Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

1

ΘΕΜΑ 4

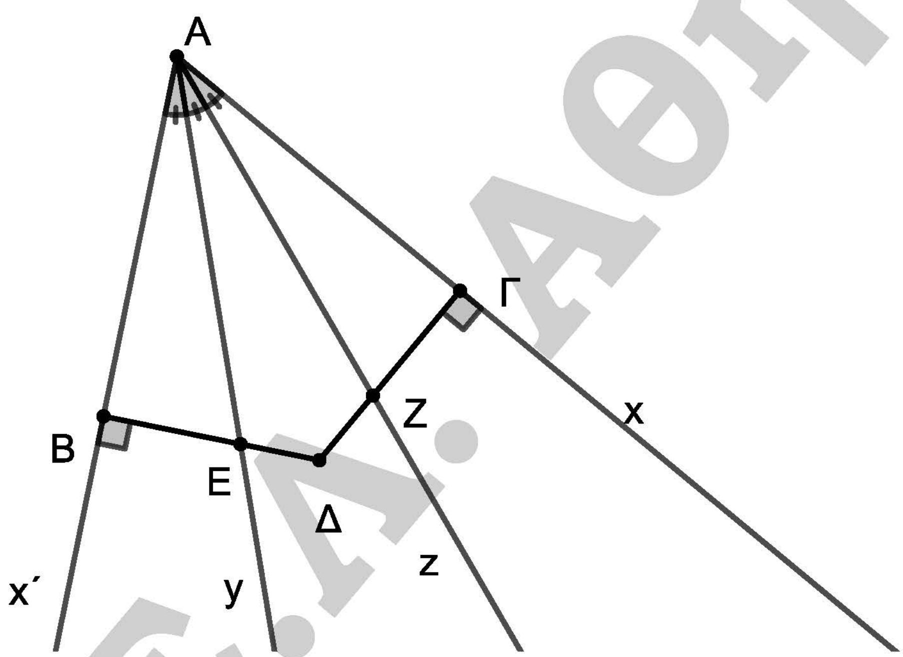
Στις πλευρές Αx΄ και Αx γωνίας $x'\hat{A}x$ θεωρούμε σημεία Β και Γ ώστε ΑΒ = ΑΓ. Οι κάθετες στις Αx΄ και Αx στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ.

Αν οι ημιευθείες Αy και Αz χωρίζουν τη γωνία $x'\hat{A}x$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις ΒΔ και ΔΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΕΑΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $x'\hat{A}x$. (Μονάδες 8)

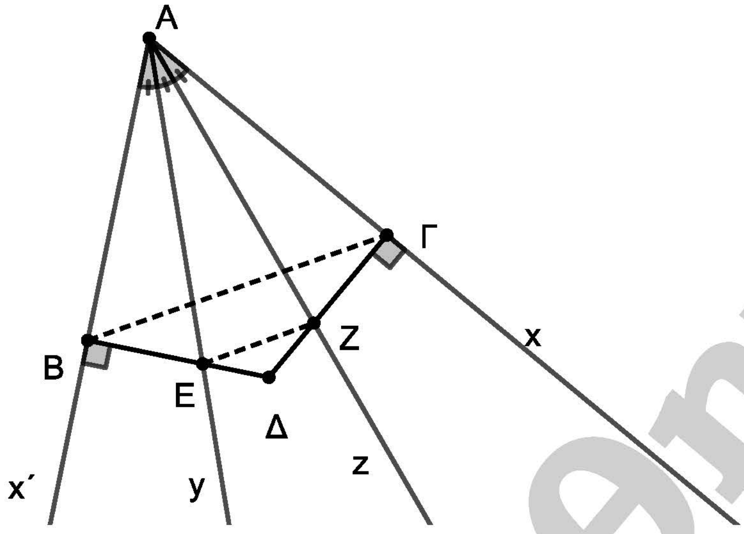
γ) Οι γωνίες ΓΒΔ και ΓΑΔ είναι ίσες. (Μονάδες 9)



6ο ΓΕΛ Αθηνών

1 Α

ΛΥΣΗ

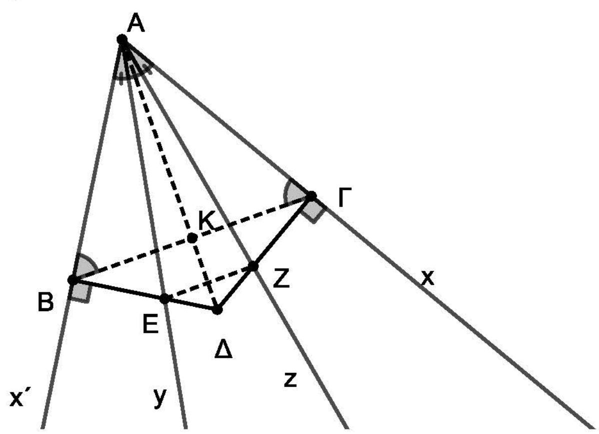


α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΖ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΑΒ = ΑΓ, από την υπόθεση και
- $B\hat{A}E = Z\hat{A}\Gamma$, αφού οι Αy, Αz χωρίζουν τη γωνία $x'\hat{A}x$ σε τρεις ίσες γωνίες.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΖ είναι ίσα γιατί έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε θα είναι ΑΕ = ΑΖ ως υποτείνουσες των ίσων τριγώνων, άρα το ΕΑΖ είναι ισοσκελές τρίγωνο.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ορθογώνια και έχουν ΑΔ κοινή πλευρά και ΑΒ = ΑΓ, από την υπόθεση, οπότε θα είναι ίσα γιατί έχουν δυο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία, άρα θα είναι ΒΔ= ΓΔ και $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΔ και ΓΔ αντίστοιχα, οπότε ΑΔ διχοτόμος της $x'\hat{A}x$.



6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

1 Α συνέχεια

γ) Έστω Κ το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΚ είναι διχοτόμος άρα και ύψος.

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΓ ισχύει ότι:

$$K\hat{A}\Gamma + A\hat{\Gamma}K = 90^o \text{ ή } \Delta\hat{A}\Gamma + A\hat{\Gamma}K = 90^o \text{ ή } \Delta\hat{A}\Gamma = 90^o - A\hat{\Gamma}K \ (1)$$

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ, άρα $A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Gamma$ άρα και $A\hat{\Gamma}K = A\hat{B}\Gamma$, οπότε η σχέση (1) γίνεται $\Delta\hat{A}\Gamma = 90^o - A\hat{B}\Gamma = \Gamma\hat{B}\Delta$, άρα $\Delta\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{B}\Delta$.

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

3

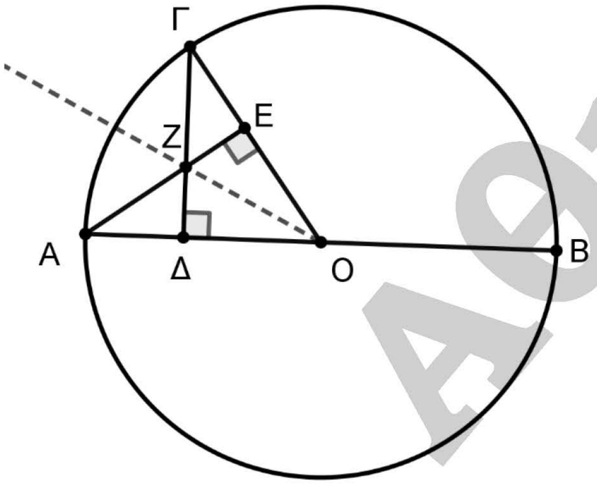
ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν τα ΑΕ, ΓΔ είναι κάθετα τμήματα στις ΟΓ, ΟΑ αντίστοιχα και Ζ το σημείο τομής τους, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΔΟΕ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 13)

β) η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{A O \Gamma}$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ.

(Μονάδες 12)



6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

3 Α

ΛΥΣΗ

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΟ και ΓΔΟ έχουν:

- ΟΑ = ΟΓ ως ακτίνες κύκλου
- $\hat{O}$ κοινή γωνία,

Άρα τα τρίγωνα ΑΕΟ και ΓΔΟ είναι ίσα, επειδή έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, οπότε θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $O\hat{A}E = O\hat{\Gamma}\Delta$, άρα και ΟΕ = ΟΔ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $O\hat{A}E$, $O\hat{\Gamma}\Delta$ αντίστοιχα. Επομένως το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ισοσκελές.

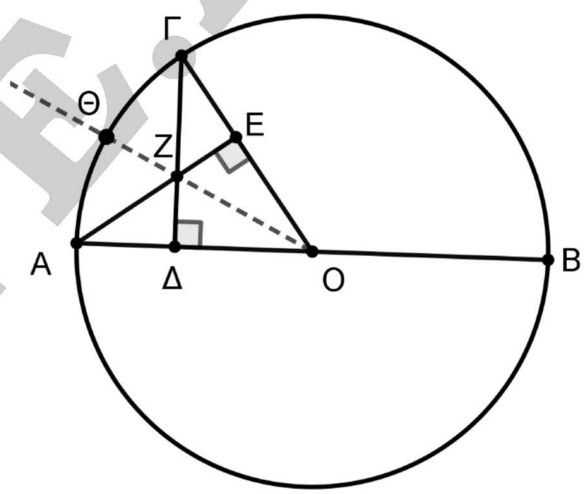
β)

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΔΟ και ΖΕΟ έχουν:

- ΟΔ=ΟΕ, από το ερώτημα (α)
- ΟΖ κοινή πλευρά,

Άρα τα τρίγωνα ΖΔΟ και ΖΕΟ είναι ίσα, γιατί έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, οπότε θα έχουν $\Delta\hat{Z}O = E\hat{Z}O$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΟΔ και ΟΕ αντίστοιχα, αλλά και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $\Delta\hat{O}Z = Z\hat{O}E$ ή $A\hat{O}\Theta = \Theta\hat{O}E$, όπου Θ το σημείο τομής της ΟΖ με τον κύκλο. Άρα η ΟΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{O}\Gamma$.

Οι γωνίες $A\hat{O}\Theta$ και $\Theta\hat{O}\Gamma$ είναι επίκεντρες και ίσες, οπότε και τα αντίστοιχα τόξα $\overset{\frown}{A\Theta}$ και $\overset{\frown}{\Theta\Gamma}$ είναι ίσα, άρα το Θ είναι μέσο του τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$.



6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

5

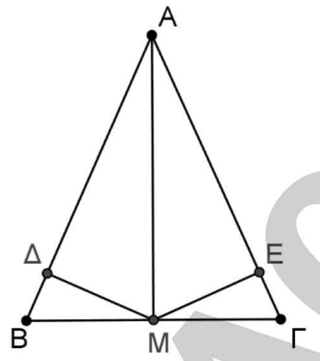
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν είναι ΜΔ = ΜΕ, τότε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν είναι ΑΒ = ΑΓ και Μ μέσο του ΒΓ, τότε ΜΔ = ΜΕ. (Μονάδες 12)

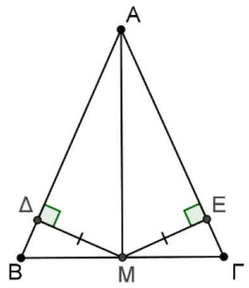


6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

5 Α

ΛΥΣΗ

α)



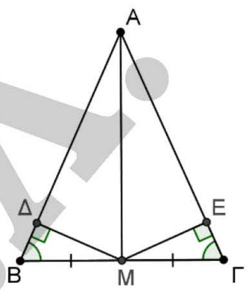
Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ορθογώνια αφού τα ΜΔ, ΜΕ είναι κάθετα τμήματα στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα από τα δεδομένα.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ έχουν:

- ΜΑ κοινή πλευρά
- ΜΔ = ΜΕ από την υπόθεση

Οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα γιατί έχουν δυο ομόλογες πλευρές τους ίσες.

β)



Επειδή είναι ΑΒ = ΑΓ από την υπόθεση, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ είναι ορθογώνια αφού τα ΜΔ, ΜΕ είναι κάθετα τμήματα στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα από τα δεδομένα.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ έχουν:

- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, ως γωνίες βάσης ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ
- ΜΒ = ΜΓ, αφού Μ μέσο του ΒΓ από την υπόθεση

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, οπότε έχουν ΜΔ= ΜΕ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες του $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$.

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

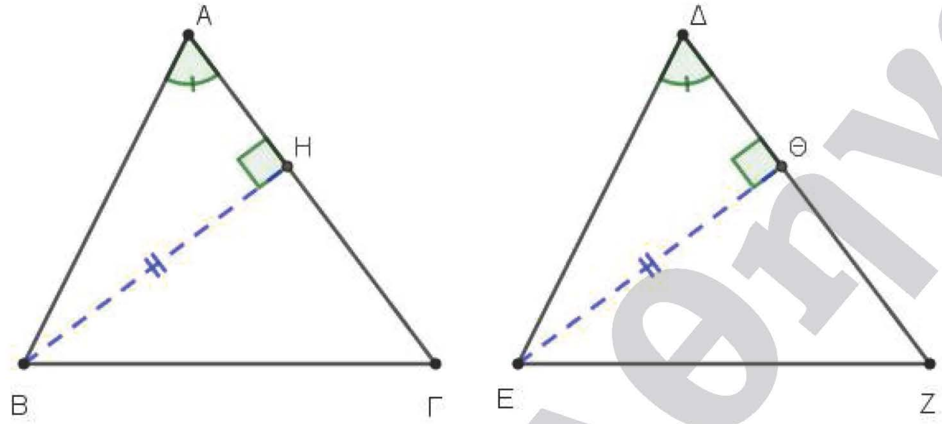
12

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\Delta}$, $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$. Αν τα ύψη τους ΒΗ και ΕΘ είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ = ΔΕ. (Μονάδες 13)

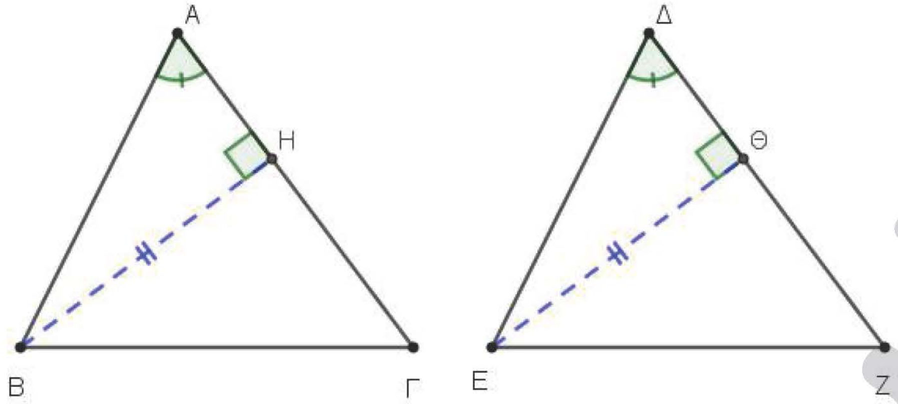
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα . (Μονάδες 12)



6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

12 A

ΛΥΣΗ



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΗ και ΔΕΘ. Αυτά έχουν:

ΒΗ = ΕΘ, από υπόθεση,

$\widehat{\mathrm{A}}=\widehat{\Delta}$, από υπόθεση,

$\widehat{\mathrm{H}} = \widehat{\Theta} = 90^o$.

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΗ και ΔΕΘ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν μια κάθετη πλευρά τους και την απέναντι οξεία γωνία τους αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Επομένως, θα έχουν τις υποτείνουσες ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΔΕ (1).

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:

ΑΒ =ΔΕ, από (1),

$\widehat{\mathrm{A}}=\widehat{\Delta}$, από υπόθεση,

$\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = \Delta\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$, από υπόθεση.

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών