

Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

ΘΕΜΑ 4

Έστω υπερβολή C με κέντρο το $(0,0)$, εστίες πάνω στον άξονα xx' της οποίας το ορθογώνιο βάσης είναι τετράγωνο.

α) Να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της C .

(Μονάδες 6)

ii. την εκκεντρότητα της C .

(Μονάδες 6)

β) Αν η υπερβολή διέρχεται από το σημείο $(2,0)$ και (ζ) τυχαία ευθεία παράλληλη σε κάποια εκ των ασυμπτωτων της C (που δεν ταυτίζεται με κάποια από αυτές),

i. να δείξετε ότι η (ζ) έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την C .

(Μονάδες 8)

ii. είναι η ευθεία (ζ) εφαπτόμενη της C ; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Η υπερβολή C έχει κέντρο το $(0,0)$ και εστίες στον άξονα xx' , οπότε θα έχει ασύμπτωτες της μορφής $y = \frac{\beta}{\alpha}x, y = -\frac{\beta}{\alpha}x$. Αφού το ορθογώνιο βάσης είναι τετράγωνο, συμπεραίνουμε ότι $\alpha = \beta$ δηλαδή είναι ισοσκελής υπερβολή. Συνεπώς

i. οι εξισώσεις των ασυμπτωτών της υπερβολής C είναι $y = x, y = -x$.

ii. για την εκκεντρότητα ε της C ισχύει ότι $\varepsilon^2 = 1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 1 + 1 = 2$ και επειδή

$\varepsilon > 0$ έχουμε τελικά ότι $\varepsilon = \sqrt{2}$.

β) Αφού η (ζ) είναι παράλληλη σε κάποια εκ των ασυμπτωτών της C , θα έχει εξίσωση της μορφής $y = x + \kappa$ ή $y = -x + \kappa$ με $\kappa \neq 0$. Η ισοσκελής υπερβολή C θα έχει εξίσωση της μορφής $x^2 - y^2 = \alpha^2$. Αφού διέρχεται από το σημείο $(2,0)$ έχουμε ότι $2^2 - 0^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow 4 = \alpha^2 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \alpha = 2$.

Το πλήθος των κοινών σημείων της C και της ευθείας (ζ) είναι ίδιο με το πλήθος

των λύσεων καθενός από τα συστήματα $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ y = x + \kappa \end{cases}$ και $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ y = -x + \kappa \end{cases}$.

Λύνουμε το 1ο σύστημα με αντικατάσταση της 2ης εξίσωσης στην 1η και έχουμε :

$$x^2 - (x + \kappa)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - x^2 - 2x\kappa - \kappa^2 = 4 \Leftrightarrow -2x\kappa = 4 + \kappa^2 \stackrel{\kappa \neq 0}{\Leftrightarrow} x = -\frac{4 + \kappa^2}{2\kappa}$$

και από τη 2η εξίσωση έχουμε ότι $y = -\frac{4 + \kappa^2}{2\kappa} + \kappa$

Ομοίως λύνουμε το 2ο σύστημα με αντικατάσταση της 2ης εξίσωσης στην 1η και έχουμε :

$$x^2 - (-x + \kappa)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - x^2 + 2x\kappa - \kappa^2 = 4 \Leftrightarrow 2x\kappa = 4 + \kappa^2 \stackrel{\kappa \neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{4 + \kappa^2}{2\kappa}$$

και από τη 2η εξίσωση έχουμε ότι $y = -\frac{4 + \kappa^2}{2\kappa} + \kappa$

i. Σε κάθε περίπτωση το σύστημα έχει μοναδική λύση που σημαίνει ότι η (ζ) έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την C .

ii. Επειδή σε κάθε περίπτωση η μοναδική λύση του συστήματος προέκυψε από εξίσωση 1ου βαθμού και όχι από 2ου με διακρίνουσα 0, η ευθεία (ζ) δεν είναι

εφαπτόμενη της C . Αλλά την τέμνει σε ένα σημείο χωρίς όμως το σημείο αυτό να είναι σημείο επαφής. Δηλαδή η (ζ) διαπερνά τη C .

Σημείωση : το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει για κάθε υπερβολή και ευθεία παράλληλη σε κάποια από τις ασύμπτωτες και όχι μόνο για τις ισοσκελείς.