Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = \alpha \cdot x$ η οποία διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(16, \alpha + 4)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ της παραβολής.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 της παραβολής C η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_2: -x + 2y + 4 = 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου C_1 με κέντρο την κορυφή της παραβολής C ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία ε_1 του ερωτήματος γ).

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Αφού η παραβολή $C: y^2 = \alpha \cdot x$ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(16, \alpha+4)$ ισχύει:

$(\alpha+4)^2 = 16\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 8\alpha + 16 = 16\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 16 = 0 \Leftrightarrow (\alpha-4)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4$

Συνεπώς $C: y^2 = 4x$.

β) Για την παραβολή $C: y^2 = 4x$ ισχύει $2p = 4 \Leftrightarrow \frac{p}{2} = 1$, οπότε η εστία της παραβολής είναι η $\mathrm{E}(1,0)$ και η διευθετούσα δ έχει εξίσωση $x = -1$.

γ) Έστω $\mathrm{M}_1(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης ε_1 με την C. Αφού $\mathrm{M}_1 \in C$ ανήκει ισχύει ότι: $y_1^2 = 4x_1$ (1).

Η ζητούμενη εφαπτομένη ε_1 έχει εξίσωση $y \cdot y_1 = 2(x + x_1)$ και για να είναι παράλληλη στην $\varepsilon_2: -x + 2y + 4 = 0$ θα πρέπει

$$\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} \Leftrightarrow \frac{2}{y_1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y_1 = 4.$$

Τότε από την (1) έχουμε: $4^2 = 4x_1 \Leftrightarrow x_1 = 4$.

Επομένως το σημείο επαφής είναι το $\mathrm{M}_1(4,4)$ και

$$\varepsilon_1: y \cdot 4 = 2(x+4) \Leftrightarrow 2y = x + 4 \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0.$$

δ) Το κέντρο του κύκλου C_1 είναι η κορυφή της C δηλαδή το $\mathrm{O}(0,0)$.

Αφού η ευθεία ε_1 εφάπτεται του κύκλου C_1 για την ακτίνα ρ θα ισχύει

$$\rho = d(O, \varepsilon_1) = \frac{|0 - 2 \cdot 0 + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

και επομένως η εξίσωση του C_1 είναι

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{16}{5}.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και $M(x_0, y_0), y_0 > 0$, ένα σημείο της.

α) Αν Α είναι η προβολή του Μ στη διευθετούσα της παραβολής,

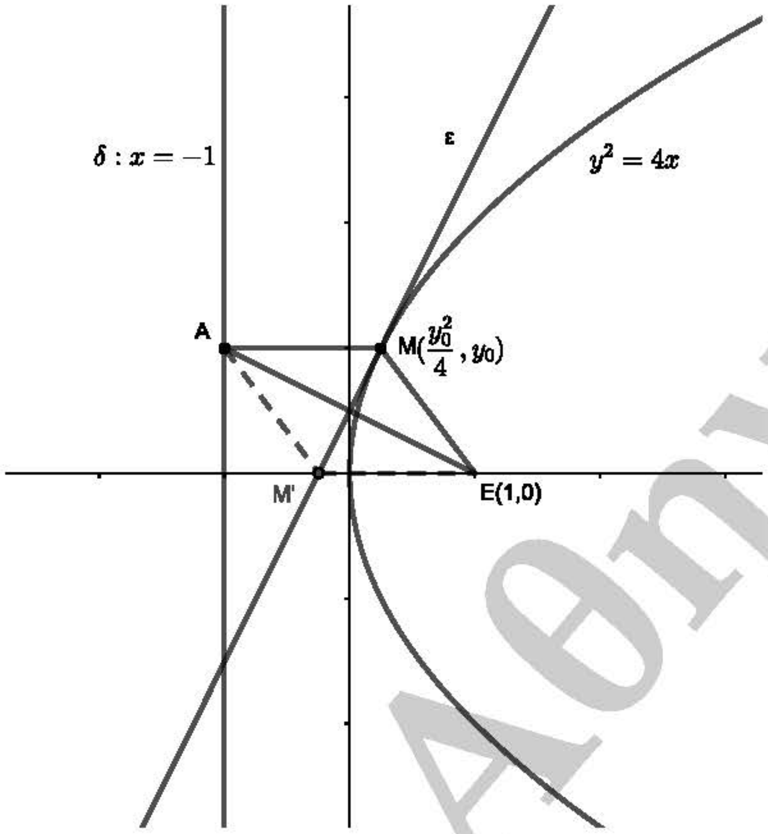
i. Να εκφράσετε τις συντεταγμένες των σημείων Μ και Α συναρτήσει της τεταγμένης y_0του σημείου Μ. (Μονάδες 05)

ii. Αν Ε είναι η εστία της παραβολής, να βρείτε το σημείο Μ για το οποίο (ΜΑΕ) = $\frac{5}{8}$ τ.μ.

(Μονάδες 12)

β) Αν $M(\frac{1}{4}, 1)$ και ε η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΜΕΜ΄ είναι ρόμβος, όπου Ε είναι η εστία της παραβολής και Μ΄ το σημείο που η ευθεία ε τέμνει τον άξονα x'x. (Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ



α)

i. Το σημείο $M(x_0, y_0)$ είναι σημείο της παραβολής, άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής. Δηλαδή $y_0{}^2 = 4 \cdot x_0$, άρα $x_0 = \frac{y_0^2}{4}$.

Επομένως οι συντεταγμένες του M είναι M($\frac{y_0{}^2}{4}$, y_0). Το σημείο A είναι η προβολή του M στη διευθετούσα της παραβολής που είναι η ευθεία (δ): $x = -1$. Άρα $A(-1, y_0)$.

ii. Για το εμβαδό του τριγώνου MAE έχουμε ότι (MAE) = $\frac{1}{2}$ $|\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AE})|$ (1), με $\overrightarrow{AM}$ = ($\frac{y_0{}^2}{4}$ +1, 0) και $\overrightarrow{AE} = (1 + 1, 0 - y_0) = (2, -y_0)$.

$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AE}) = \begin{vmatrix} \frac{y_0{}^2}{4} + 1 & 0 \\ 2 & -y_0 \end{vmatrix} = -\frac{y_0{}^3}{4} - y_0 = \frac{-y_0{}^3 - 4y_0}{4}$.

Επειδή (MAE) = $\frac{5}{8}$, η σχέση (1) γίνεται: $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} \left| \frac{-y_0{}^3 - 4y_0}{4} \right| \Leftrightarrow |\, y_0{}^3 + 4y_0 \,| = 5$. Όμως $y_0 > 0$ από την υπόθεση, άρα $y_0{}^3 + 4y_0 = 5 \Leftrightarrow y_0{}^3 + 4y_0 - 5 = 0$ (2). Εφαρμόζοντας σχήμα Horner με το 1, αφού το 1 αποτελεί ρίζα της εξίσωσης (2), η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: $(y_0 - 1)(y_0^2 + y_0 + 5) = 0$. Άρα $y_0 = 1$ η μοναδική λύση της εξίσωσης, αφού το τριώνυμο $y_0^2 + y_0 + 5$ έχει Δ = -19<0 και δεν έχει πραγματικές ρίζες. Επομένως το σημείο Μ είναι το $M(\frac{1}{4}, 1)$.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της παραβολής σε ένα σημείο της (x_1, y_1) είναι: $yy_1 = 2(x + x_1)$. Στο σημείο $M(\frac{1}{4}, 1)$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται: $y = 2(x + \frac{1}{4}) \Leftrightarrow 4x - 2y + 1 = 0$. Θέτοντας όπου $y = 0$ έχουμε $x = -\frac{1}{4}$, άρα $M'(-\frac{1}{4}, 0)$.

Για το τμήμα ΑΜ έχουμε: $AM \perp \delta, \delta \perp x'x$, άρα ΑΜ//x'x.

Επίσης (ΑΜ)= $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4} + 1\right)^2} = \frac{5}{4}$ και (ΕΜ΄)= $|1 + \frac{1}{4}| = \frac{5}{4}$. Δηλαδή τα τμήματα ΑΜ και ΕΜ΄ είναι ίσα και παράλληλα, άρα το τετράπλευρο ΑΜΕΜ΄ είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον το Μ είναι σημείο της παραβολής και ισαπέχει από την εστία και τη διευθετούσα, άρα ΜΕ = ΑΜ. Επομένως, το παραλληλόγραμμο έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, άρα είναι ρόμβος.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 3x$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y + 10 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία και να τις σχεδιάσετε.

(Μονάδες 8)

β) Έστω $M(x_o, y_o)$ ένα σημείο της παραβολής. Να αποδείξετε ότι η απόστασή του $d(M, \varepsilon)$ από την ευθεία είναι $d(M, \varepsilon) = \dfrac{(y_o + 2)^2 + 6}{5}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το σημείο της παραβολής που είναι το πιο κοντινό στην ευθεία.

(Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο που βρήκατε στο ερώτημα γ) είναι παράλληλη στην ευθεία ε.

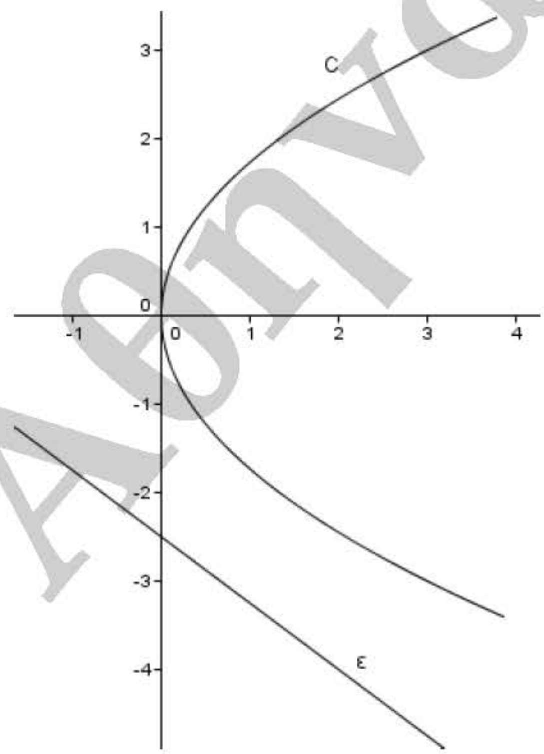
(Μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της παραβολής με την ευθεία, αν υπάρχουν, προσδιορίζονται από τη λύση του αντίστοιχου συστήματος. Είναι:

$$\begin{cases} y^2 = 3x \\ 3x + 4y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{10+4y}{3} \\ y^2 = -10 - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{10+4y}{3} \\ y^2 + 4y + 10 = 0 \end{cases}$$

Η εξίσωση $y^2 + 4y + 10 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -24 < 0$, οπότε είναι αδύνατη. Άρα η παραβολή και η ευθεία δεν έχουν κοινά σημεία. Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται η συγκεκριμένη κατάσταση.



β) Αν $M(x_o, y_o)$ είναι ένα σημείο της παραβολής $C: y^2 = 3x$, τότε ισχύει $y_o^2 = 3x_o$, οπότε $M\left(\dfrac{y_o^2}{3}, y_o\right)$. Η απόσταση του Μ από την ευθεία (ε) είναι:

$$d(M, \varepsilon) = \frac{\left|3\dfrac{y_o^2}{3} + 4y_o + 10\right|}{\sqrt{9+16}}$$

$$= \frac{|y_o^2 + 4y_o + 10|}{5} = \frac{(y_o + 2)^2 + 6}{5}$$

που είναι το ζητούμενο.

γ) Είναι φανερό ότι $d(M, \varepsilon) \geq \dfrac{6}{5}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $y_o = -2$. Έτσι, το πλησιέστερο στην ευθεία σημείο της παραβολής έχει τεταγμένη $y_o = -2$, οπότε

$$3x_o = y_o^2 \Leftrightarrow 3x_o = 4 \Leftrightarrow x_o = \frac{4}{3}$$

Επομένως, το πλησιέστερο στην ευθεία σημείο της παραβολής είναι το $M\left(\dfrac{4}{3}, -2\right)$.

δ) Η παραβολή έχει παράμετρο $p=\frac{3}{2}$, οπότε η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Μ έχει εξίσωση

$$-2y=\frac{3}{2}\left(x+\frac{4}{3}\right)\Leftrightarrow -2y=\frac{3}{2}x+2\Leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x-1$$

Ο συντελεστής της εφαπτομένης είναι $\lambda=-\frac{3}{4}$ και της δοσμένης εξίσωσης (ε) είναι $\lambda_{\varepsilon}=-\frac{3}{4}$, οπότε η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην (ε).

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, το 1ο τεταρτημόριο αντιστοιχεί σε μια θαλάσσια περιοχή και τα υπόλοιπα τεταρτημόρια σε στεριά. Οι ημιάξονες Ox, Oy οριοθετούν ένα λιμάνι. Ένα πλοίο ρυμουλκείται στο λιμάνι, δεμένο με δύο συρματόσχοινα στο ίδιο σημείο $\Pi(\kappa,\lambda)$ του πλοίου. Το ένα από τα δύο ρυμουλκά είναι σταθερό στο σημείο Ε(2,0) και το άλλο κινείται ώστε η θέση να περιγράφεται από το σημείο $\mathrm{P}(-2,\lambda)$. Η ρυμούλκηση γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε χρονική στιγμή της ρυμούλκησης να ισχύει $(\Pi\mathrm{E}) = (\Pi\mathrm{P})$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο $\mathrm{P}(-2,\lambda)$ κινείται σε σταθερή ευθεία (δ) της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

(Μονάδες 5)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί κάθε χρονική στιγμή της ρυμούλκησης είναι $\Pi\mathrm{P} \perp (\delta)$.

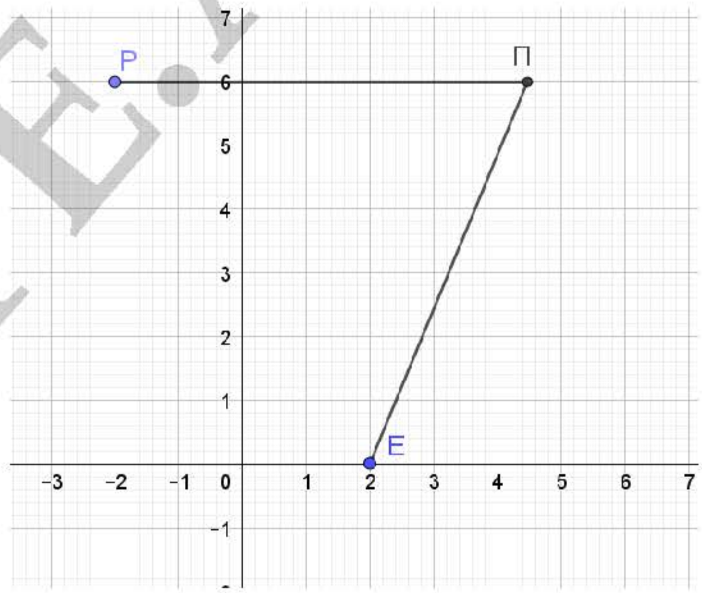
(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι η πορεία του $\Pi(\kappa,\lambda)$ είναι παραβολή C της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

(Μονάδες 7)

δ) Αν $y^2 = 8x$ η εξίσωση της παραβολής C να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή η μεσοκάθετος του EP εφάπτεται της παραβολής C στο σημείο Π.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Το σημείο $\mathrm{P}(-2,\lambda)$ έχει σταθερή τετμημένη -2 και μεταβαλλόμενη τεταγμένη οπότε κινείται στην ευθεία $(\delta): x=-2$.

Σημείωση: Επειδή το πλοίο κινείται στο 1ο τεταρτημόριο είναι $\lambda>0$, οπότε τελικά το $\mathrm{P}(-2,\lambda)$ κινείται στο τμήμα ευθείας $(\delta): x=-2$ που είναι πάνω από το xx'.

β) Τα σημεία $\mathrm{P}(-2,\lambda)$ και $\Pi(\kappa,\lambda)$ έχουν ίδια τεταγμένη οπότε $\Pi\mathrm{P}\,//\,xx'$ και άρα $\Pi\mathrm{P}\perp(\delta)$. Συνεπώς $(\Pi\mathrm{P})=d(\Pi,\delta)$.

γ) Αφού κάθε χρονική στιγμή ισχύει $(\Pi\mathrm{E})=(\Pi\mathrm{P})\Leftrightarrow(\Pi\mathrm{E})=d(\Pi,\delta)$ συμπεραίνουμε ότι το σημείο Π κινείται στην παραβολή C με εστία το σημείο Ε(2,0) και διευθετούσα την ευθεία (δ). Η παραβολή αυτή είναι της μορφής $y^2=2px$ με $\frac{p}{2}=2\Leftrightarrow p=4$. Τελικά $C: y^2=8x$.

γ) Η ευθεία EP έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\mathrm{EP}}=\frac{0-\lambda}{2+2}=-\frac{\lambda}{4}$ οπότε η μεσοκάθετός της (ε) θα έχει συντελεστή διεύθυνσης λ_ε και ισχύει $\lambda_{\mathrm{EP}}\cdot\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=\frac{4}{\lambda}$ (αφού $\lambda>0$). Το μέσο του EP είναι το $(\frac{-2+2}{2},\frac{\lambda+0}{2})$ δηλαδή το $(0,\frac{\lambda}{2})$.

Έτσι $(\varepsilon): y-\frac{\lambda}{2}=\frac{4}{\lambda}\cdot x\Leftrightarrow y=\frac{4}{\lambda}\cdot x+\frac{\lambda}{2}$.

Η (ε) εφάπτεται της C αν και μόνο αν το σύστημά τους καταλήγει σε εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα 0. Πράγματι, με αντικατάσταση της $y=\frac{4}{\lambda}\cdot x+\frac{\lambda}{2}$ στην εξίσωση $y^2=8x$, έχουμε:

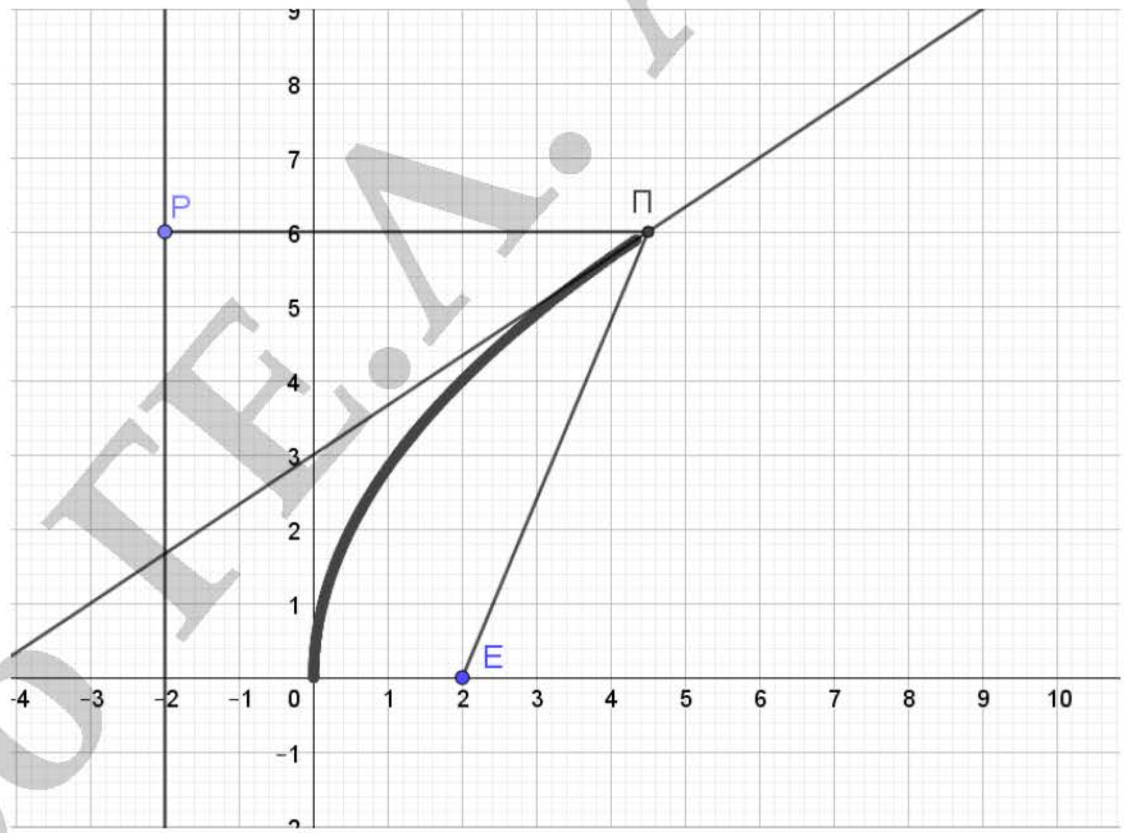
$$\left(\frac{4}{\lambda}\cdot x+\frac{\lambda}{2}\right)^2=8x \Leftrightarrow$$
$$\frac{16}{\lambda^2}x^2+4x+\frac{\lambda^2}{4}=8x \Leftrightarrow$$
$$\frac{16}{\lambda^2}x^2-4x+\frac{\lambda^2}{4}=0$$

που έχει διακρίνουσα $\Delta=(-4)^2-4\cdot\frac{16}{\lambda^2}\cdot\frac{\lambda^2}{4}=16-16=0$.

Το σημείο επαφής θα έχει τετμημένη $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{-4}{2\cdot\frac{16}{\lambda^2}}=\frac{\lambda^2}{8}$ και τεταγμένη

$y^2=8\cdot\frac{\lambda^2}{8}=\lambda^2$ και επειδή $\lambda>0$ έχουμε ότι $y=\lambda$. Συνεπώς το σημείο επαφής είναι το σημείο Π.

Σημείωση: Το συμπέρασμα του ερωτήματος γ) ισχύει για οποιαδήποτε παραβολή.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σημείο $\mathrm{E}(2,0)$, η ευθεία $\delta_1 : x = -2$ και τυχαίο σημείο $\mathrm{M}(x,y)$ του επιπέδου.

α)

i. Να βρείτε την απόσταση (ME) του σημείου $\mathrm{M}(x,y)$ από το $\mathrm{E}(2,0)$ ως συνάρτηση των x,y .

(Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε την απόσταση $d(\mathrm{M},\delta)$ του σημείου M από την ευθεία δ ως συνάρτηση των x,y.

(Μονάδες 8)

β) Αν ισχύει $(\mathrm{ME}) = d(\mathrm{M},\delta)$ να δείξετε ότι το σημείο M ανήκει στην παραβολή $y^2 = 8x$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α)

i. Είναι $(\mathrm{ME})=\sqrt{(x_{\mathrm{E}}-x_{\mathrm{M}})^2+(y_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{M}})^2}=\sqrt{(2-x)^2+(0-y)^2}=\sqrt{x^2-4x+4+y^2}$.

ii. Είναι $d(\mathrm{M},\delta)=\dfrac{|x+2|}{\sqrt{1^2+0^2}}=|x+2|$.

β) Έχουμε, με την βοήθεια των ερωτημάτων α) και β)

$$(\mathrm{ME})=d(\mathrm{M},\delta)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-4x+4+y^2}=|x+2|\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2=(x+2)^2\Leftrightarrow y^2=8x.$$

Δηλαδή, το σημείο M ανήκει στην παραβολή $y^2=8x$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $M(-2,2), E\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ και η ευθεία $\ \zeta)$ με εξίσωση $y=\frac{1}{2}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $\ \varepsilon_1)$ που διέρχεται από το σημείο M και σχηματίζει γωνία $45°$ με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την εξίσωση, που εκφράζει το σύνολο των σημείων του επιπέδου, που απέχουν ίση απόσταση από το σημείο E και την ευθεία (ζ).

(Μονάδες 06)

γ)

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης $\ n)$ της καμπύλης $C: x^2+2y=0$, που είναι παράλληλη στην ευθεία $\ \varepsilon_1)$, με εξίσωση $y=x+4$.

(Μονάδες 07)

ii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της καμπύλης C και των ευθειών $\ \varepsilon_1)$ και $\ n)$. Με τη βοήθεια του σχήματος (ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο) να αποδείξετε ότι η ελάχιστη απόσταση των σημείων της C από την ευθεία $\ \varepsilon_1)$ είναι $\frac{7\sqrt{2}}{4}$.

(Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία $\varepsilon_1)$ διέρχεται από το σημείο M και έχει κλίση $\lambda = \varepsilon\varphi 45° = 1$. Επομένως, έχει εξίσωση $\varepsilon_1)$: $y - 2 = 1(x + 2) \Leftrightarrow y = x + 4$.

β) Το σύνολο των σημείων του επιπέδου, που απέχουν ίση απόσταση από το σημείο E και την ευθεία (ζ), είναι παραβολή με εστία το σημείο $E\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ και διευθετούσα την ευθεία $\zeta)$: $y = \frac{1}{2}$.

Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ και παράμετρο $p = -1$. Επομένως η εξίσωσή της είναι η $x^2 = 2py \overset{p=-1}{\Longleftrightarrow} x^2 = -2y \Leftrightarrow x^2 + 2y = 0$.

γ)

i. Αν $K(x_1, y_1)$ είναι το σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη $n)$ της παραβολής έχει εξίσωση $xx_1 = p(y + y_1) \overset{p=-1}{\Longleftrightarrow} y = -x_1 x - y_1$. Τότε είναι:

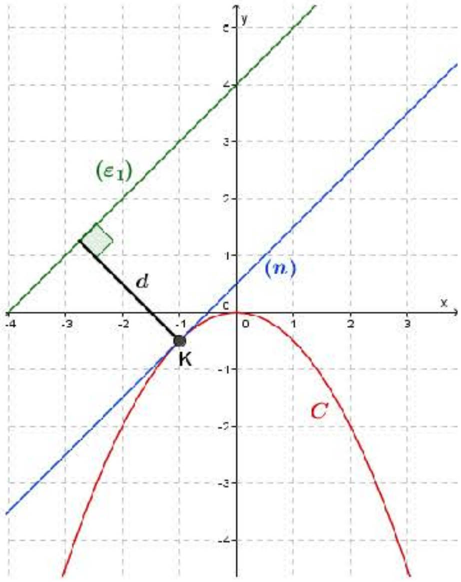
$$n)//(\varepsilon_1) \Rightarrow \lambda_n = \lambda_{\varepsilon_1} \Rightarrow -x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$$

Επιπλέον το $K(x_1, y_1)$ ανήκει στην παραβολή, επομένως ισχύει:

$x_1^2 + 2y_1 = 0 \overset{x_1=-1}{\Longrightarrow} y_1 = -\frac{1}{2}$.

Έτσι η εφαπτομένη έχει εξίσωση $n)$: $y = x + \frac{1}{2}$.

ii. 1^{ος} τρόπος: Με τη βοήθεια της παρακάτω γραφικής παράστασης:



Όπως φαίνεται στην γραφική παράσταση, η εφαπτομένη $n)$ και η παραβολή C έχουν μοναδικό κοινό σημείο το K. Επιπλέον ισχύει $n)//(\varepsilon_1)$, με την $\varepsilon_1)$ να βρίσκεται "πάνω" από την $n)$.

Έτσι, η ελάχιστη απόσταση των σημείων της C από την ευθεία $\varepsilon_1)$ είναι η απόσταση του σημείου $K\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ από την ευθεία (ε_1): $x-y+4=0$.

Έτσι είναι: $$d\big(K,(\varepsilon_1)\big)=\frac{\left|1\cdot\ -1)-1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{4}.$$

2ος τρόπος: Η αλγεβρική προσέγγιση

Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο της παραβολής C , το $\Lambda\left(x_0,\ \frac{-x_0^2}{2}\right)$ με $x_0\in\mathbb{R}$.

Η απόσταση του Λ από την ευθεία $\varepsilon_1)$ είναι: $d=d(x_0)=\dfrac{\left|1\cdot x_0-1\cdot\left(\frac{-x_0^2}{2}\right)+4\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|x_0^2+2x_0+8|}{2\sqrt{2}}$

Αλλά $x_0^2+2x_0+8>0$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$,

διότι έχει διακρίνουσα $\Delta=-28<0$ και $\alpha=1>0$.

Επομένως $$d(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ x_0^2+2x_0+8),\ x_0\in\mathbb{R}.$$

Η παραπάνω αποτελεί μία παραβολή που παρουσιάζει ελάχιστο για $x_0=\frac{-\beta}{2\alpha}=-1$ και ελάχιστη τιμή την $d(-1)=\frac{7}{2\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$.

ΘΕΜΑ 4

Ένα σημείο $A(x_A, y_A)$ της παραβολής $C: y^2 = 4x$ με $x_A > 0,\ y_A > 0$, έχει την εξής ιδιότητα: η ημιευθεία AE τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο Γ, έτσι όμως ώστε η εστία E της παραβολής C, να είναι το μέσο του τμήματος $A\Gamma$. Επίσης, από το σημείο A φέρνουμε κάθετη στην διευθετούσα (δ) και έστω B το σημείο τομής, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισόπλευρο.

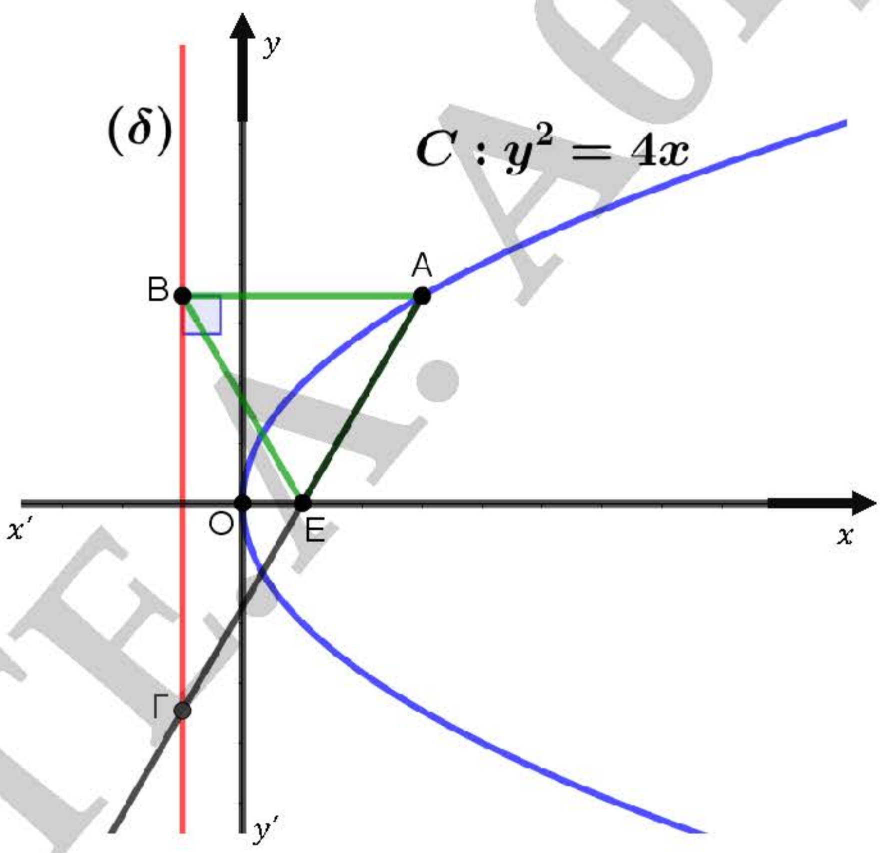
(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $x_A = 3$ και $y_A = 2\sqrt{3}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Από τον ορισμό της παραβολής, έχουμε ότι ΑΒ = ΑΕ. Αλλά η ΒΕ είναι διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα είναι $BE = \frac{A\Gamma}{2} = EA$.

Ώστε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισόπλευρο.

β) Γνωρίζουμε ότι η εστία Ε έχει συντεταγμένες $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, άρα είναι $E(1,0)$, αφού $2p = 4$, άρα $p = 2$. Η διευθετούσα έχει εξίσωση $(\delta): x = -\frac{p}{2} = -1$, άρα η τετμημένη του σημείου Γ θα είναι -1, δηλαδή $x_\Gamma = -1$. Αλλά $x_E = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{x_A + (-1)}{2}$, άρα $x_A = 3$.

Εναλλακτικά, θα είναι $B(-1, y_A)$, οπότε $AB = |x_A - (-1)| = |x_A + 1|$.

Ακόμα $BE = \sqrt{[1-(-1)]^2 + (0 - y_A)^2} = \sqrt{4 + {y_A}^2}$.

Όμως $AB^2 = BE^2 \Leftrightarrow (x_A + 1)^2 = 4 + {y_A}^2 \Leftrightarrow {x_A}^2 + 2x_A + 1 = 4 + 4x_A \Leftrightarrow$

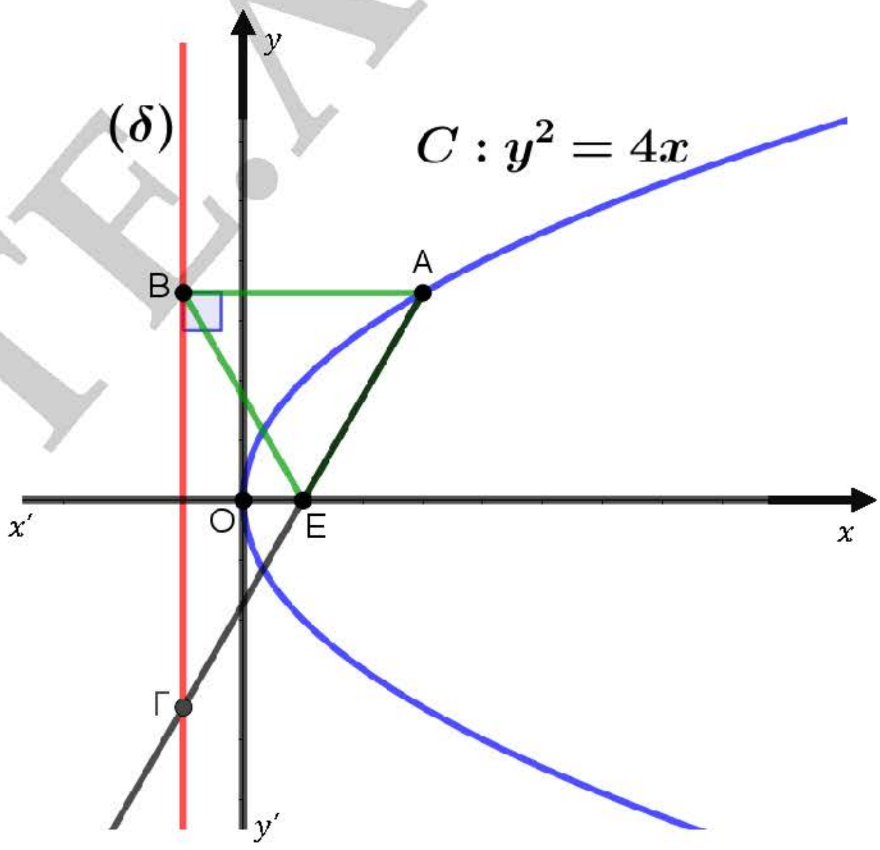
${x_A}^2 - 2x_A - 3 = 0$, εξίσωση που έχει ως ρίζες τους αριθμούς 3 και -1.

Ώστε $x_A = 3$, αφού $x_A > 0$.

Τότε ${y_A}^2 = 12$, άρα $y_A = 2\sqrt{3}$, αφού $y_A > 0$.

γ) Ζητάμε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ, το οποίο όμως είναι ορθογώνιο. Από το α) ερώτημα έχουμε ότι $EA = EB = E\Gamma$, άρα το Ε θα είναι το κέντρο του ζητούμενου κύκλου, ενώ η ακτίνα του θα είναι $AE = AB = |3 - (-1)| = 4$.

Έτσι, ο κύκλος έχει εξίσωση $(x-1)^2 + y^2 = 16$.



ΘΕΜΑ 4

Στην Golden Gate γέφυρα του San Francisco, το κεντρικό καλώδιο θεωρούμε προσεγγιστικά ότι αποτελεί τμήμα παραβολής. Οι δύο βασικοί πυλώνες απέχουν μεταξύ τους $1280\ m$, ενώ το ύψος του κάθε πυλώνα σε σχέση με το οδόστρωμα της γέφυρας είναι $160\ m$. Γνωρίζουμε ότι το κατώτερο σημείο του παραβολικού καλωδίου αγγίζει τη γέφυρα στο μέσο της απόστασης των δύο πυλώνων. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων, όπως στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής του κεντρικού καλωδίου σ' αυτό το σύστημα των αξόνων είναι $x^2 = 2560y$.

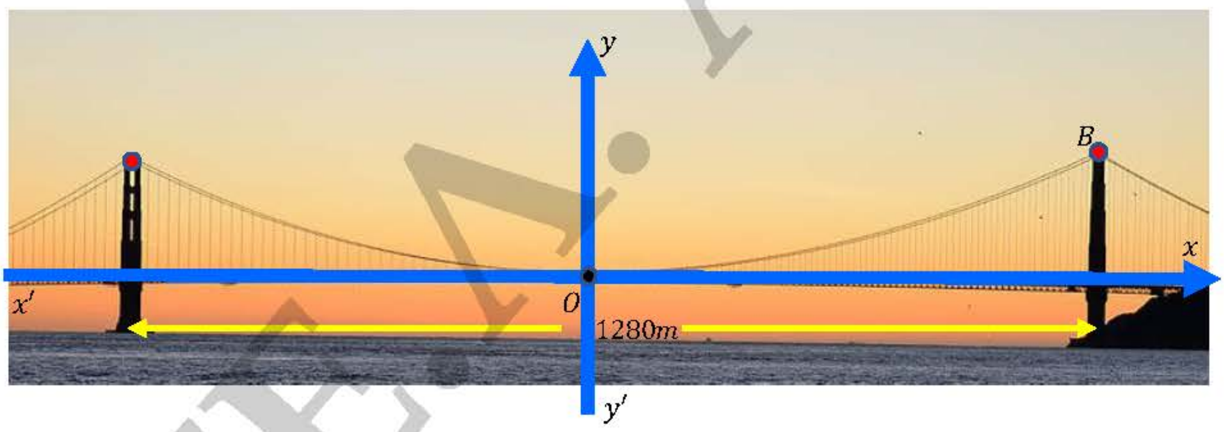
(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ) της παραβολής.

(Μονάδες 8)

γ) Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $B(640,160)$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι $E\Delta = EB$.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Αν θεωρήσουμε ότι το σημείο A είναι η βάση του δεξιού πυλώνα πάνω στη γέφυρα, τότε $(OA) = 640$, οπότε το σημείο B έχει συντεταγμένες $B(640,160)$.

Η εξίσωση της παραβολής είναι στη μορφή $x^2 = 2py$.

Άρα ισχύει $640^2 = 2p \cdot 160$, έτσι $2p = \frac{640 \cdot 640}{160} = 4 \cdot 640 = 2560$.

Άρα το παραβολικό καλώδιο έχει εξίσωση $x^2 = 2560y$.

β) Η εστία έχει συντεταγμένες $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$, δηλαδή $E\left(0, \frac{2560}{4}\right)$, άρα $E(0, 640)$.

Η διευθετούσα έχει εξίσωση (δ): $y = -\frac{p}{2} = -640$.

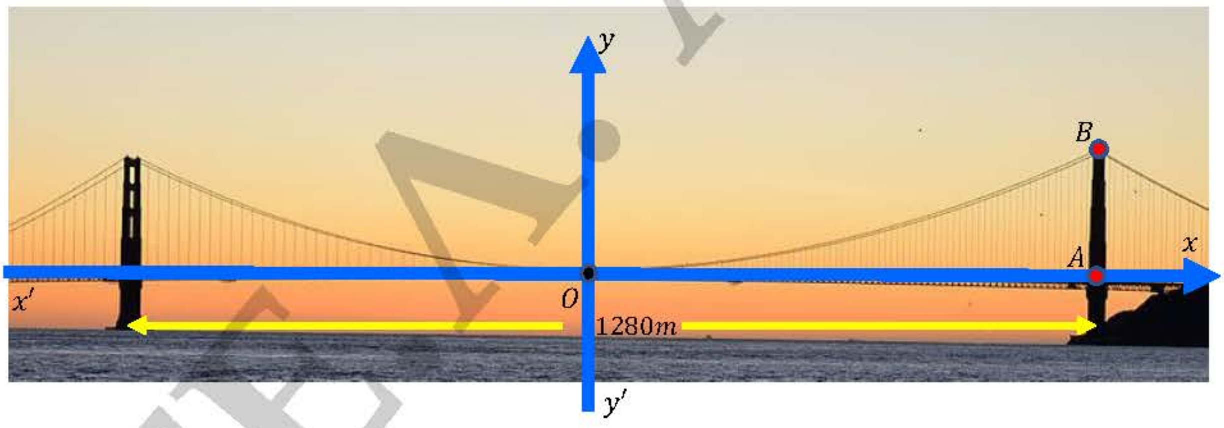
γ) Η εφαπτομένη έχει εξίσωση (ε): $x_1 x = p(y_1 + y)$, άρα $640x = 1280(160 + y)$.

Τελικά (ε): $y = \frac{1}{2}x - 160$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Delta(0, -160)$.

Ώστε $(E\Delta) = |640 - (-160)| = 800$.

Από τον ορισμό της παραβολής, η απόσταση του σημείου B της παραβολής από την εστία E ισούται με την απόσταση του B από την διευθετούσα (δ) η οποία έχει εξίσωση $y = -640$.

Έτσι, θα είναι $(EB) = |160 - (-640)| = 800$.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y=\frac{1}{2}x^2$ (1).

α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο Α(2,2).

(Μονάδες 10)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή (1), την εστία, τη διευθετούσα και την εφαπτομένη της παραβολής.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) της παραβολής είναι της μορφής $x^2 = 2py$, με εστία $E(0, \frac{p}{2})$ πάνω στον άξονα $y'y$ και διευθετούσα $\delta: y = -\frac{p}{2}$, κάθετη στον άξονα $y'y$.

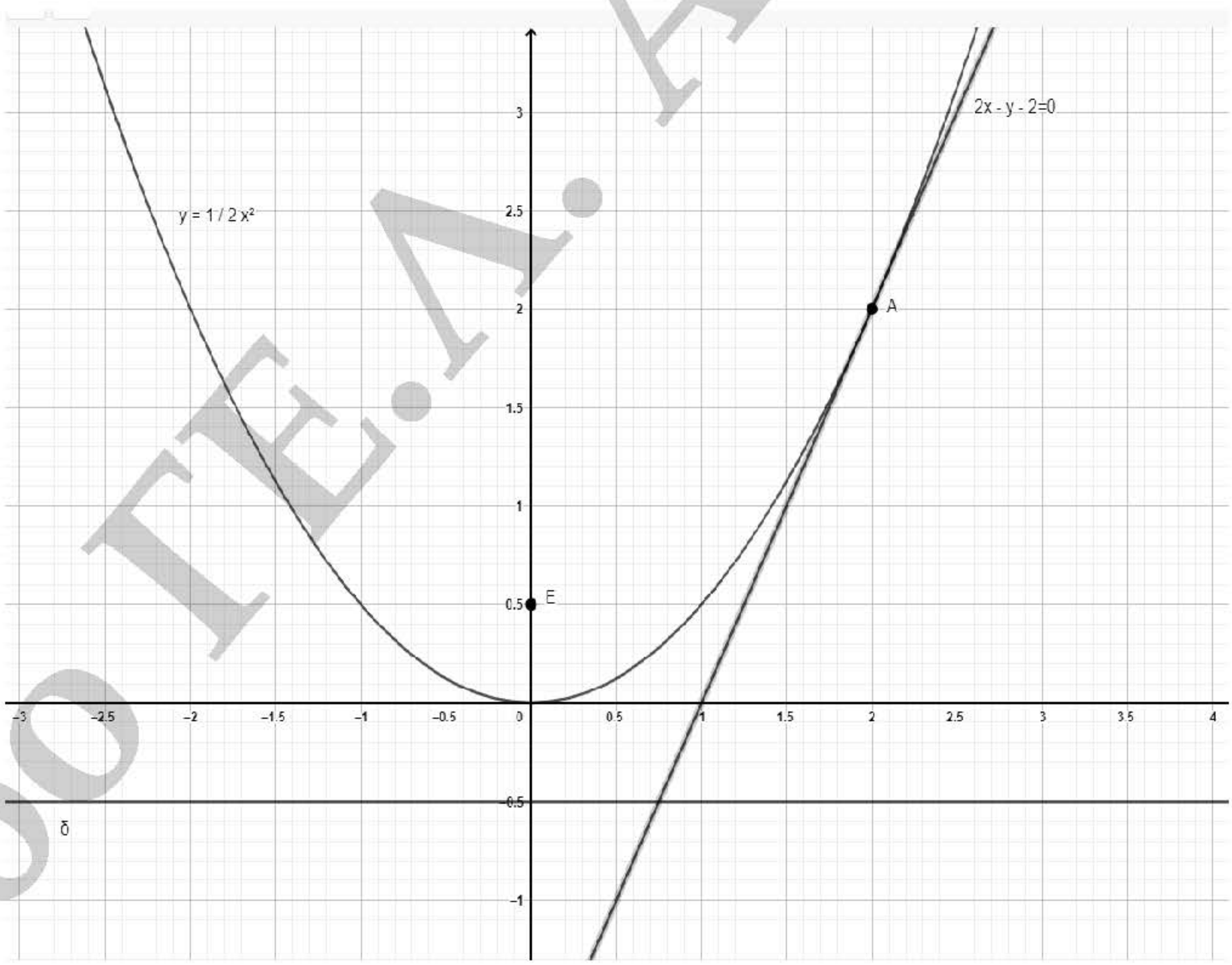
Άρα, από την εξίσωση της παραβολής έχουμε $y = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2y$, οπότε $p = 1$, επομένως η εστία θα είναι $E(0, \frac{1}{2})$ και η διευθετούσα $\delta: y = -\frac{1}{2}$.

β) Η μορφή της εξίσωσης της εφαπτομένης της παραβολής $x^2 = 2py$ σε ένα σημείο της (x_1, y_1) είναι $x \cdot x_1 = p(y + y_1)$.

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης της δοσμένης παραβολής στο σημείο $A(2,2)$ είναι

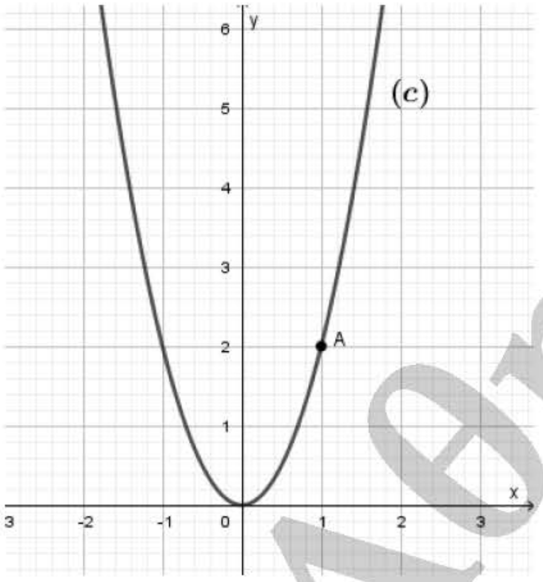
$$2x = y + 2 \Leftrightarrow 2x - y - 2 = 0.$$

γ) Η παραβολή (1), η εστία Ε, η διευθετούσα δ και η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $A(2,2)$ φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ 3

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραβολής $c)$, που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα της παραβολής.

(Μονάδες 04)

γ)

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης $\varepsilon)$ της παραβολής στο σημείο $A'(-1,2)$.

(Μονάδες 08)

ii. Να βρείτε το σημείο τομής της $\varepsilon)$ με τον άξονα $y'y$ και στη συνέχεια να την σχεδιάσετε.

(Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ

α) Ως γνωστόν, η παραβολή που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον $y'y$ έχει εξίσωση την $x^2 = 2py$. Επιπλέον, έχει εστία το σημείο $E\left(0,\frac{}{2}\right)$ και διευθετούσα την ευθεία $y = -\frac{}{2}$.

Επειδή η παραβολή διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ συμπεραίνουμε ότι οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της. Επομένως είναι: $1^2 = 2p \cdot 2 \Leftrightarrow p = \frac{1}{4}$

Άρα η εξίσωση της παραβολής είναι η $(c): x^2 = \frac{1}{2}y$.

Επίσης, η παραβολή έχει εστία το σημείο $E\left(0,\frac{1}{8}\right)$ και διευθετούσα την ευθεία $y = -\frac{1}{8}$.

β) Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$. Είναι γνωστό ότι τα συμμετρικά σημεία ως προς τον άξονα $y'y$ έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετη τετμημένη. Αν λοιπόν $A'(x,y)$ είναι το συμμετρικό σημείο του A, τότε είναι $A'(-1,2)$.

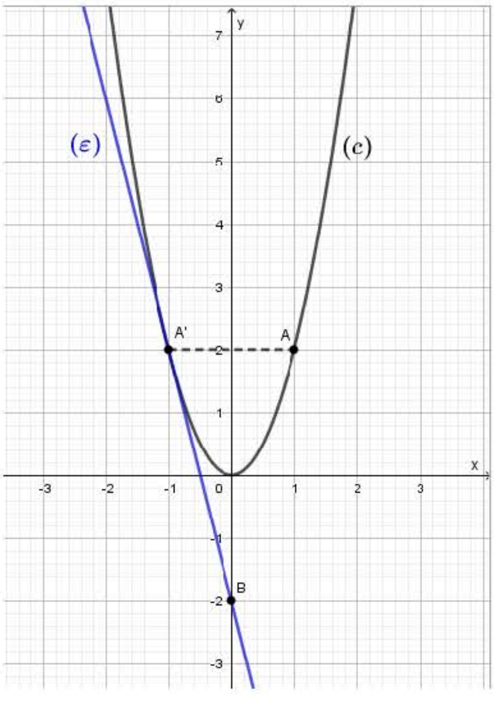
γ) i. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $x^2 = 2py$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι $x \cdot x_1 = p(y + y_1)$.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής (c): $x^2 = \frac{1}{2}y$ στο σημείο της $A'(-1,2)$, είναι:

$$x \cdot (-1) = \frac{1}{4}(y + 2) \Leftrightarrow -4x = y + 2 \Leftrightarrow y = -4x - 2$$

ii. Για $x = 0$, η (ε): $y = -4x - 2$ γίνεται $y = -4 \cdot 0 - 2 = -2$.

Επομένως, το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $B(0,-2)$. Για τον σχεδιασμό της ευθείας (ε) αρκεί να φέρουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A'(-1,2)$ και $B(0,-2)$.



ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $y \ = 4x$, η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο $A(4,4)$ και η AK κάθετη στην (ε). Μία φωτεινή ακτίνα (ζ), ακολουθώντας πορεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, προσπίπτουσα στο σημείο A και ανακλώμενη πάνω στην καμπύλη (που αντιστοιχεί σε παραβολικό κάτοπτρο) διέρχεται από το σημείο M. Αν γνωρίζετε ότι η γωνία θ_1 που σχηματίζει η προσπίπτουσα φωτεινή ακτίνα (ζ) με την (ε) και η γωνία θ_2 που σχηματίζει η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα AM με την (ε) είναι ίσες, τότε:

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και το σημείο B στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$.

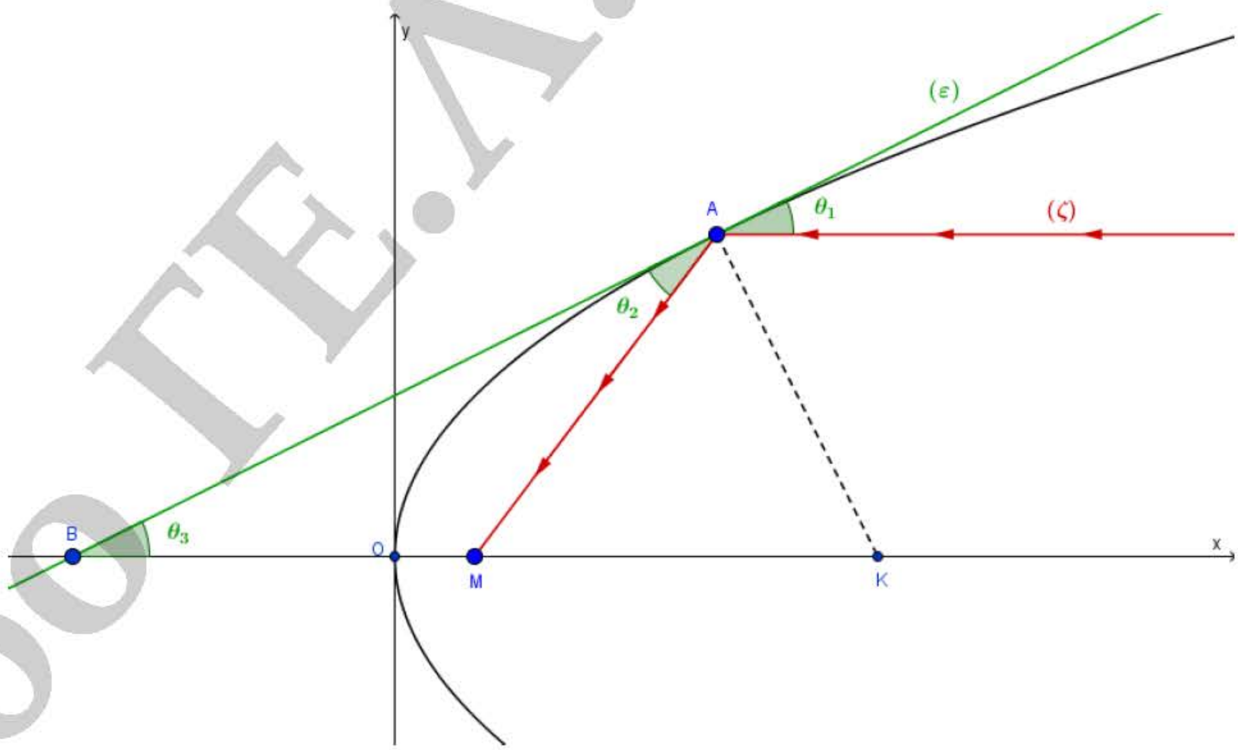
(Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 07)

δ) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ταυτίζεται με την εστία της παραβολής.

(Μονάδες 06)



ΛΥΣΗ

α) Η παραβολή με εξίσωση $y \ \ = 2px$ έχει άξονα τον $x'x$, εστία το σημείο $E\left(\frac{p}{\ },0\right)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta: x = -\frac{p}{\ }$.

Ως εκ τούτου, η $y^2 = 4x$, (με $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$) έχει άξονα τον $x'x$, εστία το σημείο $E(1,0)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta: x = -1$.

β) Η εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο $A(4,4)$ έχει εξίσωση

$$yy_1 = p(x + x_1) \Leftrightarrow 4y = 2(x + 4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\ }x + 2.$$

Θέτοντας στη συνέχεια όπου $y = 0$, έχουμε ότι $\frac{1}{\ }x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

Το σημείο B λοιπόν, στο οποίο η εφαπτομένη (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι το $B(-4,0)$.

γ) Αν θ_3 είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\theta_3 = \theta_2$. Πραγματικά είναι:

Οι γωνίες θ_1 και θ_3 είναι ίσες ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ευθειών (ζ) και $x'x$. Από την εκφώνηση του προβλήματος είναι γνωστόν ότι $\theta_1 = \theta$. Επομένως $\theta_3 = \theta$ και ως εκ τούτου το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές.

δ) Η θέση του σημείου $M(x,0)$ μπορεί να βρεθεί λύνοντας την εξίσωση:

$$(MA) = (MB) \Leftrightarrow \sqrt{(x-4) \ \ + 16} = |x+4| \Leftrightarrow (x-4) \ \ + 16 = (x+4) \ \ \Leftrightarrow x = 1$$

Άρα έχουμε $M(1,0)$.

Επομένως το ζητούμενο σημείο M ταυτίζεται με την εστία της παραβολής $E(1,0)$. Άρα η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα διέρχεται από την εστία της παραβολής.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραβολή C : $y^2 = 4x$ και η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y + \lambda^2 + 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής C.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία ε_λ που δεν διέρχεται από το $\mathrm{O}(0,0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ.

(Μονάδες 6)

δ) Έστω $\mathrm{M}(\alpha,\beta)$ σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στην παραπάνω διευθετούσα δ. Αν από το M διέρχεται μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ, να δείξετε ότι το M ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο την κορυφή της παραβολής C και διέρχεται από την εστία της E.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η παραβολή C έχει εξίσωση της μορφής $y^2=2px$ όπου $2p=4 \Leftrightarrow p=2$, οπότε η εστία της έχει συντεταγμένες $\left(\frac{p}{2},0\right)$ δηλαδή $\mathrm{E}(1,0)$ και διευθετούσα με εξίσωση $x=-\frac{p}{2}$ δηλαδή $\delta: x=-1$.

β) Η (1) είναι της μορφής $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ όπου $\mathrm{A}=\lambda^2-1, \mathrm{B}=2\lambda, \Gamma=\lambda^2+1$.

Είναι $\mathrm{A}=0 \Leftrightarrow \lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=\pm 1$ και $\mathrm{B}=2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0$. Επειδή δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζονται ταυτόχρονα τα A και B, η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Επίσης $\Gamma=\lambda^2+1>0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οπότε δεν διέρχεται από το $\mathrm{O}(0,0)$.

γ) Για $\lambda \neq 0$ η (1) παριστάνει ευθεία που δεν είναι παράλληλη στον yy' και επομένως δεν μπορεί να είναι η διευθετούσα δ.

Για $\lambda=0$ η (1) γίνεται $x=1$ που δεν είναι η διευθετούσα δ.

Συνεπώς η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ.

δ) Έστω $\mathrm{M}(\alpha,\beta)$ σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στη δ, δηλαδή $\alpha \neq -1$ και διέρχεται από αυτό μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ, δηλαδή οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την (1) για μία και μόνο τιμή του λ, συνεπώς ισχύει $\lambda^2\alpha-\alpha+2\lambda\beta+\lambda^2+1=0 \Leftrightarrow (\alpha+1)\lambda^2+2\lambda\beta+1-\alpha=0$ για μία και μόνο τιμή του λ. Η εξίσωση $(\alpha+1)\lambda^2+2\lambda\beta+1-\alpha=0$ είναι 2ου βαθμού ως προς λ, αφού $\alpha \neq -1$ και για να επαληθεύεται για μία μόνο τιμή του λ, πρέπει και αρκεί $\Delta=0$.

Είναι $\Delta=0 \Leftrightarrow (2\beta)^2-4(\alpha+1)(1-\alpha)=0 \Leftrightarrow 4\beta^2-4+4\alpha^2=0 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=1$

που σημαίνει ότι το σημείο $\mathrm{M}(\alpha,\beta)$ ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο, χωρίς το σημείο $(-1,0)$, αφού $\alpha \neq -1$. Ο κύκλος αυτός έχει κέντρο το Ο(0,0) δηλαδή την κορυφή της παραβολής C και ακτίνα $\rho=1$, οπότε διέρχεται από την εστία E, αφού $(\mathrm{OE})=1=\rho$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραβολή $C{:}x^2=4y$ και η ευθεία $\varepsilon{:}y=x-2$.

α) Να βρείτε την εστία Ε και τη διευθετούσα δ της παραβολής. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία. Στη συνέχεια σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις της παραβολής C και της ευθείας ε. (Μονάδες 8)

γ) Αν Mx,y) είναι σημείο της παραβολής , τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του Μ από την ευθεία ε είναι $d(M,\varepsilon)=\dfrac{\frac{1}{4}x^2-x+2}{\sqrt{2}}$

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ε καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου Μ της παραβολής που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία . (Μονάδες 6)

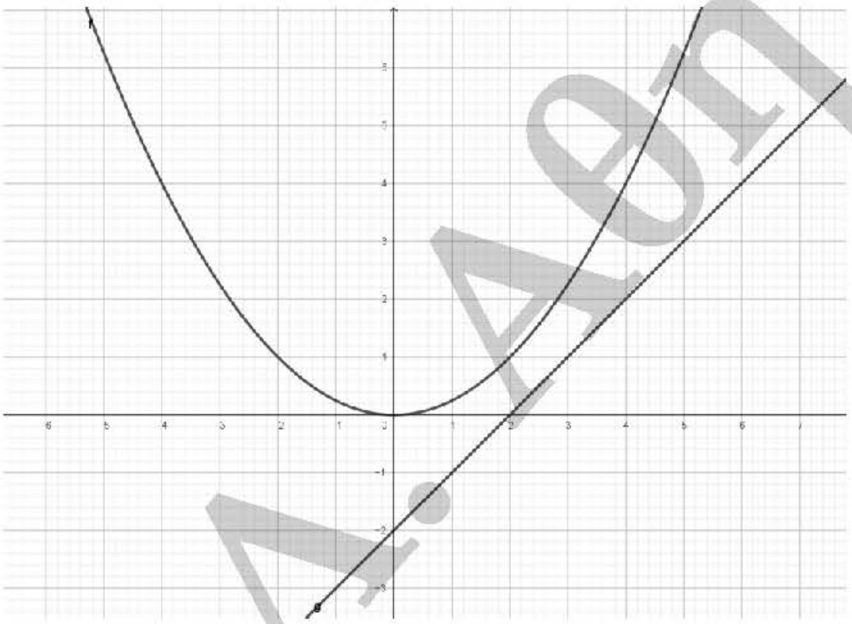
ΛΥΣΗ

α) Η παράμετρος της παραβολής είναι p=2, άρα η εστία είναι το $E(0,\frac{p}{2}) = (0,1)$ και η εξίσωση της διευθετούσας δ: y= -1

β) Τα κοινά σημεία της παραβολής και της ευθείας είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεών τους.

$$\begin{cases} x^2=4y \\ y=x-2 \end{cases}$$

Άρα $x^2=4(x-2)$ άρα $x^2-4x+8=0$ η οποία είναι αδύνατη εφόσον $\Delta<0$. Άρα η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία.



γ)

i. Έστω σημείο M(x,y) σημείο της παραβολής , οπότε $M(x,\frac{1}{4}x^2)$. Η απόστασή του από την ευθεία ε: x-y-2=0 είναι $d(M,\varepsilon) = \frac{|x-\frac{1}{4}x^2-2|}{\sqrt{2}} = \frac{|\frac{1}{4}x^2-x+2|}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{4}x^2-x+2}{\sqrt{2}}$, διότι η διακρίνουσα του τριωνύμου $\frac{1}{4}x^2-x+2$ είναι $\Delta=1-4\cdot\frac{1}{4}\cdot 2 = -1<0$ και άρα $\frac{1}{4}x^2-x+2>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

ii. $d(M,\varepsilon) = \frac{\frac{1}{4}x^2-x+2}{\sqrt{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ Η απόσταση του Μ από την ευθεία γίνεται ελάχιστη όταν $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x-1=0 \Leftrightarrow x=2$

Άρα η ελάχιστη απόσταση $d(M,\varepsilon) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ όταν x=2. Επομένως το ζητούμενο σημείο της παραβολής που απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε είναι το M(2,1).

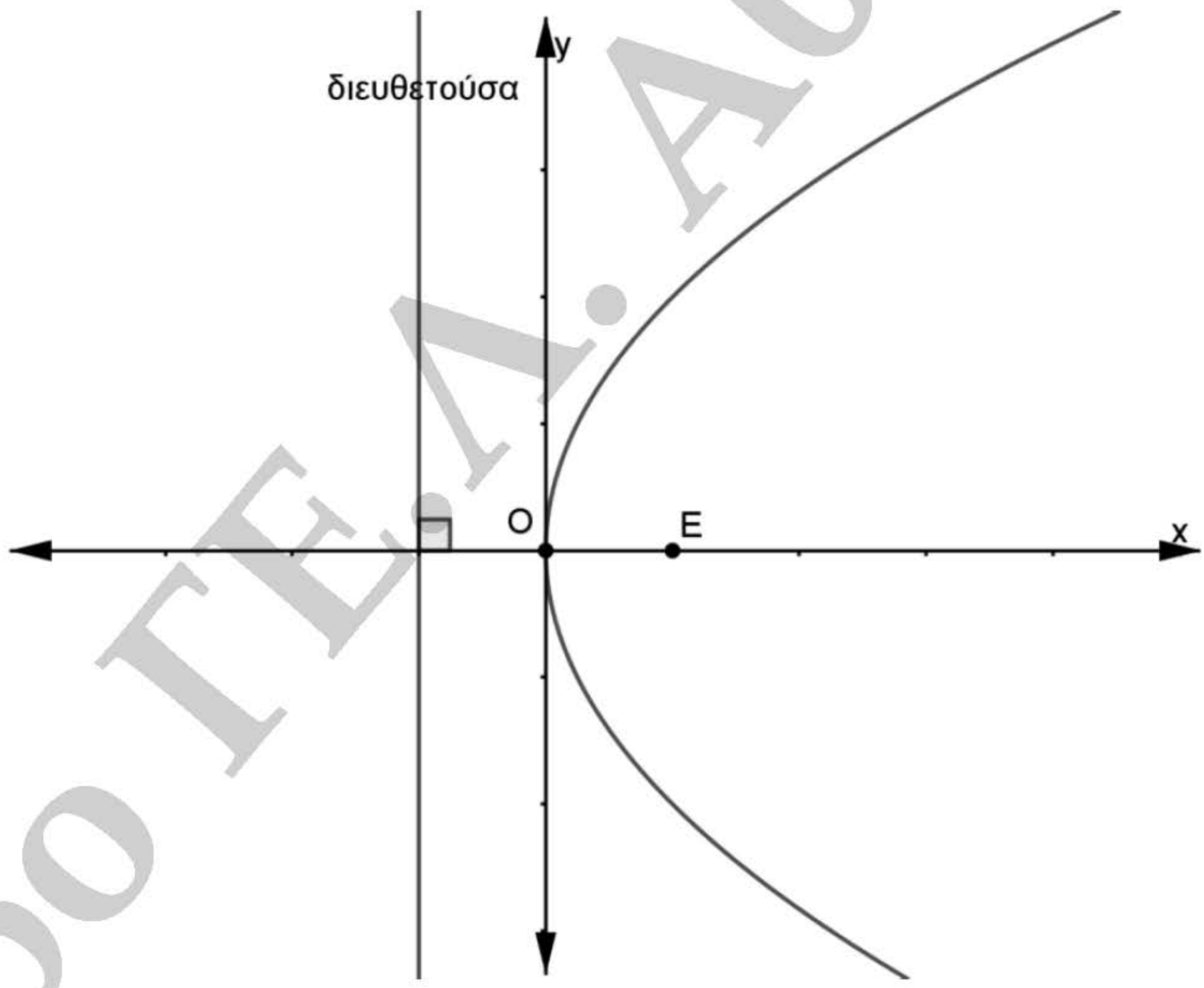
ΘΕΜΑ 4

Έστω παραβολή C με κορυφή την αρχή των αξόνων Ο και άξονα συμμετρίας τον x'x. Η απόσταση της εστίας Ε από την διευθετούσα δ της παραβολής C είναι 4 και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

α) Να δικαιολογήσετε ότι η εστία της είναι η Ε(2,0), η διευθετούσα της είναι η δ : x=-2 και η εξίσωσή της παραβολής είναι $y^2=8x$. Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της Α(2,4) είναι η ε: y=x+2 . (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην ευθεία ε στο σημείο της Α(2,4). (Μονάδες 7)

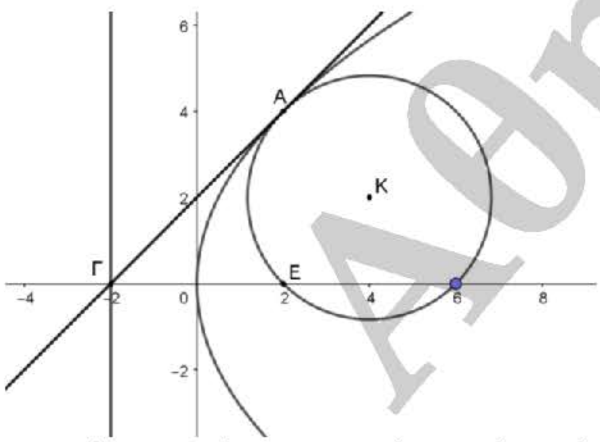


ΛΥΣΗ

α) Αν p η παράμετρος της παραβολής τότε η |p| παριστάνει την απόσταση της εστίας από την διευθετούσα και εφόσον η εστία της παραβολής μας είναι στο θετικό ημιάξονα x'x είναι p>0, άρα p=4. Οι συντεταγμένες της είναι Ε($\frac{p}{2}$,0) άρα Ε(2,0). Η διευθετούσα της έχει εξίσωση x= - $\frac{p}{2}$ = -2 και η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2=2px=8x$.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=2px$ στο σημείο της Α(x_1,y_1) είναι η $y_1y=p(x+x_1)$, άρα η εφαπτομένη της παραβολής μας στο σημείο της Α(2,4) είναι 4y=4(x+2) ή y=x+2

γ)



Αν Κ το κέντρο του ζητούμενου κύκλου η ευθεία ΚΑ είναι κάθετη στην ευθεία ε, επομένως το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των είναι -1 , και αφού ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι 1 άρα $\lambda_{AK}=-1$. Η ευθεία ΑΚ διέρχεται από το σημείο Α(2,4) και έχει συντελεστή διεύθυνσης -1 , επομένως η εξίσωσή της είναι y-4 = -(x-2) ή y = -x+6 . Το κέντρο Κ του κύκλου ισαπέχει από το σημείο Α(2,4) και την εστία Ε(2,0), άρα βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του τμήματος ΑΕ. Εφόσον τα σημεία Α και Ε έχουν την ίδια τετμημένη, η ευθεία ΑΕ είναι κάθετη στον άξονα x'x, x'x. Το μέσον του τμήματος ΑΕ είναι το σημείο (2,2). Έτσι η μεσοκάθετη του τμήματος ΑΕ είναι η ευθεία y=2 και επομένως η τεταγμένη του κέντρου Κ είναι y=2 . Θέτοντας y=2 στην εξίσωση της ευθείας ΑΚ έχουμε 2 = - x+6 άρα x=4 . Άρα το κέντρο του ζητούμενου κύκλου είναι το Κ(4,2). Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι $\rho=(KE)=\sqrt{((4-2)^2+2^2}=\sqrt{8}$.

'Αρα η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι $(x-4)^2+(y-2)^2=8$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραβολή (C) που έχει εξίσωση y^2 = 4x (1).

α) Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της Ε και την εξίσωση της ευθείας της διευθετούσας δ.

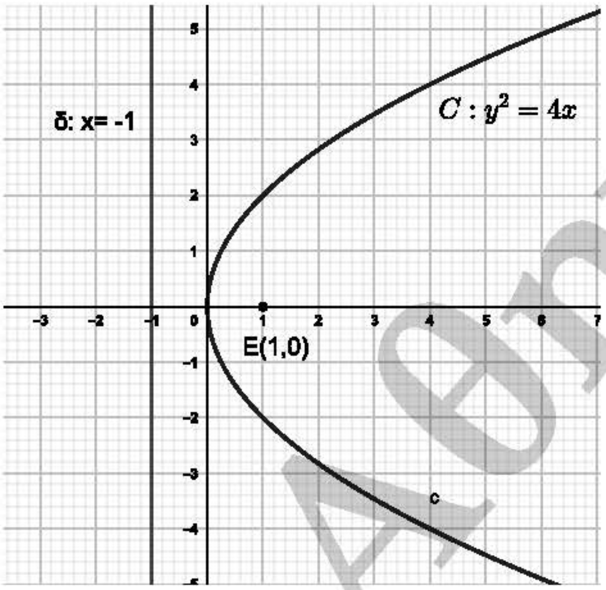
(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α(0 , 2) και εφάπτονται στην παραβολή που περιγράφει η εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

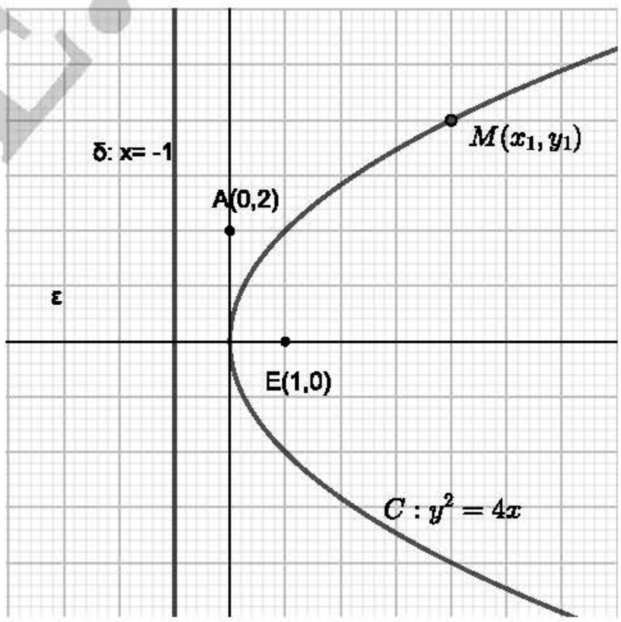
Η εξίσωση (1) της παραβολής είναι της μορφής y^2 = 2px, όπου 2p= 4, άρα p=2. Η μορφή αυτής της εξίσωσης παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται σε παραβολή με εστία στον άξονα x'x.

α)



Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια παραβολή. Η εστία Ε της παραβολής (C) έχει συντεταγμένες Ε($\frac{p}{2}$, 0) και η διευθετούσα της δ έχει εξίσωση x = - $\frac{p}{2}$. Επειδή p =2 η εστία έχει συντεταγμένες Ε(1, 0) και η διευθετούσα δ έχει εξίσωση δ : x = -1.

β)



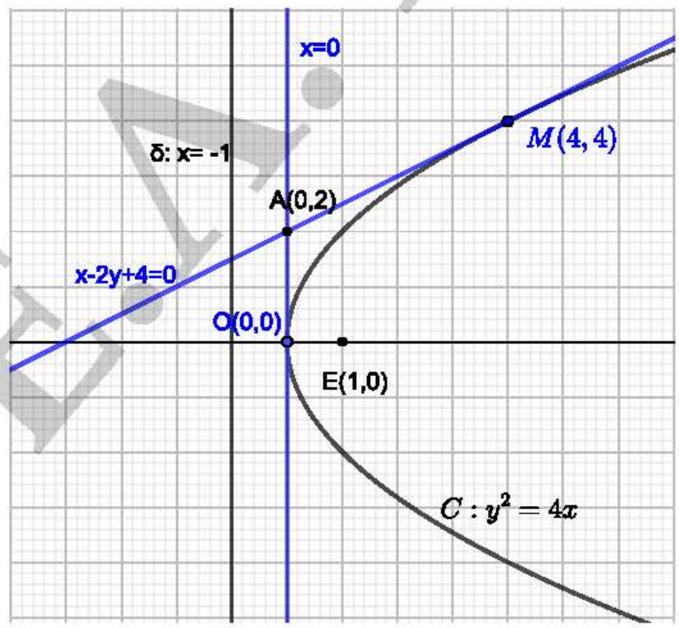
Το σημείο A(0, 2) είναι εξωτερικό σημείο της παραβολής, αφού είναι σημείο στον άξονα y'y και η παραβολή που μας δόθηκε έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα x'x και μοναδικό κοινό σημείο με τον άξονα y'y την κορυφή της O(0, 0). Θεωρούμε $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο M θα είναι της μορφής $y\, y_1 = p\,(x + x_1)$, και επειδή p =2 η εφαπτόμενη θα είναι ε: $y\, y_1 = 2\,(x + x_1)$. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο A(0 , 2), οπότε οι συντεταγμένες του σημείου A επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε. Ισχύει δηλαδή $2\, y_1 = 2(0 + x_1) \Leftrightarrow y_1 = x_1$ (2).

Επιπλέον το σημείο $M(x_1, y_1)$ είναι σημείο της παραβολής, οπότε ικανοποιεί την εξίσωση (1). Άρα ${y_1}^2 = 4 x_1$ (3), και λόγω της (2) η σχέση (3) μας δίνει ${x_1}^2 = 4\, x_1 \Leftrightarrow x_1 (x_1 - 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ ή $x_1 = 4$.

Για $x_1 = 0$ από τη σχέση (2) έχουμε $y_1 = 0$, οπότε η εφαπτόμενη έχει εξίσωση $0 = 2\,(x + 0) \Leftrightarrow x = 0$, δηλαδή ο άξονας y'y.

Για $x_1 = 4$ από τη σχέση (2) έχουμε $y_1 = 4$, οπότε η εφαπτόμενη έχει εξίσωση ε: $4y = 2\,(x + 4) \Leftrightarrow 2y = x + 4 \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0$.

Άρα οι δύο εφαπτόμενες της παραβολής που διέρχονται από το σημείο A(0, 2) είναι οι: x = 0 (άξονας y'y) και η ευθεία ε με εξίσωση $x - 2y + 4 = 0$.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση y^2 = 4x (1).

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται …………………. Η εστία της Ε, έχει συντεταγμένες Ε(….., …..) και η διευθετούσα έχει εξίσωση …………». (Μονάδες 09)

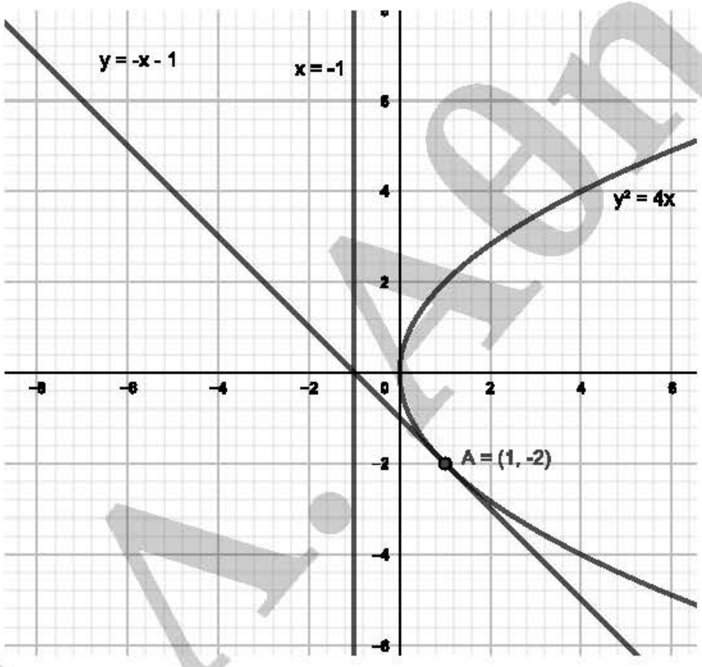
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην παραπάνω καμπύλη στο σημείο Α(1, -2). (Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα x'x είναι σημείο της διευθετούσας της παραβολής. (Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής y^2 = 2px, όπου 2p= 4, άρα p=2. Η μορφή αυτής της εξίσωσης παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται σε παραβολή με εστία στον άξονα x'x. Η Εστία της είναι το σημείο Ε($\frac{p}{2}$, 0) και η διευθετούσα της έχει εξίσωση x = -$\frac{p}{2}$.

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται **παραβολή.** Η εστία της Ε, έχει συντεταγμένες Ε(**1, 0**) και η διευθετούσα έχει εξίσωση **x = -1** ».



β) Η εφαπτόμενη ευθεία σε σημείο με συντεταγμένες (x_1, y_1) της παραβολής είναι της μορφής : $yy_1=p(x+x_1)$ και επειδή p =2 η εφαπτόμενη ε θα είναι ε: $yy_1=2(x+x_1)$. Δίνεται το σημείο επαφής Α(1, -2), οπότε η εξίσωση της ευθείας ε για x_1 = 1 και y_1 = -2 θα είναι ε: -2y= 2 (x +1) ή ε: y = -x -1.

γ) Για να βρω το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα x'x θέτω στην εξίσωση της ευθείας ε όπου y = 0. Οπότε έχω -x -1 = 0 ή x = -1, δηλαδή το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα x'x είναι το σημείο (-1,0), το οποίο είναι σημείο της διευθετούσας αφού η εξίσωση της διευθετούσας είναι η x = -1.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παραβολή (C) με εξίσωση

$$y^2 = x \qquad (1)$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας Ε και την εξίσωση της διευθετούσας (δ).

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Α(1,-1) είναι σημείο της παραβολής.

(Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο της Α(1,-1).

(Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α) Αρχικά υπολογίζουμε την παράμετρο p της παραβολής. Είναι:

$$2p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$$

Η εστία Ε της παραβολής έχει συντεταγμένες

$$E\left(\frac{p}{2},0\right) = \left(\frac{1}{4},0\right)$$

Η διευθετούσα (δ) της παραβολής έχει εξίσωση

$$x = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{4}$$

β) Εξετάζουμε αν οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής. Για $x = 1$ και $y = -1$ είναι:

$$(-1)^2 = 1$$

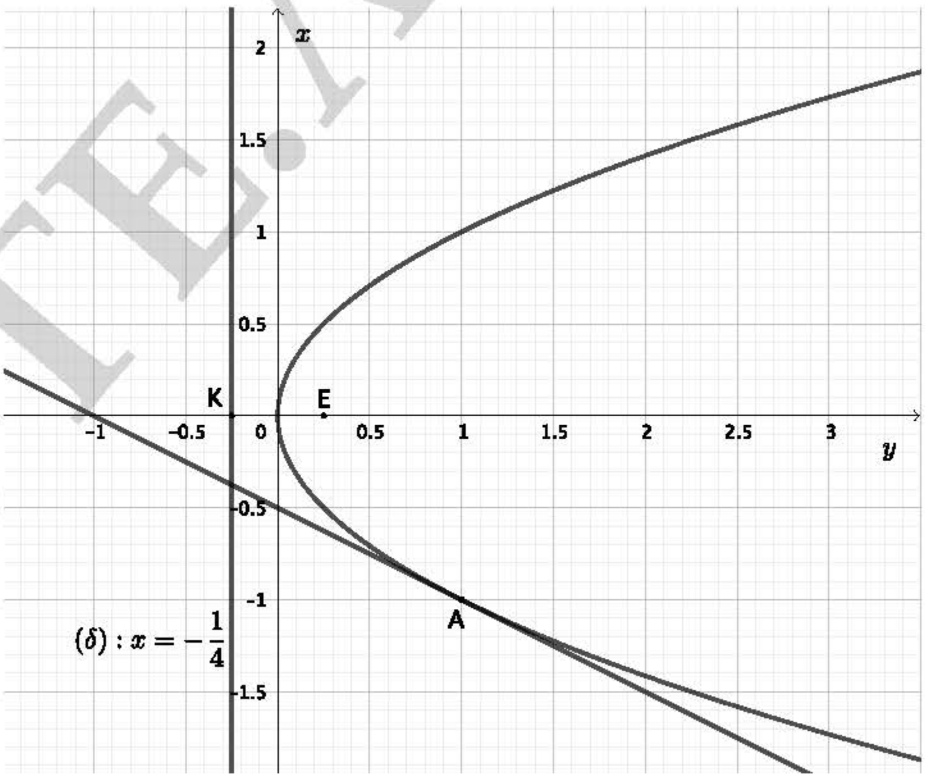
Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, οπότε το σημείο Α είναι σημείο της παραβολής.

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ είναι:

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

Αφού δίνεται Α(1,-1), η ζητούμενη εξίσωση θα είναι:

$$-1\cdot y = \frac{1}{2}(x + 1) \quad ή \quad x + 2y + 1 = 0$$



ΘΕΜΑ 2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.

α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(0,3)$ και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της παραβολής στα σημεία Α(6,3) και Β(-6,3), αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$. (Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2). (Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

α) Για την παραβολή $x^2 = 12y$ ή $x^2 = 2 \cdot 6y$ το $p = 6$, άρα η εστία της είναι το $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ ή $E(0, 3)$.

Το σημείο $(x_0, 3)$ ανήκει στην παραβολή, άρα:

$$x_0^2 = 12 \cdot 3 \text{ ή } x_0^2 = 36 \text{ ή } (x_0 = 6 \text{ ή } x_0 = -6)$$

Επομένως $A(6, 3)$ και $B(-6, 3)$ είναι τα ζητούμενα σημεία.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της (x_1, y_1) έχει εξίσωση:

$$xx_1 = p(y + y_1)$$

Για την (ε_1) με σημείο επαφής το $A(6, 3)$ αντικαθιστούμε ως x_1 και y_1 τις συντεταγμένες του σημείου Α και $p = 6$:

$$6x = 6(y + 3) \text{ ή } 6x = 6y + 18 \text{ ή } x = y + 3 \text{ ή } y = x - 3$$

Για την (ε_2) με σημείο επαφής το $B(-6, 3)$ αντικαθιστούμε ως x_1 και y_1 τις συντεταγμένες του σημείου Β και $p = 6$:

$$-6x = 6(y + 3) \text{ ή } -6x = 6y + 18 \text{ ή } -x = y + 3 \text{ ή } y = -x - 3$$

γ) Βρίσκουμε το σημείο τομής των (ε_1): $y = x - 3$ και (ε_2): $y = -x - 3$ λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = -x - 3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = x - 3 \\ 2y = -6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} -3 = x - 3 \\ y = -3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) είναι το σημείο $(0, -3)$.

ΘΕΜΑ 2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x΄x, κορυφή O(0,0) και εστία E(2,0), όπως στο παρακάτω σχήμα. Το σημείο A της παραβολής έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy.

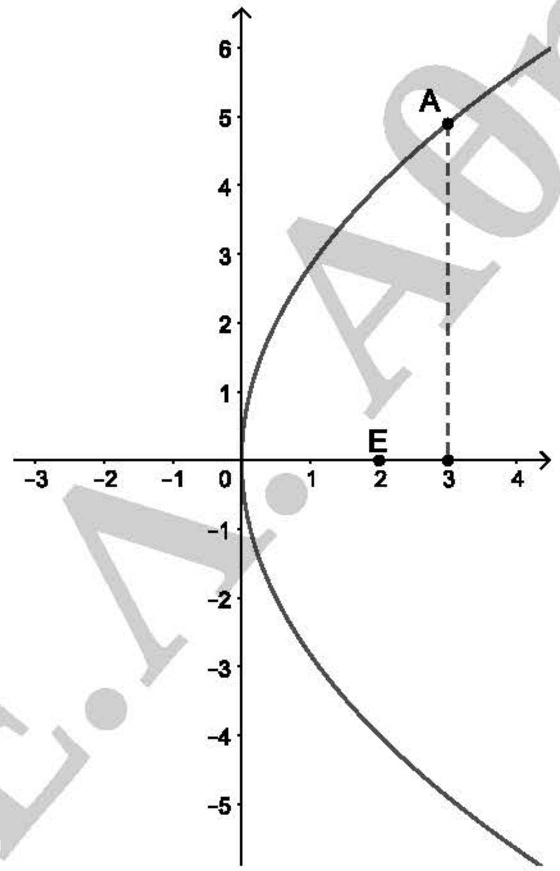
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και ότι $A(3, 2\sqrt{6})$.

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα (δ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της.

(Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο A. (Μονάδες 09)



ΛΥΣΗ

α) Η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x΄x και κορυφή O(0,0) έχει εξίσωση $y^2 = 2px$ και εστία $E(\frac{p}{2}, 0)$.

Άρα $\frac{p}{2} = 2$ ή $p = 4$ και η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 2 \cdot 4 \cdot x$ ή $y^2 = 8x$.

Το σημείο $A(3, y_A)$ της παραβολής έχει $y_A > 0$, εφόσον βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy. Οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής.

Επομένως ${y_A}^2 = 8 \cdot 3$ ή ${y_A}^2 = 24$ ή $y_A = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

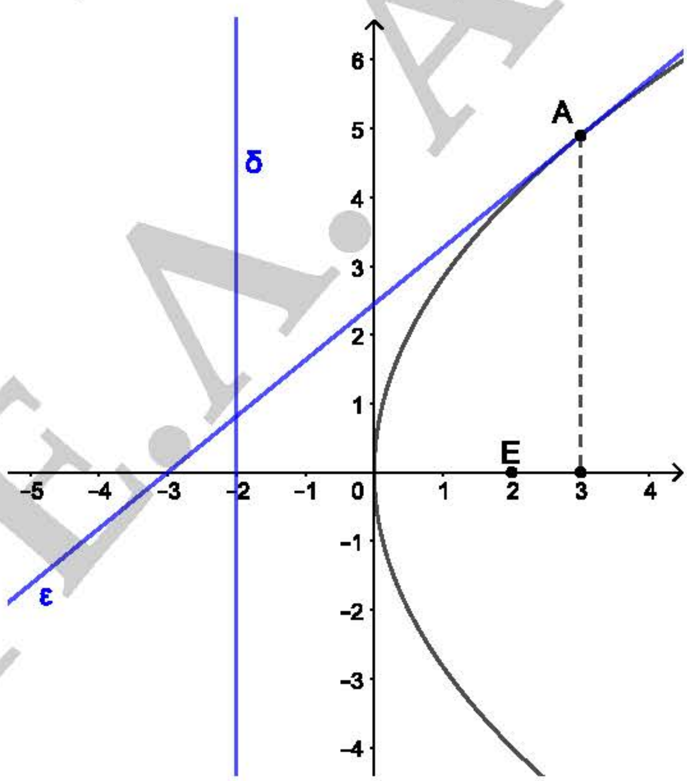
β) Η διευθετούσα (δ) της παραβολής είναι η κατακόρυφη ευθεία $x = -\frac{p}{2}$. Για $p = 4$ δηλαδή είναι η $x = -2$, την οποία σχεδιάζουμε στο παρακάτω σχήμα.

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο της Α έχει εξίσωση:

$$yy_A = p(x + x_A)$$

Αντικαθιστούμε ως x_A και y_A τις συντεταγμένες του σημείου Α και $p = 4$ και παίρνουμε:

$2\sqrt{6}y = 4(x+3)$ ή $2\sqrt{6}y = 4x + 12$ ή ή $4x - 2\sqrt{6}y + 12 = 0$ ή $2x - \sqrt{6}y + 6 = 0$.



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$, το σημείο της $M(\frac{1}{4}, 1)$ και η ευθεία ε του επιπέδου με εξίσωση

ε: $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0$.

α)

i. Να δείξετε ότι η ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόστασή του σημείου Μ από την ε. (Μονάδες 07)

ii. Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x'x και y'y στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι (ΜΓΔ) = 5 τ.μ. (Μονάδες 05)

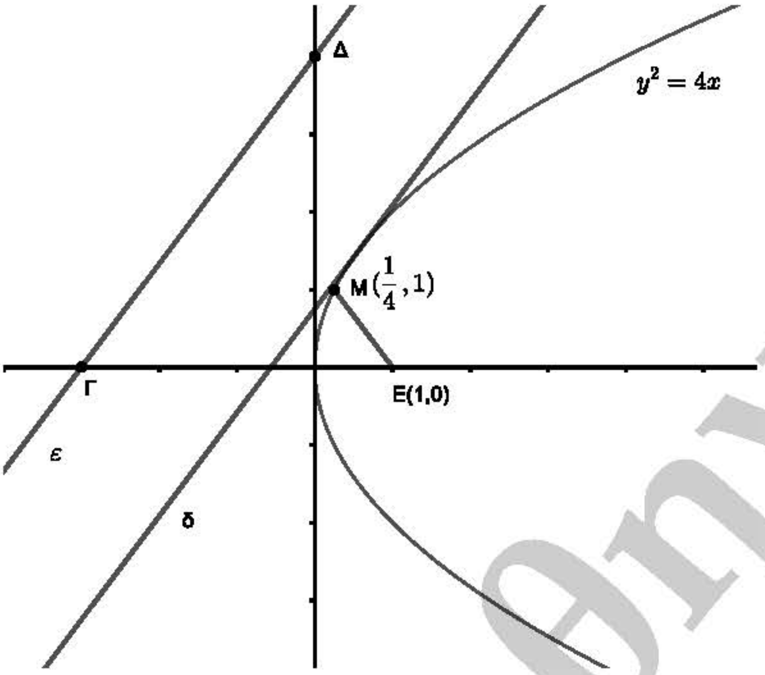
β)

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που εφάπτεται της παραβολής και είναι παράλληλη στην ευθεία ε.

(Μονάδες 08)

ii. Ποια είναι η απόσταση των ευθειών ζ και ε; (Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ



α)

i. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύστημα των εξισώσεων της παραβολής $y^2 = 4x$ και της ευθείας $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0$ είναι αδύνατο.

$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 12 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 3y + 12 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases}$. Η δευτέρου βαθμού εξίσωση $y^2 - 3y + 12 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, αφού Δ = 9-48<0, άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Η ευθεία ε ισοδύναμα γράφεται 4x-3y+12=0

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|4\frac{1}{4} - 3\cdot 1 + 12|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{10}{5} = 2.$$

ii. Τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες τα βρίσκουμε θέτοντας y=0 και x=0 στην εξίσωσή της.

Για y=0 έχουμε $\frac{x}{3} = -1$ ή x = -3, άρα Γ(-3, 0).

Για x=0 έχουμε $\frac{y}{4} = 1$ ή y = 4, άρα Δ(0, 4).

Για το εμβαδό του τριγώνου ΜΓΔ θα βρούμε το μήκος του τμήματος ΓΔ γιατί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτό είναι η απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ε.

$$(\Gamma\Delta) = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5\,.$$

$$\text{Άρα } (M\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(\Gamma\Delta)\cdot d(M, \varepsilon) = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2 = 5 \text{ τ.μ.}$$

β)

i. Η εφαπτομένη ζ της παραβολής σε τυχαίο σημείο της (x_1,y_1) με $y_1 \neq 0$ έχει εξίσωση $yy_1 = 2(x+x_1)$ ή $y = \frac{2}{y_1}\cdot x + \frac{2x_1}{y_1}$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\zeta = \frac{2}{y_1}$.

Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = \frac{4-0}{0-(-3)} = \frac{4}{3}$. Για να είναι η ευθεία ε παράλληλη της εφαπτομένης ζ πρέπει και αρκεί $\lambda_\zeta = \lambda_\varepsilon$ ή $\frac{4}{3} = \frac{2}{y_1}$ ή $y_1 = \frac{3}{2}$.

Το σημείο (x_1,y_1) επαληθεύει την εξίσωση της παραβολής, επομένως

$$y_1^2 = 4x_1 \text{ ή } \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4x_1 \text{ ή } x_1 = \frac{9}{16}.$$

Για $x_1 = \frac{9}{16}$, $y_1 = \frac{3}{2}$ η εφαπτομένη ζ που είναι παράλληλη της ευθείας ε είναι:

$$y = \frac{2}{y_1}\cdot x + \frac{2x_1}{y_1} \quad \text{ή} \quad y = \frac{2}{\frac{3}{2}}\, x + \frac{2\cdot\frac{9}{16}}{\frac{3}{2}} \quad \text{ή τελικά}$$

$$\zeta: 16x-12y+9=0$$

ii. Για να βρούμε την απόσταση των ευθειών ζ και ε, αρκεί να βρούμε ένα σημείο, έστω Κ, της ζ και να υπολογίσουμε την απόσταση του σημείου αυτού από την ευθεία ε.

Θέτοντας $x=0$ στην εξίσωση της ευθείας ζ έχουμε: $y = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Άρα το σημείο Κ της ευθείας ζ είναι το $K(0, \frac{3}{4})$. Η εξίσωση της ευθείας ε είναι: $4x-3y+12=0$, επομένως:

$$d(\zeta, \varepsilon) = d(K, \varepsilon) = \frac{|4\cdot 0-3\cdot\frac{3}{4}+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|-\frac{9}{4}+\frac{48}{4}|}{\sqrt{25}} = \frac{\frac{39}{4}}{5} = \frac{39}{20}.$$

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε διάνυσμα στον χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.

ii. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_o,y_o)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $x = x_o$.

iii. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A,B)$.

iv. Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ έχει εστία το σημείο $E(1,0)$.

v. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_o,y_o)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι

$$y - y_o = \lambda(x - x_o)$$

(Μονάδες 15)

α)

i. Σωστό

Σελίδα 19 σχολικό βιβλίο.

ii. Λάθος

Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_o,y_o)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $y = y_o$.

iii. Λάθος

Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A,B)$.

iv. Σωστό

Σελίδα 91 σχολικό βιβλίο.

v. Σωστό

Σελίδα 83 σχολικό βιβλίο.

β) Σελίδα 60 σχολικό βιβλίο – Εξίσωση ευθείας.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 8x$.

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $(\frac{1}{8},1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία ε: $8x - 2y + 3 = 0$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: C: $y^2 = 2\cdot 4x$, οπότε p = 4, άρα Ε($\frac{p}{2}$, 0) = (2 , 0) είναι η εστία και

δ: $x = -\frac{p}{2}$ ή x = - 2, είναι η διευθετούσα.

β) Η εφαπτομένη της παραβολής C στο ($\frac{1}{8}$,1) είναι:

ε_1: $yy_1 = p(x + x_1)$ ή ε_1: $y\cdot 1 = 4(x + \frac{1}{8})$ ή ε_1: $y = 4x + \frac{1}{2}$ με $\lambda_{\varepsilon_1} = 4$.

Επίσης για την ευθεία ε: $8x - 2y + 3 = 0$ είναι: $\lambda_\varepsilon = -\frac{A}{B} = -\frac{8}{-2} = 4$.

Οπότε $\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_\varepsilon$ επομένως η $\varepsilon_1 // \varepsilon$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2-4x-8y-5=0$ και η ευθεία (ε): $3x-4y=\mu$, $\mu\in R$.

α) Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του. (Μονάδες 05)

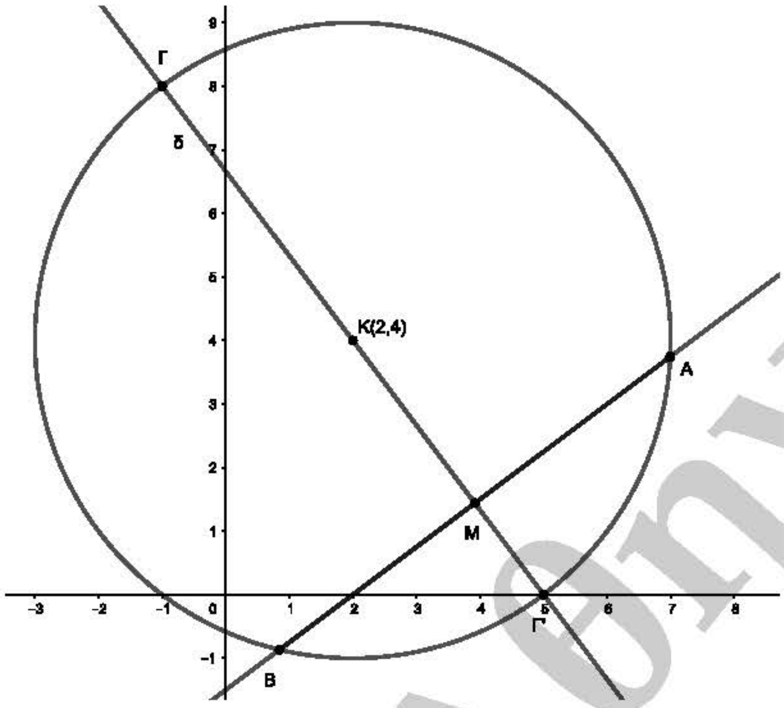
β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία Α, Β

i. Να αποδείξετε ότι $-35<\mu<15$. (Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του. (Μονάδες 04)

iii. Να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή ΑΒ. (Μονάδες 09)

ΛΥΣΗ



α) $\;^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 - 8y + 16 - 16 - 5 = 0 \;\Leftrightarrow$ $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$. Άρα το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο Κ(2,4) και η ακτίνα του είναι ρ=5.

β)

i. Η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου του από την ευθεία ε είναι μικρότερη της ακτίνας του. Δηλαδή $d(K, \varepsilon) < \rho \Leftrightarrow$ $\frac{|3\cdot 2 - 4\cdot 4 - \mu|}{\sqrt{3^2+4^2}} < 5 \Leftrightarrow \frac{|-10-\mu|}{5} < 5 \Leftrightarrow |\mu+10| < 25 \Leftrightarrow -25<\mu+10<25 \Leftrightarrow -35<\mu<15$.

ii. Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, τότε οι συντεταγμένες του σημείου Κ θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Δηλαδή $3\cdot 2-4\cdot 4 = \mu \Leftrightarrow \mu = -10$. Η τιμή $\mu= -10$ είναι δεκτή αφού βρίσκεται στο διάστημα (-35,15) που βρήκαμε στο β)i. ερώτημα.

iii. Το ζητούμενο σημείο Γ θα είναι η κορυφή του ισοσκελούς τριγώνου ΓΑΒ με βάση τη χορδή ΑΒ. Άρα το Γ θα ανήκει στη μεσοκάθετο ευθεία (δ) της χορδής ΑΒ που είναι ο φορέας του αποστήματος της χορδής ΑΒ και είναι ευθεία που διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε, με $\lambda_\varepsilon = \frac{3}{4}$. Επειδή $\delta \perp \varepsilon$ θα είναι $\lambda_\delta \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = -\frac{4}{3}$. Οπότε η εξίσωση της ευθείας δ είναι: $y-y_K= -\frac{4}{3}(x-x_K)$ ή $y-4= -\frac{4}{3}(x-2) \Leftrightarrow 3y-12= -4x+8$

$\Leftrightarrow$ 4x+3y=20. Τα σημεία τομής της ευθείας δ με τον κύκλο είναι τα ζητούμενα σημεία. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$(\Sigma)\begin{cases} {}^2+\mathrm{y}^2-4\mathrm{x}-8\mathrm{y}-5=0 \\ \mathrm{y}=\frac{1}{3}(20-4x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} {}^2+\frac{1}{9}(20-4x)^2-4\mathrm{x}-8\frac{1}{3}(20-4x)-5=0 \\ \mathrm{y}=\frac{1}{3}(20-4x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 9\mathrm{x}^2+400+16x^2-160x-36x-480+96x-45=0 \\ \mathrm{y}=\frac{1}{3}(20-4x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 25\mathrm{x}^2-100\mathrm{x}-125=0 \\ \mathrm{y}=\frac{1}{3}(20-4x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {}^2-4\mathrm{x}-5=0 \\ \mathrm{y}=\frac{1}{3}(20-4x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} =5 \;\text{ ή }\; \mathrm{x}=-1 \\ \mathrm{y}=0 \;\text{ ή }\; y=8 \end{cases}$$

Άρα υπάρχουν δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε, το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή ΑΒ, τα Γ(5,0) και Γ΄(-1,8).

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της C.

(Μονάδες 8)

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C στο σημείο της Μ(4,4).

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C, τη διευθετούσα δ και την ευθεία (ε).

(Μονάδες 9)

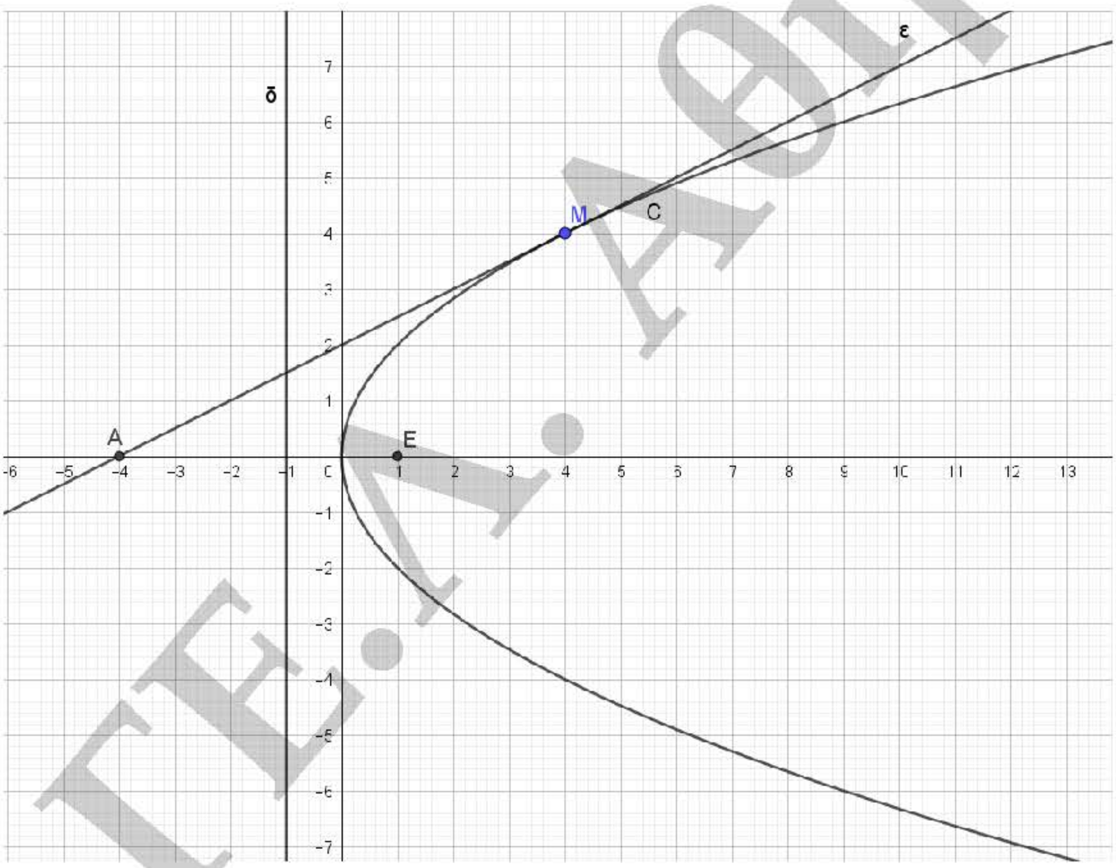
ΛΥΣΗ

α) Η παραβολή C έχει εξίσωση της μορφής $y^2 = 2px$ όπου $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$, οπότε η εστία της έχει συντεταγμένες $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ δηλαδή $\mathrm{E}(1,0)$ και διευθετούσα με εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$ δηλαδή $\delta: x = -1$.

β) Η ζητούμενη εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση της μορφής $yy_1 = p(x + x_1)$ δηλαδή $y \cdot 4 = 2(x+4) \Leftrightarrow 2y = x + 4$.

γ) Η ευθεία (ε) εκτός από το $\mathrm{M}(4,4)$ διέρχεται και από το σημείο $\mathrm{A}(-4,0)$.

Η παραβολή C, η διευθετούσα δ και η ευθεία (ε) φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ 4

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία Α(-2,- 2), Β(0,-4) και την παραβολή $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

(Μονάδες 09)

β) Να βρείτε το σημείο Μ της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ΑΒ.

(Μονάδες 08)

γ) Αν Μ(1,-2) και Κ είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΜΚ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α) Η γενική μορφή της εξίσωσης της παραβολής είναι $y^2 = 2px$. Για την $y^2 = 4x$ θα έχουμε ότι 2p = 4, οπότε είναι p = 2.

Η εστία της Ε είναι το σημείο $\left(\frac{p}{2}, 0\right) = \left(\frac{2}{2}, 0\right) = (1, 0)$.

Η διευθετούσα (δ) έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$, δηλαδή x = - $\frac{2}{2} = -1$.

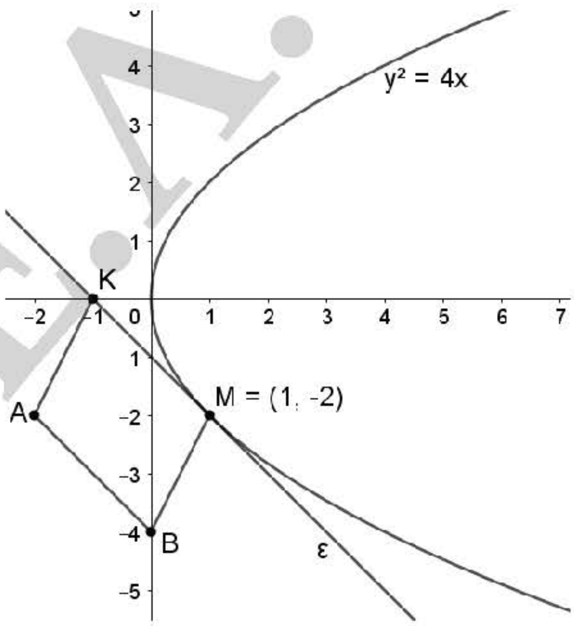
β) Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ δίνεται από την εξίσωση: $yy_1 = p(x + x_1)$, δηλαδή $yy_1 = 2(x + x_1)$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι $\lambda_1 = \frac{2}{y_1}$, ενώ ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΒ είναι $\lambda_2 = \frac{-4-(-2)}{0-(-2)} = \frac{-2}{2} = -1$.

Για να είναι η εφαπτομένη παράλληλη στην ΑΒ πρέπει $\lambda_1 = \lambda_2$ ή $\frac{2}{y_1} = -1$, άρα $y_1 = -2$.

Επειδή όμως το σημείο Μ ανήκει στην παραβολή θα επαληθεύει την εξίσωσή της, δηλαδή $y_1^2 = 4x_1$. Αντικαθιστούμε και έχουμε $(-2)^2 = 4x_1$, άρα $x_1 = 1$.

Επομένως το σημείο Μ θα είναι το (1,-2).

γ)



Η εφαπτομένη ευθεία (ε) της παραβολής στο σημείο της Μ(1,-2) θα είναι $yy_1 = 2(x + x_1)$ ή $-2y = 2(x+1)$ ή $-y = x + 1$ ή $x + y + 1 = 0$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της με τον x'x βάζουμε όπου $y = 0$ και έχουμε x = -1. Επομένως το σημείο τομής με τον άξονα x'x είναι το K(-1.0).

Από το ερώτημα (β) γνωρίζουμε ότι KM//AB.

(KM) = $\sqrt{(x_M - x_K)^2 + (y_M - y_K)^2} = \sqrt{(1-(-1))^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.

(AB) = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-(-2))^2 + (-4-(-2))^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.

Τα τμήματα AB και KM είναι ίσα και παράλληλα, επομένως το τετράπλευρο ABMK είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 12x$ με εστία Ε και η εφαπτομένη ευθεία (ε) της (C) στο σημείο της $M(1,2\sqrt{3})$, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Β. Από το σημείο Μ φέρνουμε ευθεία $t't$ παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, η οποία τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο Η.

α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β, Η, Ε.

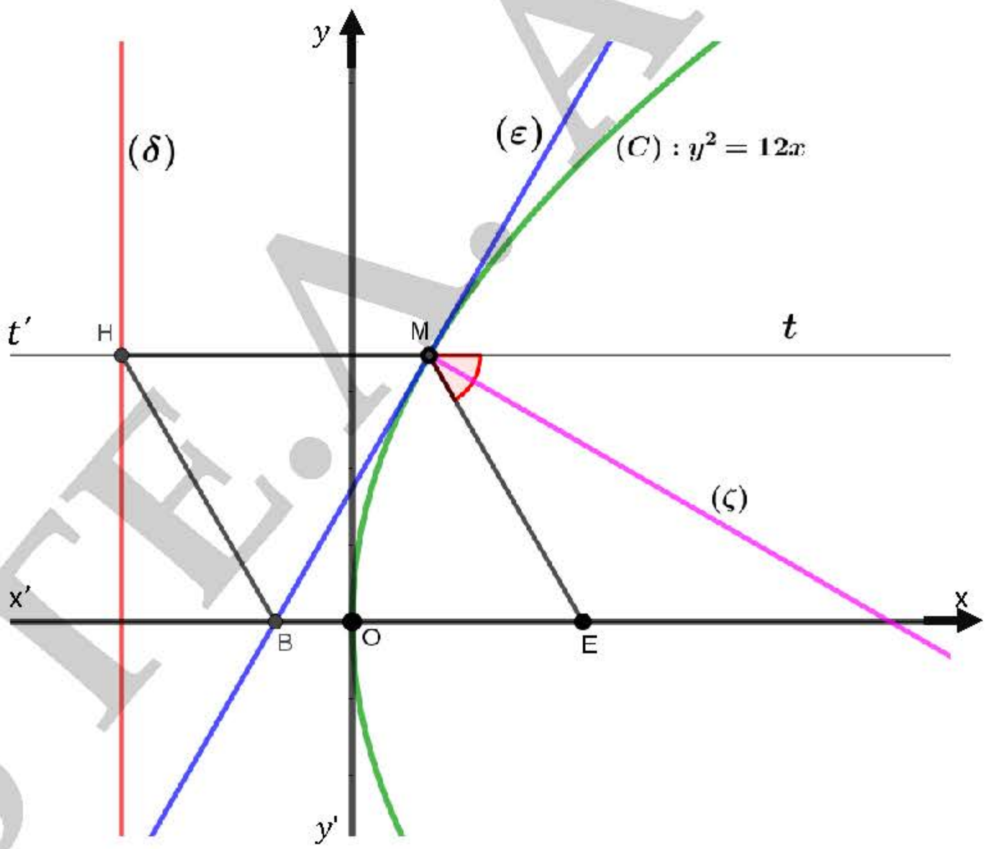
(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΕΒΗ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) η οποία διχοτομεί την γωνία $E\widehat{M}t$.

(Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $y_1 y = p(x + x_1)$. Αλλά $2p = 12$, άρα $p = 6$. Ώστε (ε): $2\sqrt{3} \cdot y = 6(x+1)$. Έτσι $y = \frac{3}{\sqrt{3}}(x+1)$ άρα $y = \sqrt{3}(x+1)$, τελικά $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$.

β) Η διευθετούσα (δ) έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$, άρα είναι $(\delta): x = -3$ έτσι είναι $H(-3, 2\sqrt{3})$ και η εστία Ε έχει συντεταγμένες $E(\frac{p}{2}, 0)$, άρα $E(3,0)$. Επίσης για $y = 0$ από την εξίσωση της (ε) παίρνουμε $0 = \sqrt{3}(x+1)$, άρα $x = -1$. Ώστε $B(-1,0)$.

γ) Βρίσκουμε τους συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών ΜΕ και ΒΗ. Είναι $\lambda_{ME} = \frac{2\sqrt{3} - 0}{1-3} = -\sqrt{3}$ και $\lambda_{HB} = \frac{2\sqrt{3} - 0}{-3-(-1)} = -\sqrt{3}$. Ώστε ME παράλληλη στην HB. Άρα το ΜΕΒΗ είναι παραλληλόγραμμο. Αλλά από τον ορισμό της παραβολής είναι $MH = ME$. Παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, είναι ρόμβος.

δ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής, γνωρίζουμε ότι η ευθεία που είναι κάθετη στην εφαπτομένη (ε) στο σημείο επαφής Μ, διχοτομεί την γωνία $E\widehat{M}t$ όπου Ε η εστία της παραβολής. Αρκεί λοιπόν να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην (ε) στο Μ. Αλλά $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1$, έτσι $\lambda_\zeta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ώστε $(\zeta): y - 2\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$, άρα είναι $(\zeta): y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$ και τελικά $(\zeta): y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{7\sqrt{3}}{3}$.