

Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Στην προέκταση της AB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $AE = A\Gamma$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = AB$. Αν τα τμήματα ΔE και $B\Gamma$ τέμνονται στο K και η προέκταση της AK τέμνει την $E\Gamma$ στο M , τότε να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = \Delta E$

(Μονάδες 6)

β) $BK = K\Delta$

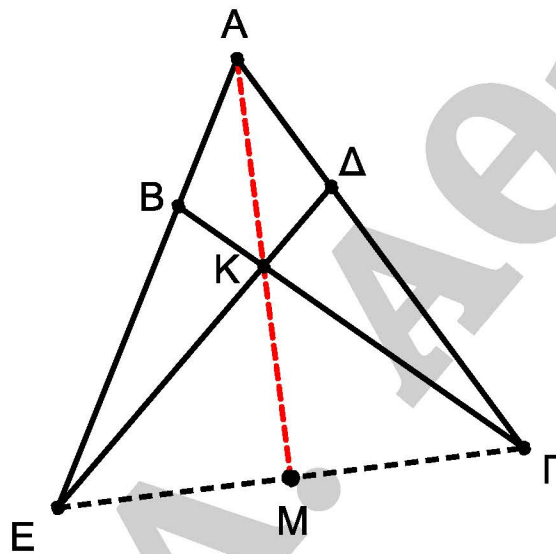
(Μονάδες 7)

γ) Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας A .

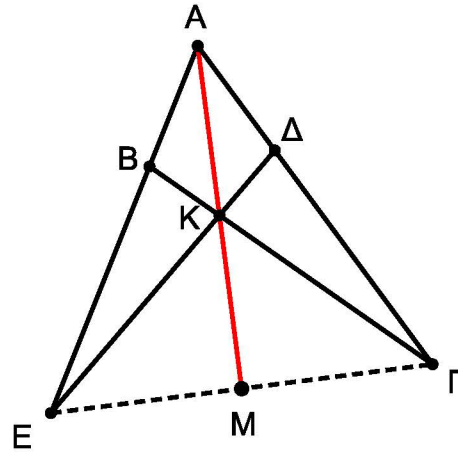
(Μονάδες 6)

δ) Η AM είναι μεσοκάθετος της $E\Gamma$.

(Μονάδες 6)



1 Α



α) Τα τρίγωνα BEΓ και ΔΕΓ έχουν:

- ΕΓ κοινή
- $BE = ΔΓ$ ως διαφορά των ίσων τμημάτων ΑΕ, ΑΒ και ΑΓ, ΑΔ αντίστοιχα
- $\widehat{A\hat{E}Γ} = \widehat{A\hat{Γ}E}$, αφού ΕΑΓ ισοσκελές τρίγωνο

Τα τρίγωνα BEΓ και ΔΕΓ έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες σε αυτές ίσες άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BΓ = ΔΕ$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A\hat{E}Γ}$ και $\widehat{A\hat{Γ}E}$.

β) Επειδή τα τρίγωνα BEΓ και ΔΕΓ είναι ίσα προκύπτει ότι $\widehat{B\hat{E}Γ} = \widehat{D\hat{Γ}E}$ οπότε το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές, άρα $EΚ = ΚΓ$ (1)

Τα τρίγωνα ΒΕΚ και ΔΚΓ έχουν:

- $EΚ = ΚΓ$, λόγω της (1)
- $BE = ΔΓ$, ως διαφορές των ίσων τμημάτων ΑΕ, ΑΒ και ΑΓ, ΑΔ αντίστοιχα
- $\widehat{B\hat{E}Κ} = \widehat{D\hat{Γ}Κ}$ ως διαφορές των ίσων γωνιών $\widehat{B\hat{E}Γ}$, $\widehat{Κ\hat{E}Γ}$ και $\widehat{D\hat{Γ}E}$, $\widehat{Κ\hat{Γ}E}$ αντίστοιχα

Τα τρίγωνα ΒΕΚ και ΔΚΓ έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες σε αυτές ίσες άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BΚ = ΚΔ$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B\hat{E}Κ}$ και $\widehat{D\hat{Γ}Κ}$.

γ) Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΚΔ έχουν;

- $BΚ = ΚΔ$ από το (β) ερώτημα
- ΑΚ κοινή
- $AB = AD$.

Οπότε τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΚΔ είναι ίσα γιατί έχουν τρεις πλευρές ίσες μία προς μία.

Επομένως $\widehat{B\hat{A}Κ} = \widehat{Κ\hat{A}Δ}$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΚ και ΚΔ, οπότε η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.

δ) Επειδή το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές και η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$, θα είναι διάμεσος και ύψος, άρα η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ.

ΘΕΜΑ 2

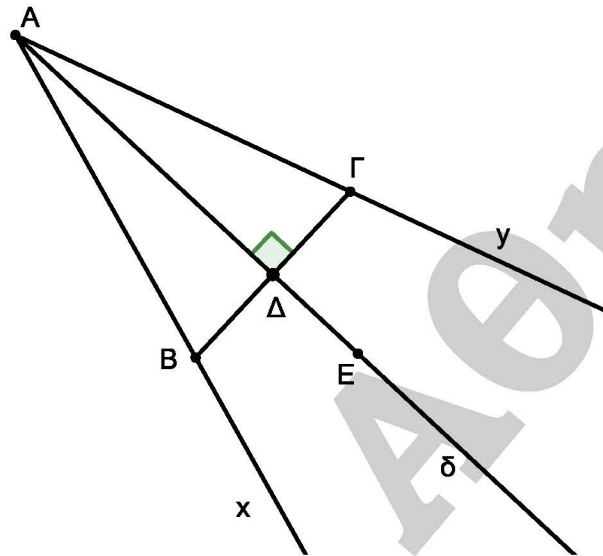
Δίνεται γωνία $\chi\Lambda\gamma$ και η διχοτόμος της $\Lambda\delta$. Από τυχαίο σημείο B της $\Lambda\chi$ φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο $\Lambda\delta$, η οποία τέμνει την $\Lambda\delta$ στο σημείο Δ και την $\Lambda\gamma$ στο σημείο Γ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AB και $\Lambda\Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Αν E τυχαίο σημείο της $\Lambda\delta$, να αποδείξετε ότι το E ισαπέχει από τα B και Γ .

(Μονάδες 13)

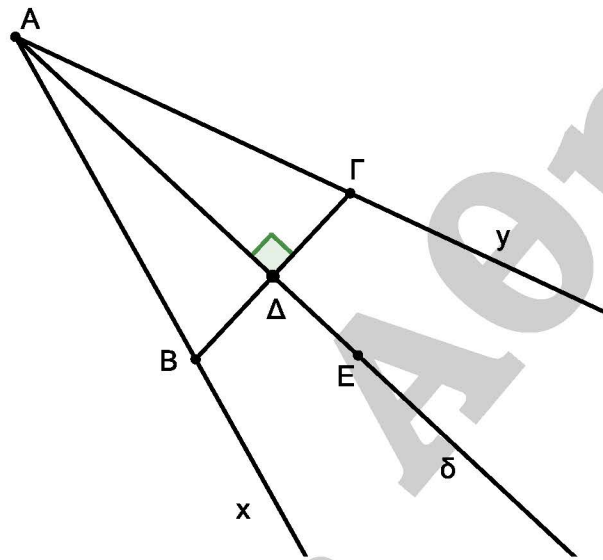


2 A

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η AD είναι διχοτόμος και ύψος, αφού η $B\Gamma$ είναι κάθετη στη AD από υπόθεση. Οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, άρα $AB = A\Gamma$.

β) Επειδή είναι $AB = A\Gamma$ από το α) ερώτημα, στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ η διχοτόμος AD της γωνίας του $\hat{A}$ είναι και ύψος (όπως συζητήθηκε στο α) ερώτημα), οπότε η AD θα είναι και διάμεσος. Επομένως η AD θα είναι η μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$. Οπότε, επειδή το σημείο E ανήκει στη μεσοκάθετο του $B\Gamma$ θα ισαπέχει από τα σημεία B και Γ .



ΘΕΜΑ 2

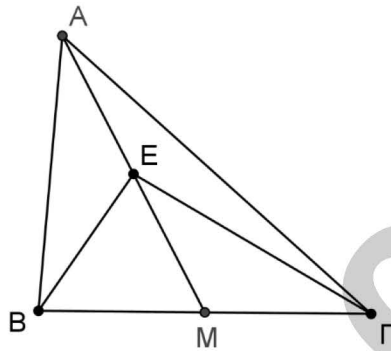
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου του AM . Αν είναι $B\Gamma = 2 BE$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{AEB} = \hat{EM\Gamma}$

(Μονάδες 12)

β) $AB = E\Gamma$

(Μονάδες 13)



3 Α

ΛΥΣΗ

α) Είναι $BM = \frac{BG}{2} = \frac{2BE}{2} = BE$, άρα το τρίγωνο BEM είναι ισοσκελές με βάση EM,

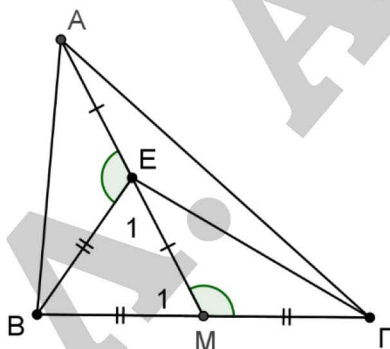
οπότε $\widehat{E}_1 = \widehat{M}_1$ (1) ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του.

Όμως $\widehat{AEB} = 180^\circ - \widehat{E}_1$ και $\widehat{EMG} = 180^\circ - \widehat{M}_1$, οπότε λόγω της σχέσης (1) θα είναι $\widehat{AEB} = \widehat{EMG}$ (2).

β) Τα τρίγωνα AEB και EMG έχουν:

- $AE = EM$, διότι E μέσο του AM
- $BE = MG$, αφού είναι $BE = BM$ (δείχθηκε στο α) ερώτημα) και $BM = MG$ (AM διάμεσος από τα δεδομένα)
- $\widehat{AEB} = \widehat{EMG}$ από σχέση (2)

Τα τρίγωνα AEB και EMG έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ), άρα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $AB = EG$ ως πλευρές απέναντι στις ίσες γωνίες $\widehat{AEB} = \widehat{EMG}$ αντίστοιχα.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $AE = A\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \Gamma\Delta$,

(Μονάδες 6)

β) $B\Delta = \Gamma E$,

(Μονάδες 10)

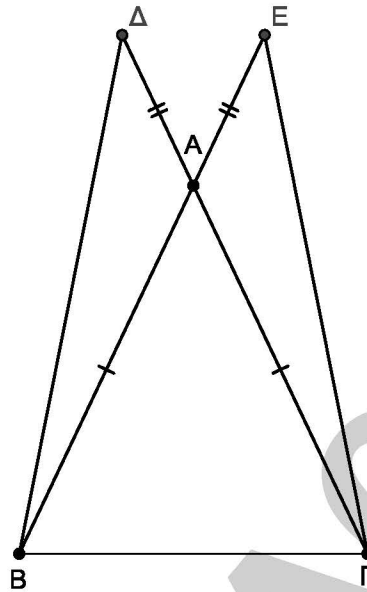
γ) $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$.

(Μονάδες 9)

4 Α

ΛΥΣΗ

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και σημεία E, Δ στις προεκτάσεις των πλευρών $BA, \Gamma A$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $AE = A\Delta$.



α) Επειδή είναι $AB = A\Gamma$ και $AE = A\Delta$ από υπόθεση τότε: $AB + AE = A\Gamma + A\Delta$, άρα $BE = \Gamma\Delta$.

β) Τα τρίγωνα ΔBA και $E\Gamma A$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$, από υπόθεση
- $A\Delta = AE$, από υπόθεση
- $\widehat{\Delta AB} = \widehat{E\Gamma A}$, ως κατακορυφήν γωνίες.

Τα τρίγωνα ΔBA και $E\Gamma A$ έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $B\Delta = \Gamma E$ ως πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Delta AB}, \widehat{E\Gamma A}$ αντίστοιχα.

γ) Τα τρίγωνα ΔBA και $E\Gamma A$ είναι ίσα οπότε: $\widehat{\Delta BA} = \widehat{E\Gamma A}$ (1) ως γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές $A\Delta$ και AE αντίστοιχα. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\widehat{\Gamma BA} = \widehat{B\Gamma A}$ (2), ως γωνίες της βάσης του $B\Gamma$. Οπότε $\widehat{\Delta BA} + \widehat{\Gamma BA} = \widehat{E\Gamma A} + \widehat{B\Gamma A}$ ή $\widehat{\Delta B\Gamma} = \widehat{E\Gamma B}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$. Αν E είναι το σημείο τομής των προεκτάσεων των BA και $\Gamma\Delta$ και Z το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔA και ΓB να αποδείξετε ότι:

α) Η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $B\Gamma\Delta$.

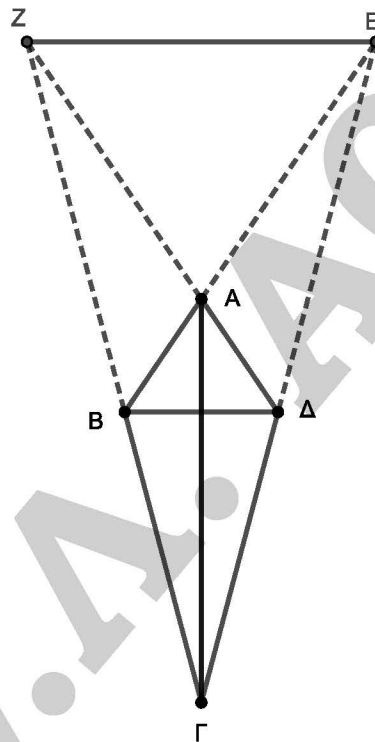
(Μονάδες 7)

β) $\Gamma Z = \Gamma E$

(Μονάδες 9)

γ) $EZ \parallel B\Delta$

(Μονάδες 9)

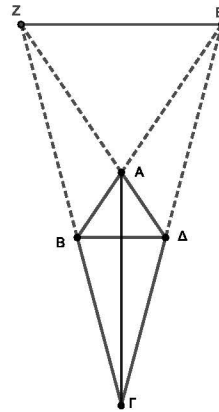


16 Α

α)

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AD\Gamma$ έχουν:

- $AB = AD$, από υπόθεση
- $GB = GD$, από υπόθεση
- GA κοινή πλευρά

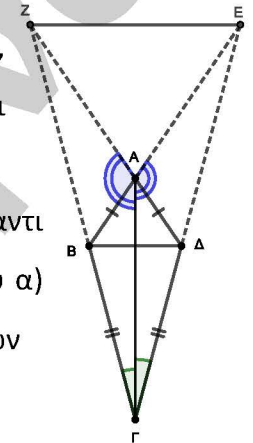


Από το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AD\Gamma$ είναι ίσα, οπότε έχουν $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{A\Gamma D}$ (1), διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές AB και AD αντίστοιχα. Άρα η GA είναι διχοτόμος της γωνίας $B\Gamma D$.

β) $\widehat{ZAB} = \widehat{EAD}$ (2) ως κατακορυφήν γωνίες, $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \widehat{D\hat{A}\Gamma}$ (3), γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές GB και GD αντίστοιχα, των ίσων τριγώνων $AB\Gamma$ και $AD\Gamma$ του α) ερωτήματος. Από (2) και (3) έχουμε ότι: $\widehat{Z\hat{A}\Gamma} = \widehat{E\hat{A}\Gamma}$ (4) ως αθροίσματα ίσων γωνιών

Τα τρίγωνα $ZA\Gamma$ και $EA\Gamma$ έχουν:

- $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{A\Gamma D}$, από τη σχέση (1)
- $A\Gamma$ κοινή πλευρά
- $\widehat{Z\hat{A}\Gamma} = \widehat{E\hat{A}\Gamma}$, από τη σχέση (4)



Άρα από το κριτήριο Γ-Π-Γ τα τρίγωνα $ZA\Gamma$ και $EA\Gamma$ είναι ίσα οπότε $GZ = GE$ γιατί είναι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{Z\hat{A}\Gamma}$, $\widehat{E\hat{A}\Gamma}$ αντίστοιχα.

γ) Έστω H και Θ τα σημεία στα οποία το τμήμα $A\Gamma$

τέμνει τα τμήματα ZE και BD αντίστοιχα. Στο ισοσκελές τρίγωνο GBD ($GB = GD$), η $G\Theta$ είναι διχοτόμος, άρα και ύψος. Τότε: $BD \perp G\Theta$. Στο ισοσκελές τρίγωνο GZE ($GZ = GE$), η GH είναι διχοτόμος, άρα και ύψος. Τότε: $EZ \perp GH$ ή $EZ \perp G\Theta$. Οπότε συμπεραίνουμε ότι $EZ \parallel BD$, ως κάθετα στο ίδιο τμήμα $G\Theta$.

