξίσωση της ε είναι: $y-0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$.

β)

i. Αν ΟΚ το απόστημα της χορδής ΑΒ, τότε ΟΚ=d(O, ε)=$\frac{\left|-\frac{\sqrt{3}}{3}0-0+\frac{\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1^2}} = \frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\frac{12}{9}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2}$.

Αν ΑΚ = μ = $\frac{AB}{2}$, με Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΚ έχουμε: $OK^2+\mu^2=OA^2 \Leftrightarrow \mu^2 = 1-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \mu^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα ΑΒ=2μ=$\sqrt{3}$.

ii. Η γωνία Α΄ΒΑ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα Α΄Β⊥ΒΑ δηλαδή ζ⊥ε,οπότε $\lambda_\zeta = -\frac{1}{\lambda_\varepsilon} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ και (ζ): $y-0 = \sqrt{3}(x+1) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}(x+1)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 4$ και το σημείο $A(2\sqrt{2}, 0)$.

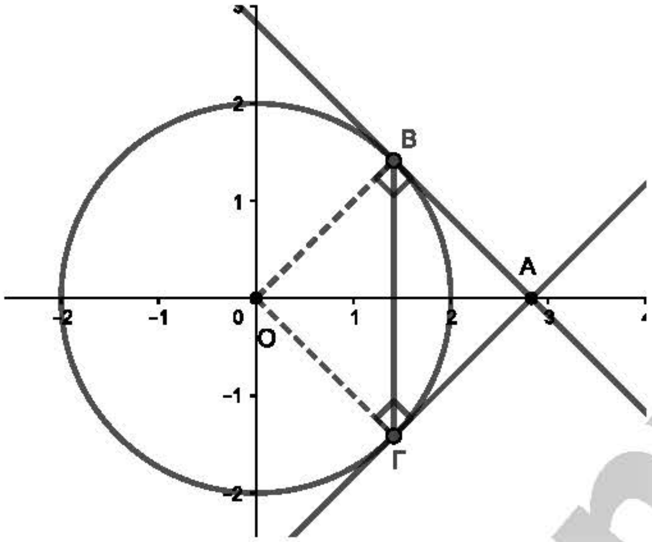
α)

i. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι εξωτερικό του κύκλου C. (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο Α και να αποδείξετε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες. (Μονάδες 12)

β) Αν Β, Γ τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες ευθείες από το σημείο Α, να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ. (Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ



α)

i. Το σημείο $A(2\sqrt{2},0)$ είναι εξωτερικό του κύκλου C γιατί είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Ox με $(OA)= 2\sqrt{2} >2$ με 2 η ακτίνα του κύκλου.

ii. Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(2\sqrt{2},0)$ είναι:

- Η κατακόρυφη $x= 2\sqrt{2}$ που δεν είναι εφαπτομένη του κύκλου C γιατί $d(O,\varepsilon) =2\sqrt{\ }$
- Οι ευθείες με εξίσωση (ε): $y-0=\lambda(x-2\sqrt{2})$ με $\lambda\in R$ ή $\lambda x-y-2\lambda\sqrt{2}=0$

  Η (ε) είναι εφαπτομένη του C αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου του O ισούται με την ακτίνα του κύκλου. Δηλαδή $d(O,\varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda\cdot 0-0-2\lambda\sqrt{2}|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2 \Leftrightarrow$

  $2\sqrt{2}\ |\lambda| = 2\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow 8\lambda^2 = 4\lambda^2+4 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4 =0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

  Για λ=1, (ε_1): $y=x-2\sqrt{2}$ και για λ= - 1, (ε_2): $y=-x+2\sqrt{2}$

  Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι 1 και -1 αντίστοιχα και $\lambda_1\cdot\lambda_2= -1$. Άρα οι εφαπτόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 του κύκλου από το σημείο A είναι μεταξύ τους κάθετες.

β) Αν Β, Γ τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων ευθειών ε_1 και ε_2 με τον κύκλο C, τότε οι ακτίνες του κύκλου στα σημεία αυτά είναι κάθετες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες. Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΒΟΓ έχει 3 ορθές γωνίες, οπότε είναι ορθογώνιο. Επειδή ΟΑ = ΟΒ = 2 ως ακτίνες του κύκλου, άρα είναι ρόμβος. Επομένως το ΑΒΟΓ είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή 2. Συνεπώς (ΑΒΟΓ) = 2^2 = 4 τ.μ.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(\alpha,0)$ και $\mathrm{B}(0,\beta)$, όπου $\alpha,\beta>0$.

α) Να βρείτε συναρτήσει των α,β

i. τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB.

(Μονάδες 5)

ii. την απόσταση (OM).

(Μονάδες 5)

β) Αν $(\mathrm{OM})=\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $(\mathrm{OM})=\dfrac{(\mathrm{AB})}{2}$.

(Μονάδες 5)

ii. να γράψετε την πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί.

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου OAB.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α)

i. Οι συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB είναι $\mathrm{M}\left(\dfrac{\alpha}{2},\dfrac{\beta}{2}\right)$.

ii. Η απόσταση (OM) είναι

$$(\mathrm{OM})=\sqrt{(\frac{\alpha}{2}-0)^2+(\frac{\beta}{2}-0)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}}=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}.$$

β)

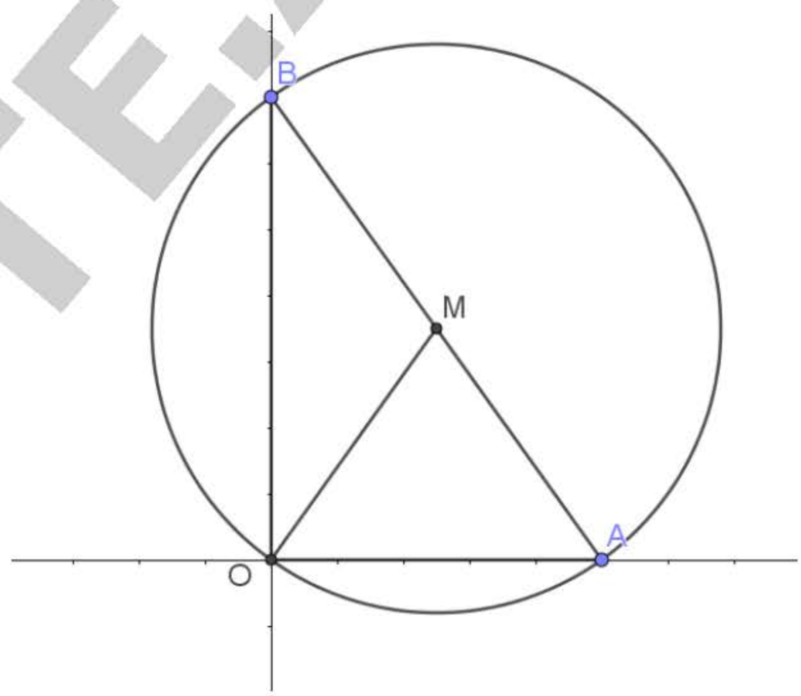
i. $(\mathrm{AB})=\sqrt{(\alpha-0)^2+(0-\beta)^2}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=2\cdot(\mathrm{OM})$ ή $(\mathrm{OM})=\dfrac{(\mathrm{AB})}{2}$.

ii. Η πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί είναι η εξής:

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

γ) Αφού $(\mathrm{OM})=\dfrac{(\mathrm{AB})}{2}=(\mathrm{AM})=(\mathrm{BM})$ συμπεραίνουμε ότι το σημείο M ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου OAB και επομένως είναι το κέντρο του ζητούμενου περιγεγραμμένου κύκλου. Επίσης η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι η $(\mathrm{OM})=\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$. Συνεπώς ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση

$$\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(x-\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}.$$



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σημείο $\mathrm{K}(-3,1)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 4x-3y+5=0$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου K από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο το σημείο K και εφάπτεται στην ευθεία (ε).

(Μονάδες 9)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τον κύκλο C και την ευθεία (ε).

(Μονάδες 10)

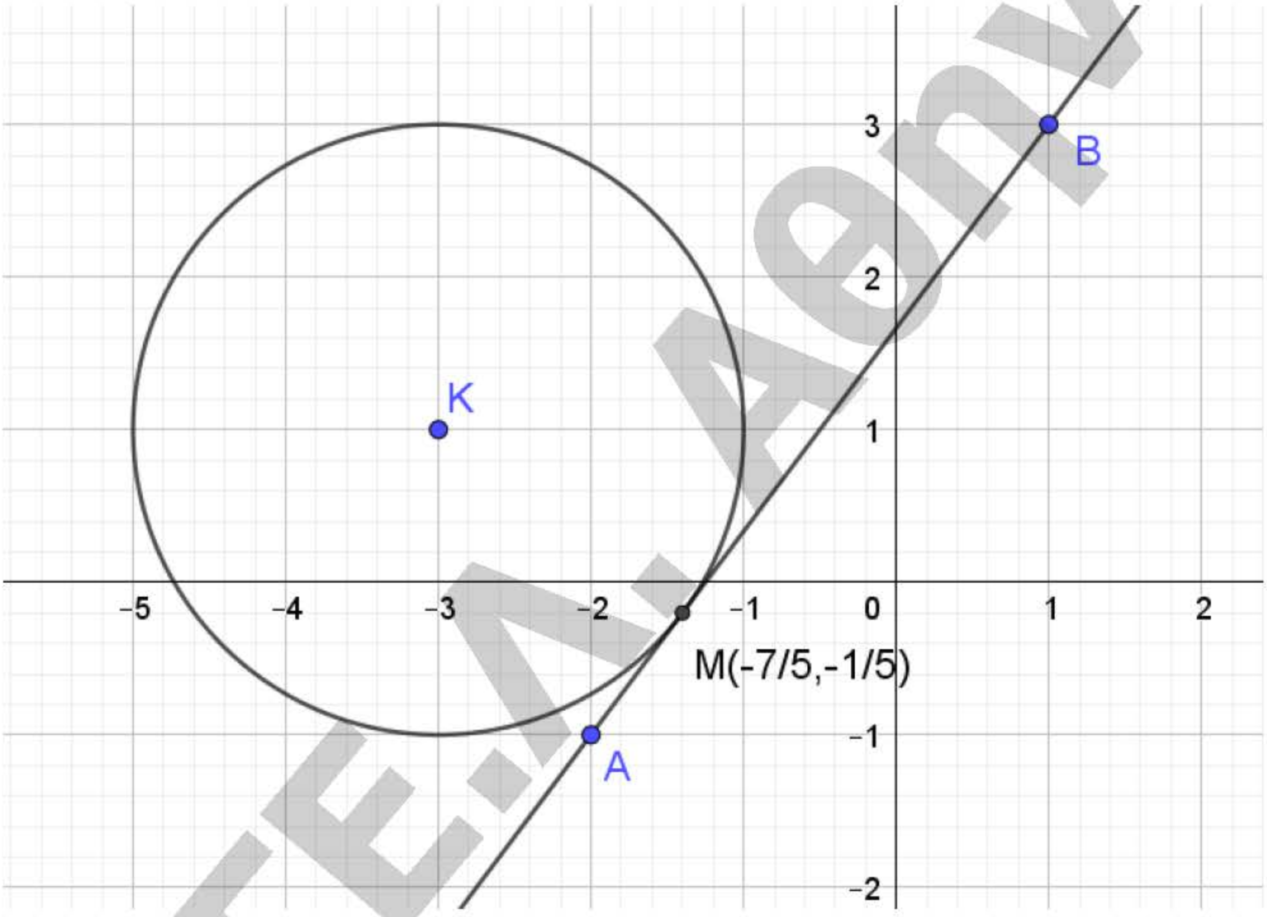
ΛΥΣΗ

α) Είναι $d(\mathrm{K},\varepsilon)=\dfrac{|4(-3)-3\cdot 1+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|-10|}{\sqrt{25}}=\dfrac{10}{5}=2$.

β) Ο ζητούμενος κύκλος θα έχει ακτίνα $\rho=d(\mathrm{K},\varepsilon)=2$, οπότε η εξίσωσή του θα είναι η

$(x+3)^2+(y-1)^2=4$.

γ) Η ευθεία (ε) διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(-2,-1)$ και $\mathrm{B}(1,3)$, αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της. Ο κύκλος C και η ευθεία (ε) φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$ και $B(-3,5)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του τμήματος AB.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $(KA)=\sqrt{5}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

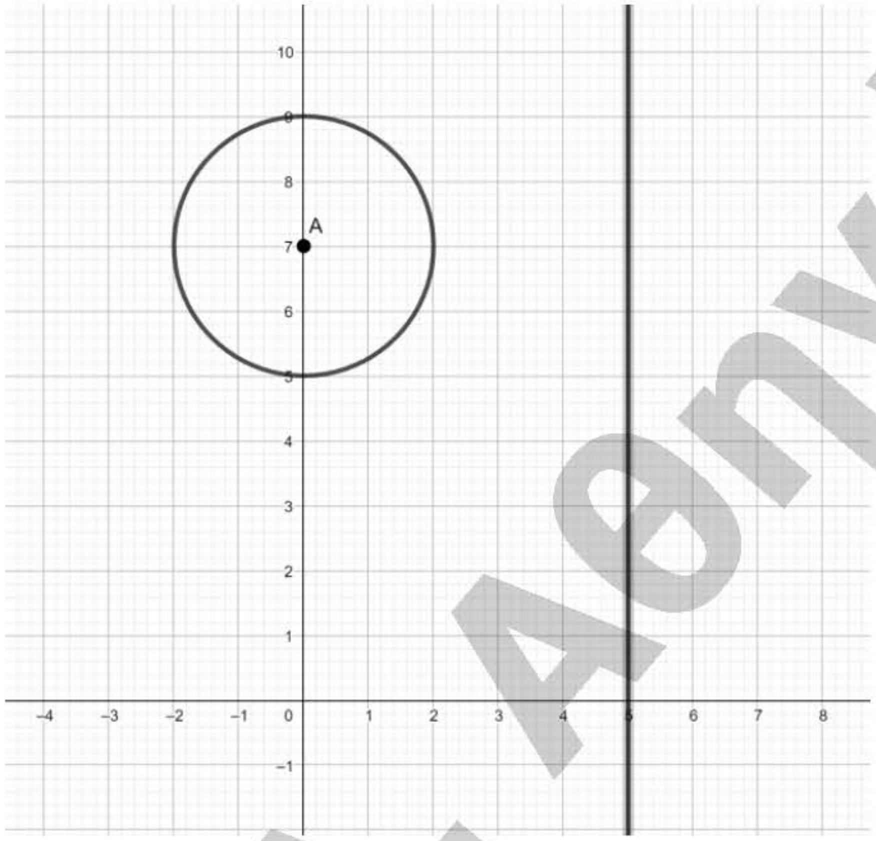
α) Είναι $x_{\mathrm{K}}=\dfrac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}}{2}=\dfrac{1+(-3)}{2}=-1$ και $y_{\mathrm{K}}=\dfrac{y_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{B}}}{2}=\dfrac{3+5}{2}=4$, οπότε $\mathrm{K}(-1,4)$.

β) Είναι $(\mathrm{KA})=\sqrt{\left(x_{\mathrm{K}}-x_{\mathrm{A}}\right)^2+\left(y_{\mathrm{K}}-y_{\mathrm{A}}\right)^2}=\sqrt{(-1-1)^2+(4-3)^2}=\sqrt{5}$.

γ) Ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο το σημείο $\mathrm{K}(-1,4)$ και ακτίνα την απόσταση $(\mathrm{KA})=\sqrt{5}$, οπότε έχει εξίσωση: $(x+1)^2+(y-4)^2=5$.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει κύκλο C_1 κέντρου A και την ευθεία (ε): $x=5$.



α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1.

(Μονάδες 3)

β) Έστω ένα σημείο του επιπέδου $\mathrm{B}(x_1, y_1)$

i. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $\mathrm{B}(x_1, y_1)$ και ακτίνα 2.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου AB σε συνάρτηση με τις συντεταγμένες του σημείου B

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε όλους τους κύκλους του ερωτήματος β)i. με ακτίνα 2, που εφάπτονται εξωτερικά στον C_1 και στην ευθεία (ε).

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $\mathrm{A}(0,7)$ και ακτίνα $\rho=2$, άρα αντικαθιστώντας στον τύπο $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$, τις αντίστοιχες τιμές έχουμε:

$(x-0)^2+(y-7)^2=2^2 \Leftrightarrow x^2+(y-7)^2=4$ που είναι η ζητούμενη εξίσωση του κύκλου C_1.

β)

i. Σύμφωνα με το τύπο $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$, οι κύκλοι με κέντρο $\mathrm{B}(x_1,y_1)$ και ακτίνα 2 έχουν εξίσωση $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=4$.

ii. Η απόσταση δύο σημείων $\mathrm{A}(x_A,y_A)$ και $\mathrm{B}(x_\mathrm{B},y_\mathrm{B})$ δίνεται από τον τύπο $(\mathrm{AB})=\sqrt{(x_A-x_\mathrm{B})^2+(y_A-y_\mathrm{B})^2}$, οπότε για τα σημεία $\mathrm{A}(0,7)$ και $\mathrm{B}(x_1,y_1)$ έχουμε $(\mathrm{AB})=\sqrt{(0-x_1)^2+(7-y_1)^2} \Leftrightarrow (\mathrm{AB})=\sqrt{x_1^2+(7-y_1)^2}$.

γ) Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους. Οπότε έχουμε:

$(\mathrm{AB})=2+2 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1-0)^2+(y_1-7)^2}=4 \Leftrightarrow x_1^2+(y_1-7)^2=16$ (1).

Ένας κύκλος εφάπτεται σε ευθεία αν και μόνο αν το κέντρο του κύκλου απέχει από την ευθεία απόσταση ίση με την ακτίνα του. Οπότε έχουμε:

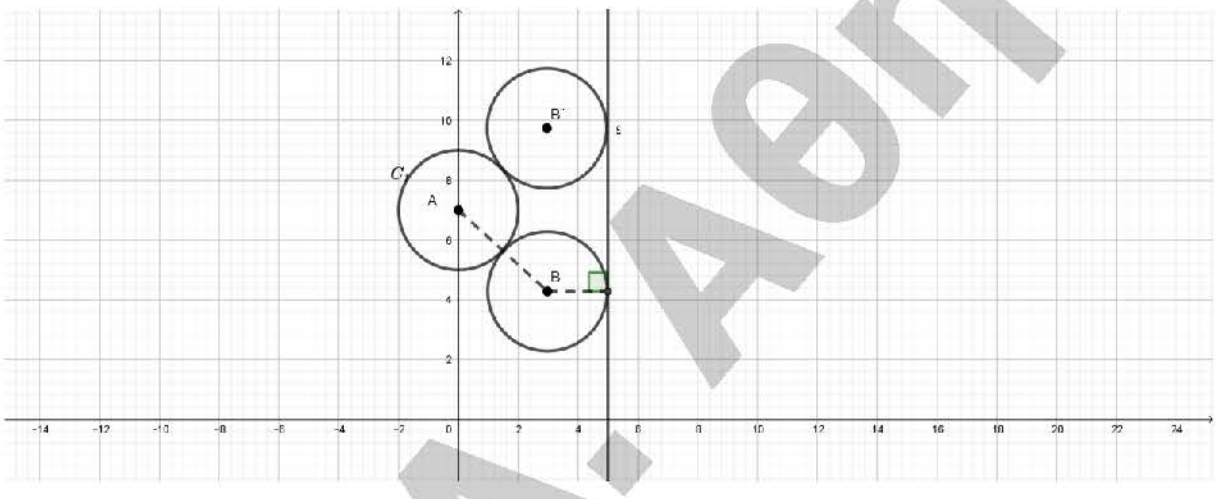
$d(\mathrm{B},\varepsilon)=2 \Leftrightarrow \dfrac{|0+x_1-5|}{\sqrt{0^2+1^2}}=2 \Leftrightarrow |x_1-5|=2$ (2).

Για να βρούμε τους κύκλους που εφάπτονται στον κύκλο C_1 και στην ευθεία (ε) επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$\begin{cases} x_1^2+(y_1-7)^2=16 \\ |x_1-5|=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$
\begin{cases}
\begin{cases} x_1^2+(y_1-7)^2=16 \\ x_1-5=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^2+(y_1-7)^2=16 \\ x_1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y_1-7)^2=-33 \\ x_1=7 \end{cases} \text{ Αδύνατο.} \\
\text{ή} \\
\begin{cases} x_1^2+(y_1-7)^2=16 \\ x_1-5=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2+(y_1-7)^2=16 \\ x_1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y_1-7)^2=7 \\ x_1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=7-\sqrt{7} \text{ ή } y_2=7+\sqrt{7} \\ x_1=3 \end{cases}
\end{cases}
$$

Τελικά είναι δύο οι δύο κύκλοι που εφάπτονται εξωτερικά στον κύκλο C_1 και στην ευθεία (ε) έχουν κέντρα τα σημεία $\mathrm{B}\left(3,7-\sqrt{7}\right)$ και $\mathrm{B}'\left(3,7+\sqrt{7}\right)$ και ακτίνα $\rho=2$.



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις:

$$C_1:(x-2)^2+(y-3)^2=8 \text{ και } C_2:(x-7)^2+(y+2)^2=18.$$

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $(\mathrm{K}\Lambda)$, όπου K,Λ τα κέντρα των κύκλων C_1, C_2 αντίστοιχα. Ακολούθως να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

(Μονάδες 5)

β)

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $\mathrm{K}\Lambda$.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $\mathrm{K}\Lambda$ με τον κύκλο C_1 και το σημείο επαφής των δύο κύκλων.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $\mathrm{K}(2,3)$ και ακτίνα $\rho_1 = 2\sqrt{2}$, ενώ ο κύκλος C_2 κέντρο $\Lambda(7,-2)$ και ακτίνα $\rho_2 = 3\sqrt{2}$. Οπότε έχουμε $(\mathrm{K}\Lambda) = \sqrt{(7-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2}$. Ακόμα $\rho_1 + \rho_2 = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$, δηλαδή $(\mathrm{K}\Lambda) = \rho_1 + \rho_2$.

Αφού η διάκεντρος των δύο κύκλων είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους, οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

β)

i. Έχουμε $\lambda_{\mathrm{K}\Lambda} = \dfrac{-2-3}{7-2} = -1$, οπότε $\mathrm{K}\Lambda : y-3 = -1(x-2) \Leftrightarrow y = -x+5$.

ii. Θα βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας $\mathrm{K}\Lambda$ με τον κύκλο C_1.

Έχουμε:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2=8\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+(-x+2)^2=8\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2=4\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2=\pm 2\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x=4 \text{ ή } x=0\\ y=1 \text{ ή } y=5.\end{cases}$$

Οπότε τα κοινά σημεία της ευθείας $\mathrm{K}\Lambda$ με τον κύκλο C_1 είναι τα $\mathrm{A}(4,1)$ και $\mathrm{A}'(0,5)$.

Αντίστοιχα έχουμε:

$$\begin{cases}(x-7)^2+(y+2)^2=18\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-7)^2+(-x+7)^2=18\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-7)^2=9\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-7=\pm 3\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x=4 \text{ ή } x=10\\ y=1 \text{ ή } y=-5.\end{cases}$$

Οπότε τα κοινά σημεία της ευθείας $\mathrm{K}\Lambda$ με τον κύκλο C_2 είναι τα $\mathrm{A}(4,1)$ και $\mathrm{A}''(10,-5)$. Η κοινή λύση των δύο συστημάτων είναι το ζητούμενο σημείο επαφής των δύο κύκλων. Άρα το κοινό σημείο της ευθείας και με τους δύο κύκλους είναι το $\mathrm{A}(4,1)$, οπότε είναι το σημείο επαφής.

Εναλλακτική λύση:

Βρίσκουμε τα σημεία τομής της ευθείας $\mathrm{K\Lambda}$ με τον κύκλο C_1 λύνοντας το σύστημα $\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2=8\\ y=-x+5\end{cases}$ και βρίσκουμε, όπως και στον προηγούμενο τρόπο λύσης, τα σημεία $\mathrm{A}(4,1)$ και $\mathrm{A}'(0,5)$.

Έχουμε $\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}}=(7-2,-2-3)=(5,-5)$ και $\overrightarrow{\mathrm{KA}}=(4-2,1-3)=(2,-2)$, δηλαδή

$$\overrightarrow{\mathrm{KA}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}},$$

οπότε το A, ως εσωτερικό σημείο του $\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}}$, είναι το μοναδικό ζητούμενο σημείο επαφής.

γ) Η κοινή εσωτερική εφαπτομένη (η) των δύο κύκλων είναι κάθετη στην ευθεία $\mathrm{K\Lambda}$ και διέρχεται από το σημείο επαφής $\mathrm{A}(4,1)$.

Στο ερώτημα β)i έχουμε βρει ότι $\lambda_{\mathrm{K\Lambda}}=-1$, οπότε $\lambda_\eta\cdot\lambda_{\mathrm{K\Lambda}}=-1\Leftrightarrow\lambda_\eta\cdot(-1)=-1\Leftrightarrow\lambda_\eta=1$, και η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δυο κύκλων έχει εξίσωση:

$$(\eta): y-1=1(x-4)\Leftrightarrow y=x-3.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2(\lambda+1)x-2\lambda y+2\lambda+1=0$ (1) , όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να γράψετε ως συνάρτηση του λ τις συντεταγμένες του κέντρου K και την ακτίνα ρ.

(Μονάδες 7)

β) Τι παριστάνει η εξίσωση (1) για $\lambda=0$;

(Μονάδες 3)

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται 4 κύκλοι με τα αντίστοιχα κέντρα τους $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_4$ που προκύπτουν από την (1) για 4 αντίστοιχες τιμές του λ. Αξιοποιώντας το σχήμα,

i. να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

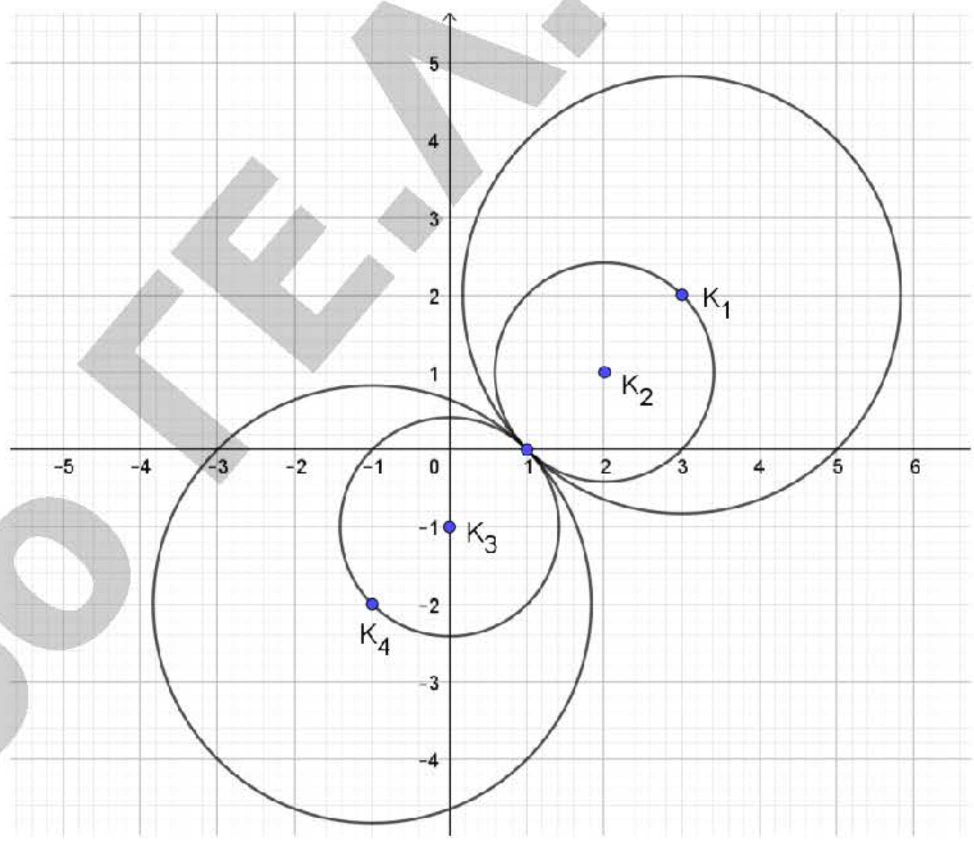
(Μονάδες 5)

ii. να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

(Μονάδες 5)

iii. να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x+y-1=0$ είναι κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1).

(Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Η (1) είναι της μορφής $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$, όπου $\mathrm{A}=-2(\lambda+1)$, $\mathrm{B}=-2\lambda$ και $\Gamma=2\lambda+1$. Είναι:

$$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=(-2(\lambda+1))^2+(-2\lambda)^2-4(2\lambda+1)=4\lambda^2+8\lambda+4+4\lambda^2-8\lambda-4=8\lambda^2$$

Για να παριστάνει η (1) κύκλο πρέπει και αρκεί $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0 \Leftrightarrow 8\lambda^2>0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0$.

Το κέντρο είναι το $\mathrm{K}(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2})$ δηλαδή $\mathrm{K}(\lambda+1,\lambda)$ και η ακτίνα

$$\rho=\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{8\lambda^2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}|\lambda|}{2}=\sqrt{2}|\lambda|$$

β) Για $\lambda=0$ η (1) γίνεται $x^2+y^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=1 \\ \kappa\alpha\iota \\ y=0 \end{matrix}\right\}$

που σημαίνει ότι παριστάνει το σημείο $\mathrm{M}(1,0)$.

γ)

i. Η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα $\mathrm{K}_1,\mathrm{K}_2$ του σχήματος έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{y_{\mathrm{K}_1}-y_{\mathrm{K}_2}}{x_{\mathrm{K}_1}-x_{\mathrm{K}_2}}=\frac{2-1}{3-2}=1$ και εξίσωση $\zeta: y-1=1(x-2) \Leftrightarrow y=x-1$.

Θα αποδείξουμε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω στην ευθεία ζ. Πράγματι το τυχαίο κέντρο $\mathrm{K}(\lambda+1,\lambda)$ ανήκει στην ευθεία ζ, αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $y=x-1$.

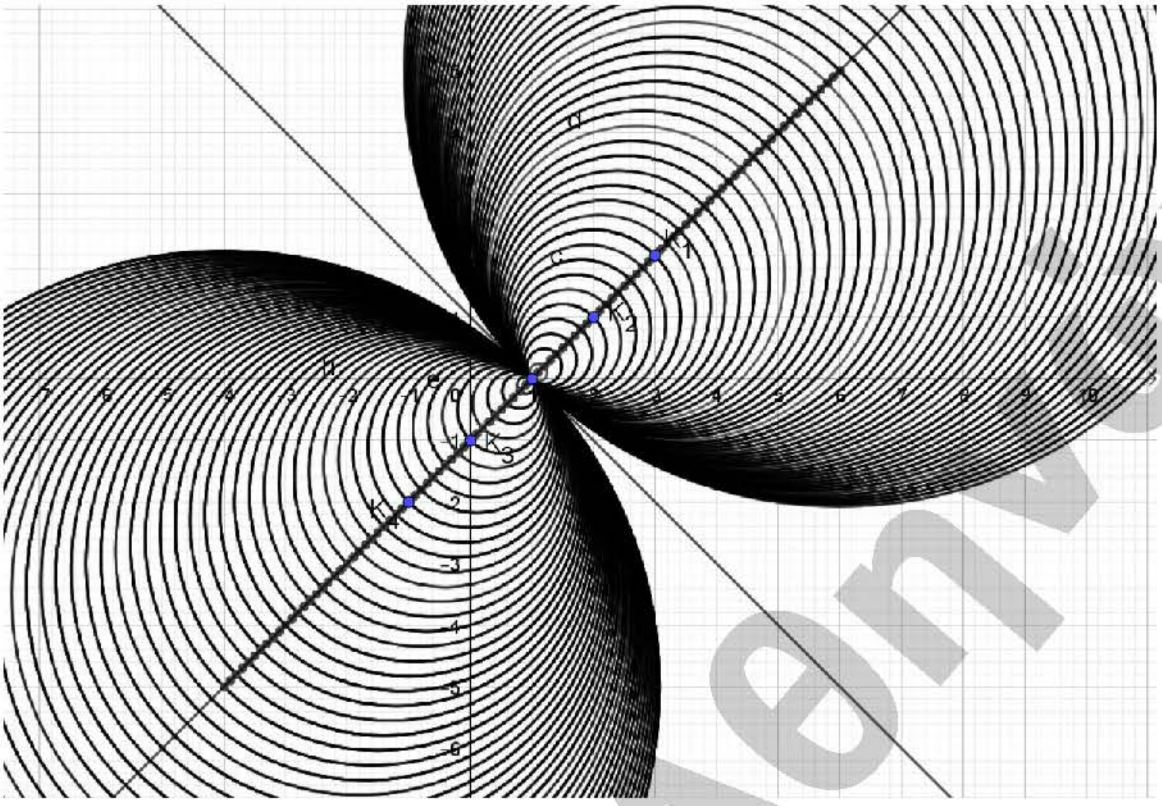
ii. Οι κύκλοι του σχήματος διέρχονται από το σημείο $\mathrm{M}(1,0)$. Θα αποδείξουμε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από το $\mathrm{M}(1,0)$. Πράγματι οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την (1) για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, αφού

$1^2+0^2-2(\lambda+1)\cdot 1-2\lambda\cdot 0+2\cdot\lambda+1=0 \Leftrightarrow 0=0$ που ισχύει.

iii. Θα πρέπει το κέντρο $\mathrm{K}(\lambda+1,\lambda)$ να απέχει από την ευθεία $\varepsilon: x+y-1=0$ απόσταση ίση με την ακτίνα ρ.

Πράγματι $d(K,\varepsilon)=\frac{|\lambda+1+\lambda-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2|\lambda|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|\lambda|=\rho$

Σημείωση : Η ευθεία $\varepsilon: x+y-1=0$ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(1,0)$ και να είναι κάθετη στην ευθεία ζ, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.


K1
K2
K3
K4

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο κύκλος C: $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ και η ευθεία ε: $3x-4y=8$.

α) Να βρείτε το κέντρο K του κύκλου C και την ακτίνα του.

(Μονάδες 5)

β) Αν $K(1,2)$, να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου C από την ευθεία ε είναι $d(K,\varepsilon)=\frac{13}{5}$.

(Μονάδες 13)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C έχει κέντρο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

β) Έχουμε: $d(K,\varepsilon) = \frac{|3-8-8|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{13}{\sqrt{25}} = \frac{13}{5}$.

γ) Αφού $d(K,\varepsilon) = \frac{13}{5} > 2$, η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα. Άρα ευθεία και κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2+1 \quad (1)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $A(1,0)$ και $B(3,0)$ είναι τα μοναδικά σημεία από τα οποία διέρχονται όλοι οι κύκλοι, τότε να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων.

(Μονάδες 07)

δ) Αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 0$.

(Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

α) Είναι γνωστό ότι η εξίσωση $\;x\quad x\;)^2+\;y\quad y\;)^2=\rho^2$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το $K(x\;\;,y\;\;)$ και ακτίνα $\rho>0$.

Η (1) γράφεται $\;x\quad 2)^2+\;y\quad \lambda)^2=\left(\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2$, επομένως παριστάνει κύκλο με κέντρο το $K(2,\lambda)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{\lambda^2+1}$, διότι $\lambda^2+1>0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Επιλέγουμε δύο από τους κύκλους (1), δίνοντας τις παρακάτω τιμές:

Για $\lambda=0,\quad x^2+y^2\quad 4x+3=0$

Για $\lambda=1,\quad x^2+y^2-4x-2y+3=0$.

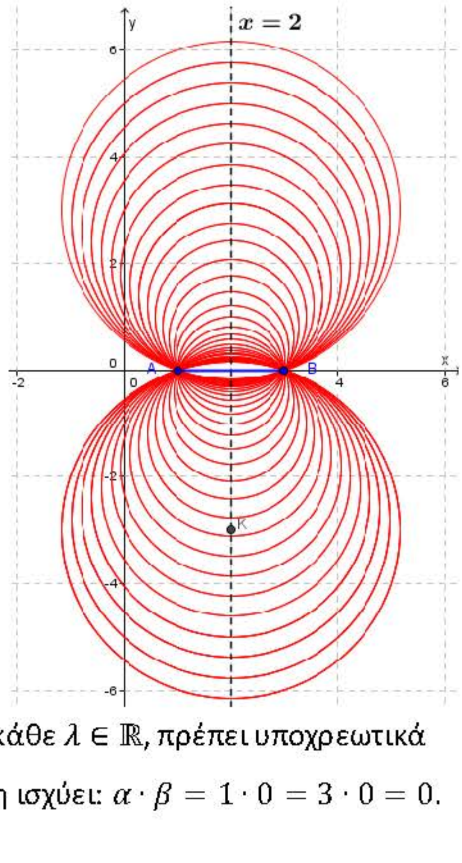
Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο ισότητες προκύπτει $y=0$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση, είναι: $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$.

Επομένως οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία, τα $A(1,0)$ και $B(3,0)$.

Με μια απλή αντικατάσταση στην (1), αποδεικνύεται ότι τα σημεία αυτά την επαληθεύουν για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ και ως εκ τούτου, αποτελούν τα κοινά σημεία όλων των κύκλων.

γ) Η κοινή χορδή των κύκλων (1) είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB, το οποίο βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$. Επομένως έχει εξίσωση $y=0$.

Τα κέντρα όλων των κύκλων είναι της μορφής $K(2,\lambda)$ με $\lambda\in\mathbb{R}$. Άρα, η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα όλων των κύκλων, είναι η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x=2$. Επομένως είναι κάθετη στην κοινή χορδή.



δ) Αφού το σημείο $M(\alpha,\beta)$ επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, πρέπει υποχρεωτικά να είναι ή το $A(1,0)$ ή το $B(3,0)$. Σε κάθε περίπτωση ισχύει: $\alpha\cdot\beta=1\cdot 0=3\cdot 0=0$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (x-1)^2+(y-1)^2=9$ και $C_2: (x-4)^2+(y-4)^2=9$.

α) Να δείξετε ότι τα κέντρα K, Λ των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$ του συστήματος συντεταγμένων.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής B, Γ των κύκλων C_1 και C_2.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $y=x$ ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται με τα B, Γ να έχει εμβαδόν $\dfrac{21}{2}\tau.\mu.$

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $\mathrm{K}(1,1)$ και ακτίνα $\rho=3$ ενώ ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda(4,4)$ και ακτίνα $\rho=3$.

Έχουμε $\lambda_{\mathrm{K}\Lambda}=\dfrac{4-1}{4-1}=1$, άρα η $\mathrm{K}\Lambda$ βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $y-1=1(x-1)\Leftrightarrow y=x$, δηλαδή η διάκεντρος βρίσκεται στην διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$.

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής των κύκλων C_1 και C_2 θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεών τους. Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε $(x-1)^2+(y-1)^2-(x-4)^2-(y-4)^2=0\Leftrightarrow(x-1)^2-(x-4)^2=(y-4)^2-(y-1)^2\Leftrightarrow$ $3(2x-5)=-3(2y-5)\Leftrightarrow 2x-5=5-2y\Leftrightarrow y=5-x$.

Αντικαθιστώντας την τιμή του y στην $(x-1)^2+(y-1)^2=9$, βρίσκουμε $(x-1)^2+(4-x)^2=9\Leftrightarrow 2x^2-10x+8=0\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow x_1=1,x_2=4$ με τις αντίστοιχες τιμές $y_1=4,y_2=1$. Τελικά τα σημεία τομής των κύκλων C_1 και C_2 είναι $\mathrm{B}(1,4)$ και $\Gamma(4,1)$.

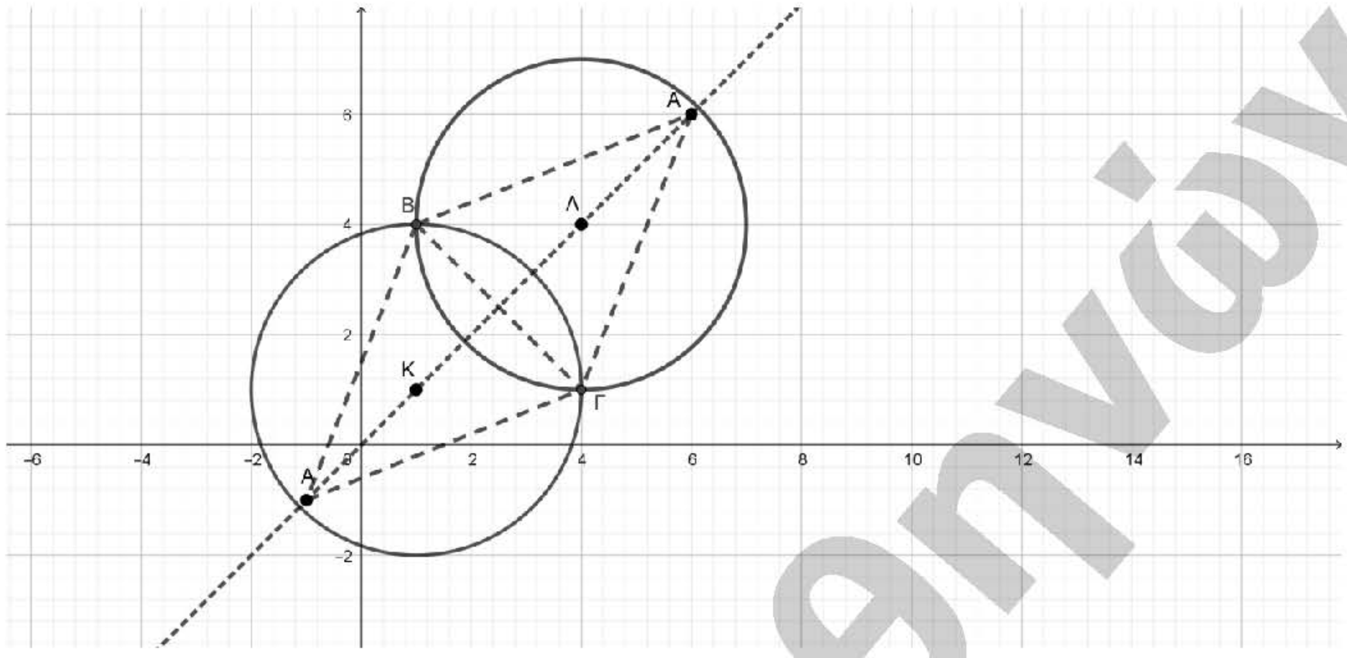
γ) Το σημείο $\mathrm{A}(x,y)$ ανήκει στην ευθεία που ανήκουν τα σημεία Κ και Λ με εξίσωση, όπως βρήκαμε στο α) ερώτημα, $y=x$ αν αι μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση. Οπότε έχουμε $\mathrm{A}(x,x)$.

Είναι $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1-x,4-x)$ και $\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}=(4-x,1-x)$.

Ακόμα $(\mathrm{AB}\Gamma)=\dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1-x & 4-x\\ 4-x & 1-x\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{2}\left|(1-x)^2-(4-x)^2\right|=\dfrac{1}{2}|6x-15|$.

Οπότε $(\mathrm{AB}\Gamma)=\dfrac{21}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}|6x-15|=\dfrac{21}{2}\Leftrightarrow|6x-15|=21\Leftrightarrow\begin{cases}6x-15=21\\6x-15=-21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\x=-1\end{cases}$.

Τελικά βρήκαμε δύο σημεία της ευθείας $y=x$, τα $\mathrm{A}(6,6)$ και $\mathrm{A}'(-1,-1)$, που σχηματίζουν με τα σημεία τομής B και Γ τρίγωνο εμβαδού $\dfrac{21}{2}\tau.\mu.$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.


Α
Β
Λ
Κ
Γ
Α

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι εξισώσεις

$$C_1:\ x^2+y^2-2x-8=0 \qquad (1)$$

και

$$C_2:\ x^2+y^2-6x+8=0 \qquad (2).$$

α) Να δείξετε ότι οι (1) και (2) είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα $\mathrm{K}(1,0)$, $\Lambda(3,0)$ και ακτίνες $\rho_1=3$, $\rho_2=1$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου $(\mathrm{K}\Lambda)$.

(Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1 .

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου C_1 που εφάπτονται στον κύκλο C_2.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$

και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$, αν και μόνο αν $A^2+B^2-4\Gamma>0$.

Για την εξίσωση (1) έχουμε:

$$A^2+B^2-4\Gamma=4-4(-8)=36>0,$$

δηλαδή παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1,0)$ και ακτίνα $\rho_1=3$.

Όμοια για την (2) έχουμε:

$$A^2+B^2-4\Gamma=36-4\cdot 8=4>0,$$

δηλαδή παριστάνει κύκλο με κέντρο $\Lambda(3,0)$ και ακτίνα $\rho_2=1$.

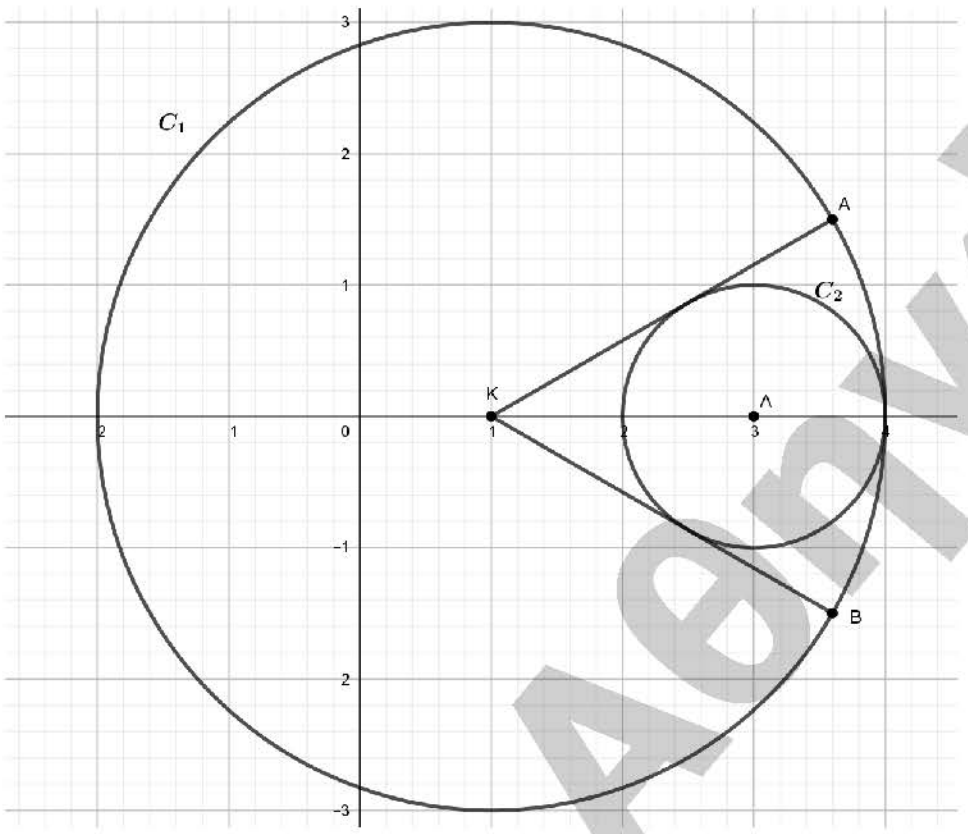
β)

i. Έχουμε $(K\Lambda)=\sqrt{(3-1)^2+0^2}=2$.

ii. Δύο κύκλοι με κέντρα K, Λ και ακτίνες ρ_1 και ρ_2 αντίστοιχα εφάπτονται εσωτερικά αν και μόνο αν $(K\Lambda)=|\rho_1-\rho_2|=\rho_1-\rho_2$, όπως γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια γεωμετρία. Είναι $\rho_1-\rho_2=3-1=2$, από β)i. έχουμε $(K\Lambda)=2=\rho_1-\rho_2$, δηλαδή ικανοποιείται η προϋπόθεση οπότε ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1.

γ) Κάθε ακτίνα του κύκλου C_1, KA και KB σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, που δεν είναι κάθετη στον $x'x$ άξονα, είναι πάνω σε ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $K(1,0)$ και έχει κλίση $\lambda\in\mathbb{R}$. Άρα θα έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon):\ y-0=\lambda(x-1)\Leftrightarrow y-\lambda x+\lambda=0,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$



Η (ε) θα εφάπτεται στον C_2 αν και μόνο αν $d(\Lambda,\varepsilon)=\rho_2$. Έχουμε:

$$d(\Lambda,\varepsilon)=\rho_2 \Leftrightarrow \frac{|0-3\lambda+\lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2}}=1 \Leftrightarrow |2\lambda|=\sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow 3\lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Τελικά οι ζητούμενες ακτίνες KA και KB έχουν εξισώσεις:

$$(\varepsilon_1):\ 3y-\sqrt{3}x+\sqrt{3}=0 \text{ και}$$

$$(\varepsilon_2):\ 3y+\sqrt{3}x-\sqrt{3}=0 \text{ αντίστοιχα.}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 13)

β) Να σχεδιάσετε τον κύκλο (c) και να βρείτε, χρησιμοποιώντας το σχήμα ή με οποιανδήποτε άλλον τρόπο, τα κοινά του σημεία με τους άξονες.

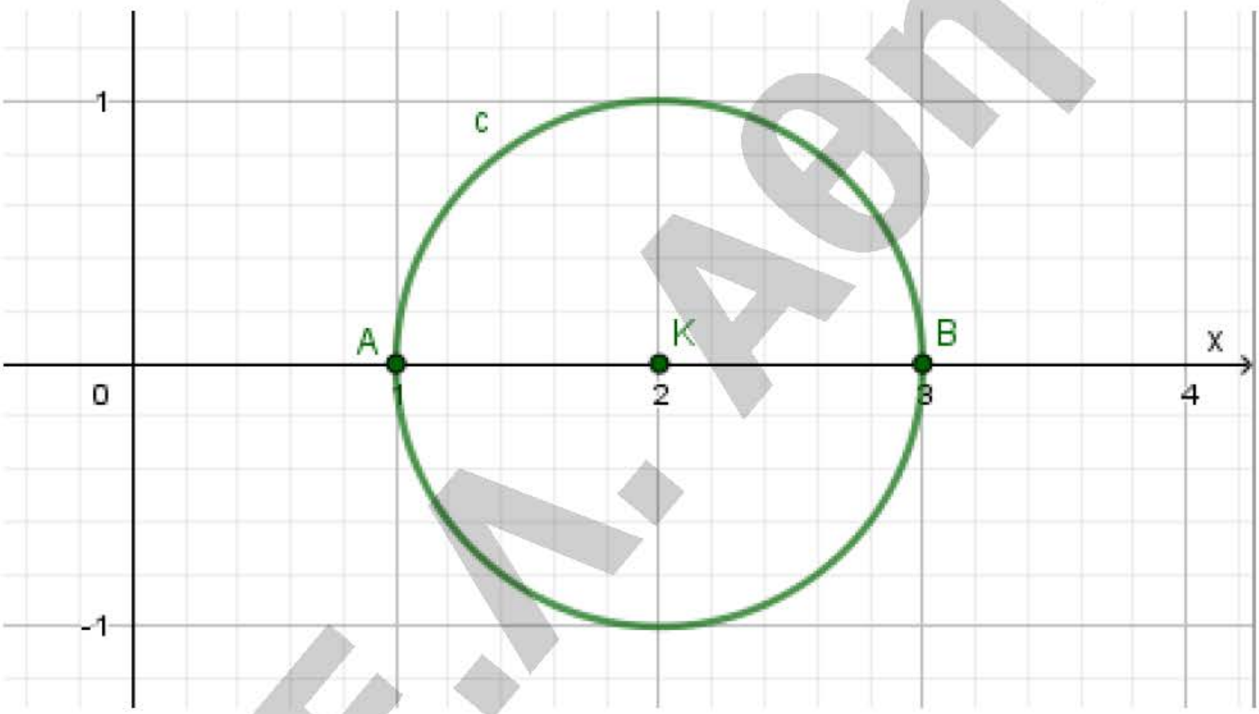
(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Ως γνωστόν, η εξίσωση $x \quad + y \quad + Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \quad + B \quad - 4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο, με κέντρο $K\left(-\frac{A}{\ }, -\frac{B}{\ }\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{\ }$.

Επειδή $(-4) \quad - 4 \cdot 3 = 4 > 0$, η (1) παριστάνει κύκλο. Τότε $-\frac{A}{\ } = 2$, $-\frac{B}{\ } = 0$ και $\rho = \frac{\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3}}{\ } = 1$. Το κέντρο του λοιπόν είναι το σημείο $K(2,0)$, η ακτίνα του είναι $\rho = 1$, οπότε η εξίσωση του γράφεται ισοδύναμα (c): $(x-2) \quad + y \quad = 1$ (2).

β) Η γραφική παράσταση του ζητούμενου κύκλου είναι η παρακάτω.



Εναλλακτική λύση:

Από την εξίσωση του κύκλου, για $y = 0$ έχουμε:

$$(x-2) \quad = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \text{ ή } x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = 1.$$

Επομένως ο κύκλος τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(1,0)$ και $B(3,0)$.

Για $x = 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη, οπότε ο κύκλος δεν έχει κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2-2x-4y+1=0$ με κέντρο $\mathrm{K}(1,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x+4y+1=0$

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho=2$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι $\frac{12}{5}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\rho=\dfrac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}=\dfrac{\sqrt{(-2)^2+(-4)^2-4\cdot 1}}{2}=2$.

β) Είναι $d(\mathrm{K},\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot 2+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{12}{5}$.

γ) Αφού $d(\mathrm{K},\varepsilon)=\dfrac{12}{5}>\rho$ η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία.

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις εξισώσεις $(\varepsilon_1): \mu x - y - \mu = 0$ και

$(\varepsilon_2): (\mu+1)x + (\mu - 1)\, y - \mu + 1 = 0,\ \mu \in R.$

α) Να αποδείξετε ότι οι (ε_1) και (ε_2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε τιμή της παραμέτρου μ.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξτε ότι η οξεία γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι 45^o για κάθε τιμή της παραμέτρου μ.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Κάθε μία από τις εξισώσεις (ε_1) και (ε_2) είναι στη μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$, εξίσωση που γνωρίζουμε ότι παριστάνει ευθεία όταν $|A| + |B| > 0$, δηλαδή όταν οι αριθμοί A και B δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν. Παρατηρούμε ότι στην (ε_1) είναι $B = -1 \neq 0$, ενώ στην (ε_2) είναι $A = \mu + 1, B = \mu - 1$ και $A = 0$ για $\mu = -1$, $B = 0$ για $\mu = 1$. Έτσι, δεν υπάρχει τιμή της παραμέτρου μ η οποία να μηδενίζει ταυτόχρονα τους συντελεστές A και B.

β) Γνωρίζουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (-B, A)$. Έτσι, θα είναι $\overrightarrow{\delta_1} = (1, \mu)$ παράλληλο στην (ε_1) και

$\overrightarrow{\delta_2} = (1 - \mu, 1 + \mu)$ παράλληλο στην (ε_2).

Οπότε η οξεία γωνία θ των (ε_1) και (ε_2) θα είναι ίση ή παραπληρωματική της οξείας γωνίας φ των διανυσμάτων $\overrightarrow{\delta_1}$ και $\overrightarrow{\delta_2}$. Αλλά $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\overrightarrow{\delta_1} \cdot \overrightarrow{\delta_2}}{|\overrightarrow{\delta_1}| \cdot |\overrightarrow{\delta_2}|}$.

Όμως $\overrightarrow{\delta_1} \cdot \overrightarrow{\delta_2} = 1 \cdot (1 - \mu) + \mu \cdot (1 + \mu) = 1 - \mu + \mu + \mu^2 = 1 + \mu^2$.

Επίσης $|\overrightarrow{\delta_2}| = \sqrt{(1 - \mu)^2 + (1 + \mu)^2} = \sqrt{1 - 2\mu + \mu^2 + 1 + 2\mu + \mu^2} = \sqrt{2 + 2\mu^2} = \sqrt{2(1 + \mu^2)} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \mu^2} = \sqrt{2} \cdot |\overrightarrow{\delta_1}|$.

Έτσι, $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1+\mu^2}{|\overrightarrow{\delta_1}| \cdot \sqrt{2} \cdot |\overrightarrow{\delta_1}|} = \frac{1+\mu^2}{\sqrt{2}|\overrightarrow{\delta_1}|^2} = \frac{1+\mu^2}{\sqrt{2}(1+\mu^2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ώστε $\hat{\theta} = 45^o$.

γ) Για να βρούμε που τέμνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (ε_1) και (ε_2). Ένας τρόπος είναι με την μέθοδο της αντικατάστασης. Από την (ε_1) παίρνουμε $y = \mu x - \mu$ οπότε αντικαθιστώντας στην (ε_2) παίρνουμε

$(\mu + 1)x + (\mu - 1)(\mu x - \mu) - \mu + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$(\mu + 1)x + \mu(\mu - 1)x - \mu(\mu - 1) - \mu + 1 = 0$, άρα

$(\mu + 1 + \mu^2 - \mu)x - \mu^2 + \mu - \mu + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}$.

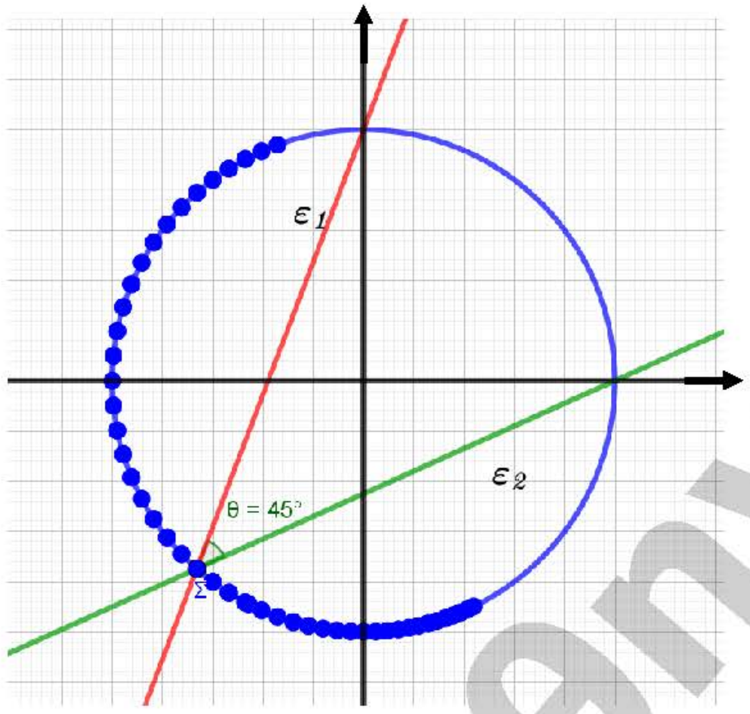
Τότε $y = \mu \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} - \mu = \frac{\mu^3 - \mu - \mu^3 - \mu}{\mu^2 + 1} = \frac{-2\mu}{\mu^2 + 1}$.

Έτσι τα σημεία τομής των (ε_1) και (ε_2) είναι τα $\Sigma_\mu\left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}, \frac{-2\mu}{\mu^2 + 1}\right)$ για κάθε τιμή της παραμέτρου μ.

Ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Σ_μ επαληθεύουν την εξίσωση αυτή.

Πράγματι: $\left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{-2\mu}{\mu^2 + 1}\right)^2 = \frac{\mu^4 - 2\mu^2 + 1 + 4\mu^2}{(1+\mu^2)^2} = \frac{\mu^4 + 2\mu^2 + 1}{(1+\mu^2)^2} = 1$.

Τα παραπάνω αποτυπώνονται στο παρακάτω σχήμα.



ε1
ε2
θ = 45°
Σ

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το Ο(0,0) και διέρχεται από το σημείο Α(1,2).

(Μονάδες 08)

β) Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=5$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενής του στο σημείο Α.

(Μονάδες 09)

ii. Να βρεθεί το σημείο Β, το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του Α σε αυτόν τον κύκλο.

(Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το Ο(0,0) είναι $x^2+y^2=\rho^2$ (1), όπου ρ η ακτίνα του κύκλου. Επειδή ο κύκλος διέρχεται από το σημείο Α(1,2) θα πρέπει οι συντεταγμένες του Α να επαληθεύουν την εξίσωση (1), δηλαδή $1^2+2^2=\rho^2$, άρα $\rho^2=5$.

Οπότε, η (1) γίνεται:

$$x^2+y^2=5$$

β)

i. Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (1) στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ είναι:

$$xx_1+yy_1=\rho^2 \quad (2)$$

Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2=5$ στο σημείο του $A(1,2)$ θα είναι:

$$x+2y=5$$

ii. Για να είναι το σημείο Β αντιδιαμετρικό του Α, θα πρέπει το κέντρο Ο να είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ. Επομένως θα ισχύουν:

$\begin{cases} x_O=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_O=\dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$ ή $\begin{cases} 0=\dfrac{1+x_B}{2} \\ 0=\dfrac{2+y_B}{2} \end{cases}$ ή $\begin{cases} 0=1+x_B \\ 0=2+y_B \end{cases}$, άρα $x_B=-1$ και $y_B=-2$.

Άρα είναι Β(-1,-2).

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου Α(-8, 1), Β(4, 5) και Γ(-4, 9).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Κ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

(Μονάδες 08)

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος (C) που έχει κέντρο το σημείο Κ και διάμετρο το τμήμα ΑΒ διέρχεται από το σημείο Γ. (Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (C). (Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α) Το μέσο Κ του τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

$$\text{Άρα } K\left(\frac{-8+4}{2},\frac{1+5}{2}\right) = (-2,\ 3).$$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι, το μέσο Κ του τμήματος ΑΒ απέχει από το σημείο Γ απόσταση ίση με το μισό του τμήματος ΑΒ. Δηλαδή ΚΓ = $\frac{AB}{2}$.

Το μήκος του τμήματος ΑΒ είναι

$$(AB) = \sqrt{(-8-4)^2+(1-5)^2} = \sqrt{144+16} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}\ .$$

Το μήκος του τμήματος ΚΓ είναι

$$(K\Gamma) = \sqrt{(-2+4)^2+(3-9)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} = \frac{AB}{2}\ .$$

γ) Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο Κ(-2,3) και η ακτίνα του είναι $\rho = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{10}$.

Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι

$$(C):\ (x+2)^2 + (y-3)^2 = 40.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία Α(1,1), Β(5,5).

α) Αν για το σημείο Μ(x,ψ) ισχύει $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 32$, να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο Μ βρίσκεται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $x^2 + \psi^2 - 6\psi - 6x + 10 = 0$ (1)

(Μονάδες 08)

ii. Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

(Μονάδες 03)

β) Αν το κέντρο του κύκλου είναι το Κ(3,3) και η ακτίνα του ρ = $2\sqrt{2}$:

i. Να διερευνήσετε για ποιες τιμές του λ η ευθεία (ε): λχ + ψ = 2 εφάπτεται του κύκλου (1). (Μονάδες 07)

ii. Υπάρχει τιμή του λ για την οποία η ευθεία (ε) σχηματίζει με την ΑΒ γωνία 45^{o};

(Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ

α)

i. $$\overrightarrow{AM}=(x-1,\psi-1)$$ $$\overrightarrow{BM}=(x-5,\psi-5).$$

$$\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{BM}^2=32\Rightarrow\sqrt{(x-1)^2+(\psi-1)^2}^{\,2}+\sqrt{(x-5)^2+(\psi-5)^2}^{\,2}=32$$

$$x^2-2x+1+\psi^2-2\psi+1+x^2-10x+25+\psi^2-10\psi+25=32$$

$2x^2+2\psi^2-12x-12\psi+20=0$ διαιρούμε με 2 και έχουμε

$x^2+\psi^2-6x-6\psi+10=0$ (1)

ii. Για να παριστάνει η εξίσωση $x^2+\psi^2+Ax+B\psi+\Gamma=0$ κύκλο θα πρέπει $A^2+B^2-4\Gamma>0$.

Από την (1) έχουμε Α = - 6, Β = - 6, Γ = 10.

$A^2+B^2-4\Gamma=6^2+6^2-4\cdot 10=32>0$. Επομένως πρόκειται περί κύκλου.

β)

i. Για να εφάπτεται ο κύκλος στην ευθεία , πρέπει η απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία να ισούται με την ακτίνα του κύκλου.

d(K,ε) = ρ δηλαδή $\dfrac{|3\lambda+3-2|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2\sqrt{2}\Rightarrow|3\lambda+1|=2\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+1}\Rightarrow(3\lambda+1)^2=8(\lambda^2+1)$.

$9\lambda^2+6\lambda+1=8\lambda^2+8\Rightarrow\lambda^2+6\lambda-7=0$.

Υπολογίζουμε τις ρίζες και έχουμε λ = -7 και λ = 1.

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΒ είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{\psi_B-\psi_A}{\chi_B-\chi_A}=\dfrac{5-1}{5-1}=1$. Ένα διάνυσμα παράλληλο στην ΑΒ είναι το $\vec{\delta}_1=(1,1)$ ενώ ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε) είναι το $\vec{\delta}_2=(1,-\lambda)$. Η γωνία των δύο ευθειών είναι η γωνία των δύο διανυσμάτων που είναι παράλληλα σε αυτές.

$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2}\right)=\sigma\upsilon\nu 45^\circ$ ή $\dfrac{\vec{\delta}_1\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1||\vec{\delta}_2|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\dfrac{(1,1)(1,-\lambda)}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{1^2+\lambda^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\dfrac{1-\lambda}{\sqrt{2}\sqrt{1+\lambda^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$2(1-\lambda)=\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{1+\lambda^2}$ ή $2(1-\lambda)=2\sqrt{1+\lambda^2}$ ή $1-\lambda=\sqrt{1+\lambda^2}$ ή $(1-\lambda)^2=\left(\sqrt{1+\lambda^2}\right)^2$

$1-2\lambda+\lambda^2=1+\lambda^2$ ή λ =0.

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος C με κέντρο $\mathrm{K}(1,2)$ και ακτίνα $\rho=2$ και ευθεία (ε) με εξίσωση $3x+4y-1=0$.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου $\mathrm{K}(1,2)$ από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.

(Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $C:(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

β) Είναι $d(\mathrm{K},\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot 2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

γ) Αφού $d(\mathrm{K},\varepsilon)=2=\rho$ η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (4-2k)x - 2(1+k)y + 5 - 2k = 0\ (\boldsymbol{I})$, όπου $k \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η $(\boldsymbol{I})$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $M(k-2, k+1)$ και ακτίνα $k\sqrt{2}$ για κάθε $k > 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει σε μια σταθερή ευθεία για κάθε $k > 0$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y = -x - 1$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου για κάθε $k > 0$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι η (I) είναι στη μορφή $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, με

$A^2+B^2-4\Gamma=(4-2k)^2+[-2(1+k)]^2-4\cdot(5-2k)=$

$16-16k+4k^2+4+8k+4k^2-20+8k=8k^2$.

Αφού $A^2+B^2-4\Gamma>0$, η (I) παριστάνει κύκλο με ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{8k^2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}k}{2}=k\sqrt{2}$ και κέντρο $M\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=M\left(-\frac{4-2\kappa}{2},-\frac{-2(1+k)}{2}\right)=M(k-2,k+1)$. Καθώς η παράμετρος k παίρνει άπειρες τιμές, έχουμε άπειρους κύκλους.

β) Ας είναι x η τετμημένη των σημείων M και y η τεταγμένη των σημείων M. Τότε: $x=k-2$, $y=k+1$. Ώστε $y=(x+2)+1$, άρα $y=x+3$, η εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία ανήκουν τα σημεία M.

γ) Προφανώς αρκεί να δείξουμε ότι η απόσταση των κέντρων Μ από την σταθερή ευθεία $(\varepsilon): x+y+1=0$ ισούται με την ακτίνα. Πράγματι:

$d(M,\varepsilon)=\frac{|1(k-2)+1(k+1)+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|2k|}{\sqrt{2}}=k\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4κx-2κy+4=0$ (1) με $κ\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $κ\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κάθε κύκλου.

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων.

(Μονάδες 7)

δ) Για $κ=1$ να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου της εξίσωσης (1) στο σημείο $Γ(2,2)$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, για να παριστάνει κύκλο μόνο όταν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$, όπου $A = -4\kappa, B = -2\kappa$ και $\Gamma = 4$.

Άρα $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16\kappa^2 + 4\kappa^2 - 16 = 20\kappa^2 - 16$ και

$$20\kappa^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow \kappa^2 > \frac{4}{5} \Leftrightarrow |\kappa| > \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \kappa < -\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ ή } \kappa > \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

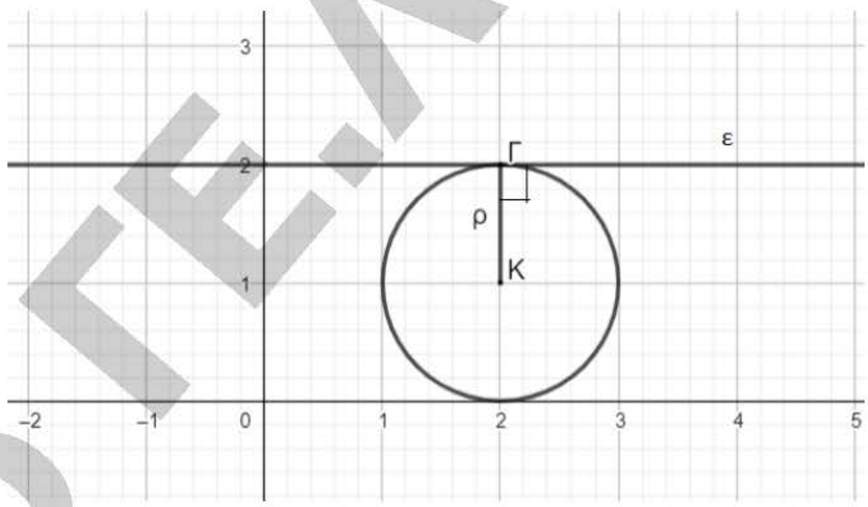
β) Η εξίσωση (1) είναι μία παραμετρική εξίσωση με παράμετρο κ και $\kappa \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, +\infty\right)$.

Για κάθε $\kappa \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, +\infty\right)$ έχουμε έναν κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, δηλαδή με $K(2\kappa, \kappa)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{20\kappa^2-16}}{2}$.

γ) Τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) παραμετρική εξίσωση, από το ερώτημα β) έχουν συντεταγμένες $(2\kappa, \kappa)$, δηλαδή $x = 2\kappa$ και $y = \kappa$.

Άρα $x = 2y \Leftrightarrow x - 2y = 0$ (2), δηλαδή τα κέντρα ανήκουν στην εξίσωση ευθείας (2).

δ) Για $\kappa = 1$ η εξίσωση (1) γίνεται $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$, με κέντρο $K(2,1)$ και ακτίνα $\rho = 1$.



Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων σχεδιάζουμε τον παραπάνω κύκλο.

Η ευθεία που είναι εφαπτομένη στον κύκλο στο σημείο Γ είναι η ευθεία που είναι κάθετη στο τμήμα $K\Gamma = \rho$ και παράλληλη στον άξονα x'x, γιατί Κ και Γ έχουν την ίδια τετμημένη. Άρα έχει εξίσωση $y = 2$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2x+4y=-1$.

α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(3, 2)$ βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το Μ.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση γράφεται

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$$

οπότε παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1, -2)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $(KM) > \rho$. Πραγματικά, είναι:

$$(KM) = \sqrt{(3-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20} > 2$$

οπότε το Μ βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

γ) Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το Μ είναι:

- Η κατακόρυφη ευθεία $x = 3$. Η ευθεία αυτή απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση $d = \dfrac{|1-3|}{\sqrt{1+0}} = 2 = \rho$. Άρα η κατακόρυφη ευθεία $x = 3$ εφάπτεται στον κύκλο.
- Όλες οι μη κατακόρυφες ευθείες που είναι της μορφής $y - 2 = \lambda(x-3)$ δηλαδή $\lambda x - y - 3\lambda + 2 = 0$. Μια τέτοια ευθεία εφάπτεται στον κύκλο, μόνο όταν η απόσταση d του κέντρου Κ από αυτή είναι ίση με την ακτίνα ρ. Είναι:

  $$d = 2 \Leftrightarrow \frac{|\lambda + 2 - 3\lambda + 2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|\lambda - 2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4}$$

  Επομένως η άλλη εφαπτομένη του κύκλου που διέρχεται από το Μ είναι η:

  $y - 2 = \dfrac{3}{4}(x-3)$ που γράφεται $y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{4}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι κοινές εφαπτόμενες των δυο κύκλων είναι οι ευθείες με εξισώσεις $x = 3$ και $y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{4}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1: x^2+y^2+2\sqrt{2}x+1=0 \text{ και}$$

$$C_2: x^2+y^2-6\sqrt{2}x+9=0.$$

α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν κέντρα $\mathrm{K}\left(-\sqrt{2},0\right)$, $\Lambda\left(3\sqrt{2},0\right)$ και ακτίνες $\rho_1=1$, $\rho_2=3$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχονται δύο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2.

(Μονάδες 10)

ii. Να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο σχήμα όπου να φαίνονται οι κύκλοι και οι δύο αυτές εφαπτόμενες.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $\mathrm{K}\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$, δηλαδή $\mathrm{K}\left(-\sqrt{2},0\right)$ και ακτίνα : $\rho_1=\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}=1$ και ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$, δηλαδή $\Lambda\left(3\sqrt{2},0\right)$ και ακτίνα : $\rho_2=\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}=3$.

β)

i. Μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $\mathrm{O}(0,0)$ και δεν είναι κάθετη στον $x'x$ άξονα έχει εξίσωση:

$$(\eta):\ y=\lambda x \Leftrightarrow y-\lambda x=0\,.$$

Η ευθεία (η) εφάπτεται και στους δύο κύκλους αν και μόνο αν οι αποστάσεις των κέντρων K και Λ από την ευθεία αυτή είναι ίσες με τις αντίστοιχες ακτίνες των κύκλων. Δηλαδή έχουμε:

$$d(\mathrm{K},\eta)=1 \qquad (1) \qquad \text{και}$$

$$d(\Lambda,\eta)=3 \qquad (2).$$

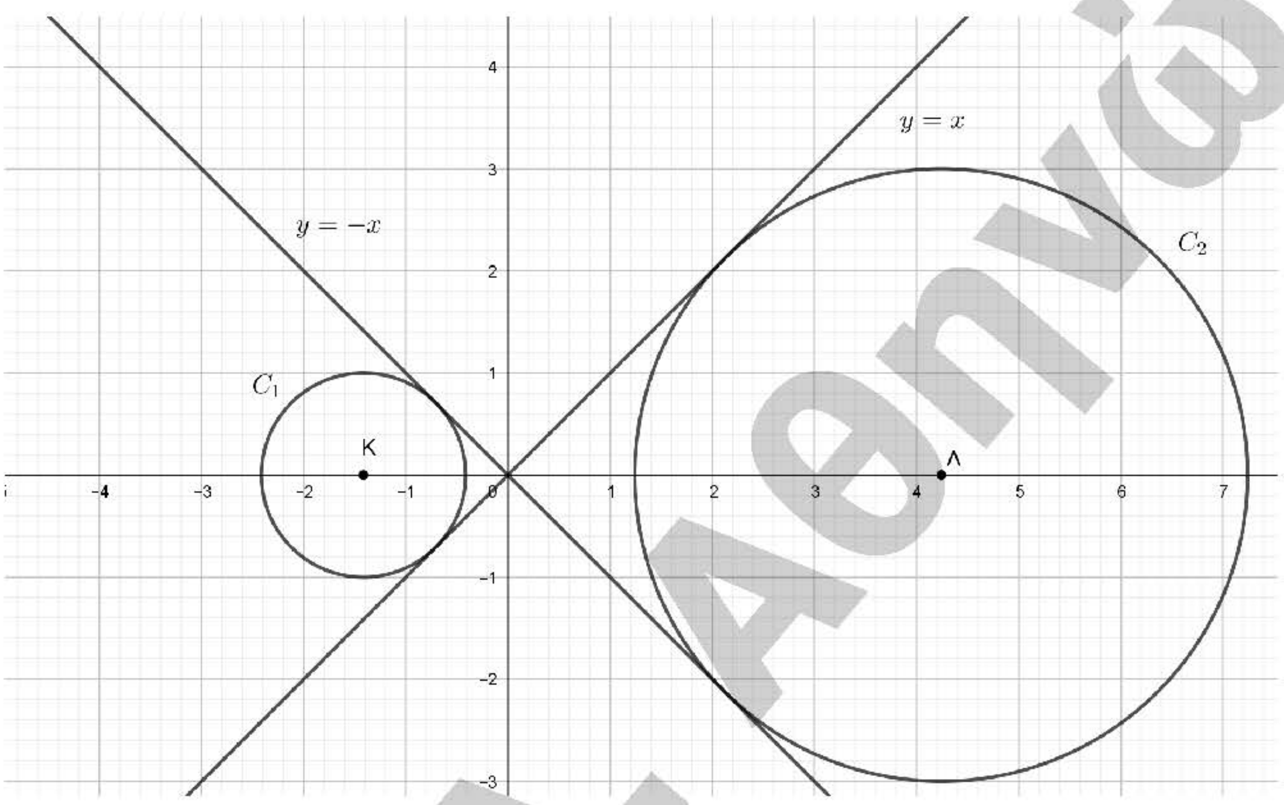
Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$\begin{cases}\dfrac{\left|0+\sqrt{2}\lambda\right|}{\sqrt{1+\lambda^2}}=1\\ \dfrac{\left|0-3\sqrt{2}\lambda\right|}{\sqrt{1+\lambda^2}}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left|\sqrt{2}\lambda\right|=\sqrt{1+\lambda^2}\\ \left|3\sqrt{2}\lambda\right|=3\sqrt{1+\lambda^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\lambda^2=1+\lambda^2\\ 18\lambda^2=9+9\lambda^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=\pm1\\ \lambda=\pm1\end{cases} \Leftrightarrow \lambda=\pm1\,.$$

Άρα, από την αρχή των αξόνων διέρχονται δυο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων, με εξισώσεις:

$$(\eta_1): y=-x \text{ και } (\eta_2): y=x\,.$$

ii. Η αρχή των αξόνων $(0,0)$ είναι εσωτερικό σημείο της διακέντρου $\mathrm{K}\Lambda$, διότι η $\mathrm{K}\Lambda$ είναι πάνω στον άξονα $x'x$ και έχει άκρα τα σημεία $\mathrm{K}\left(-\sqrt{2},0\right)$ και $\Lambda\left(3\sqrt{2},0\right)$. Επομένως οι εφαπτόμενες που βρήκαμε στο βi) ερώτημα είναι εσωτερικές, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ο κύκλος $C:(x-2)^2+(y+3)^2=5$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x+y+5=0$.

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες $(\eta_1),(\eta_2)$ που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε) και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών $(\eta_1),(\eta_2)$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C έχει κέντρο το $K(2,-3)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

β) Είναι $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|2\cdot 2+1\cdot(-3)+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|6|}{\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}>\sqrt{5}=\rho$ και αφού $d(K,\varepsilon)>\rho$ ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία.

γ) Κάθε ευθεία (η) παράλληλη στην (ε) έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με την ευθεία (ε), δηλαδή $\lambda_\eta=-2$. Έτσι $(\eta): y=-2x+\beta \Leftrightarrow 2x+y-\beta=0$

Για να εφάπτεται η ευθεία (η) στον κύκλο πρέπει και αρκεί να απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου δηλαδή

$$d(K,\eta)=\rho \Leftrightarrow \frac{|2\cdot 2+1\cdot(-3)-\beta|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|1-\beta|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |1-\beta|=5 \Leftrightarrow$$
$$1-\beta=5 \quad ή \quad 1-\beta=-5 \quad \Leftrightarrow \quad \beta=-4 \quad ή \quad \beta=6$$

Συνεπώς έχουμε δύο εφαπτομένες τις $\eta_1: 2x+y+4=0$ και $\eta_2: 2x+y-6=0$

όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

δ) Είναι $d(K,\eta_1)=d(K,\eta_2)=\rho$ δηλαδή το $K(2,-3)$ ισαπέχει από τις ευθείες $(\eta_1),(\eta_2)$ οπότε ανήκει στη μεσοπαράλληλή τους. Η ζητούμενη μεσοπαράλληλη (η_3) ως παράλληλη στις $(\eta_1),(\eta_2)$ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\eta_3}=-2$.

Τελικά η ζητούμενη μεσοπαράλληλη είναι η $(\eta_3): y+3=-2(x-2) \Leftrightarrow y=-2x+1$.