Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

1

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το χάρτη μίας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Αx και Αy παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία Β και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια.

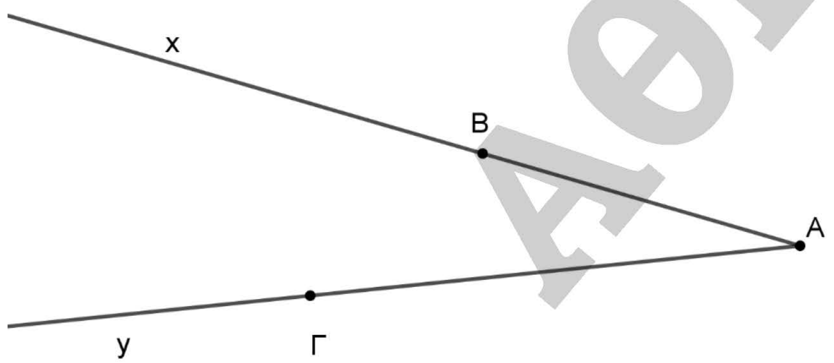
Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

α) ισαπέχει από τα δύο πλατάνια. (Μονάδες 9)

β) ισαπέχει από τα δύο ποτάμια. (Μονάδες 9)

γ) ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια. (Μονάδες 7)

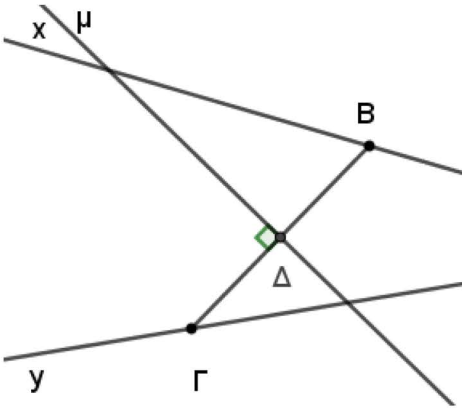
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.



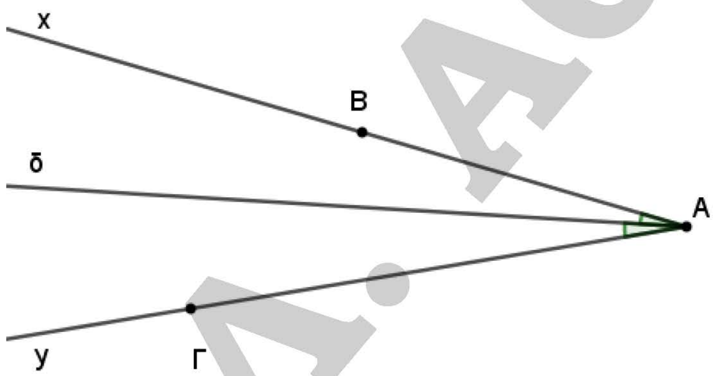
1 Α

ΛΥΣΗ

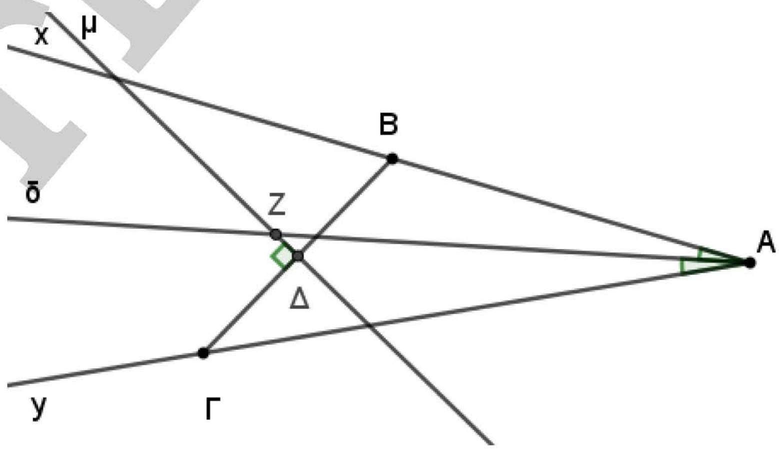
α) Τα σημεία που ισαπέχουν από δύο σημεία Β και Γ, βρίσκονται στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ. Άρα ο θησαυρός βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο μ του ΒΓ.



β) Ο θησαυρός ισαπέχει από τις πλευρές Αx και Αy της γωνίας $x\widehat{A}y$, άρα θα βρίσκεται στη διχοτόμο Αδ.



γ) Ο θησαυρός ισαπέχει από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια. Άρα ανήκει και στη μεσοκάθετο του ΒΓ και στη διχοτόμο Αδ της γωνίας $x\widehat{A}y$, έτσι ο θησαυρός βρίσκεται στο σημείο τομής Ζ των Αδ και μ.



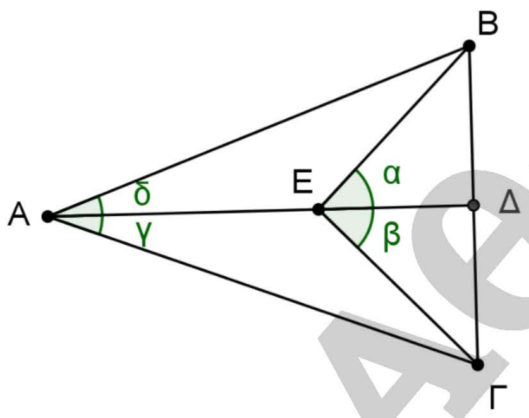
ΘΕΜΑ 2

Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ. (Μονάδες 9)



2 Α

ΛΥΣΗ

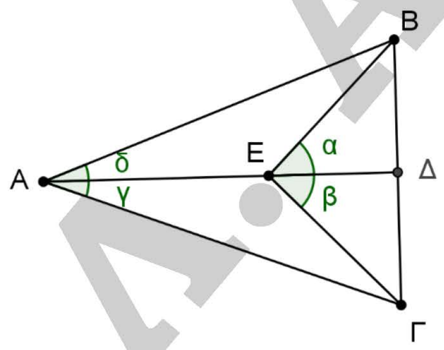
α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ έχουν:

- ΑΕ κοινή πλευρά,
- $\hat{\delta} = \hat{\gamma}$, από υπόθεση
- ΑΒ = ΑΓ, από υπόθεση.

Οπότε τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ), άρα θα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα, απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\delta}$ και $\hat{\gamma}$ θα βρίσκονται ίσες πλευρές, δηλαδή ΕΒ = ΕΓ οπότε το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές.

γ) Είναι ΑΒ = ΑΓ (από υπόθεση), δηλαδή το Α ισαπέχει από τα Β και Γ οπότε βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΒΓ. Ισχύει ακόμη ΕΒ = ΕΓ (από το β) ερώτημα), οπότε το Ε ισαπέχει από τα Β, Γ άρα βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΒΓ. Επειδή τα Α, Ε βρίσκονται στη μεσοκάθετο του ΒΓ, και τα Α, Ε είναι σημεία της ΑΔ, άρα η ΑΔ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.



4

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 8)

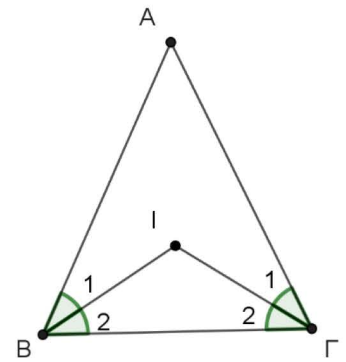
β) οι γωνίες $A\hat{I}\Gamma$ και $A\hat{I}B$ είναι ίσες, (Μονάδες 10)

γ) η ευθεία ΑΙ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ. (Μονάδες 7)

4 Α

ΛΥΣΗ

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του Β και Γ.



α) Αφού είναι ΒΙ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{B}}$ και ΓΙ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Gamma}$ τότε θα είναι

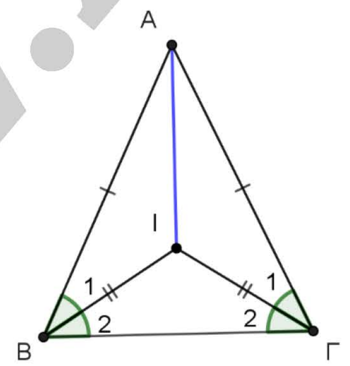
$\widehat{\mathrm{B}}_2 = \frac{\widehat{\mathrm{B}}}{2}$ (1) και $\widehat{\Gamma}_2 = \frac{\widehat{\Gamma}}{2}$ (2), αντίστοιχα.

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ οι προσκείμενες στη βάση του γωνίες είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$ (3)

Λόγω των σχέσεων (1), (2) και (3) θα είναι: $\widehat{\mathrm{B}}_2 = \frac{\widehat{\mathrm{B}}}{2} = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = \widehat{\Gamma}_2$

Άρα, το τρίγωνο ΒΙΓ έχει δύο προσκείμενες στην πλευρά του ΒΓ γωνίες ίσες, τις $\widehat{\mathrm{B}}_2$ και $\widehat{\Gamma}_2$, οπότε θα είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά του ΒΓ.

β) Φέρνουμε το τμήμα ΑΙ.



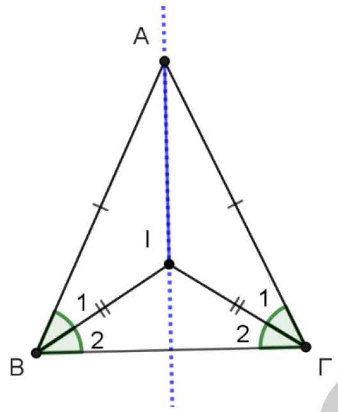
Τα τρίγωνα ΑΙΒ και ΑΙΓ έχουν:

- ΑΒ = ΑΓ ως πλευρές του ισοσκελούς ΑΒΓ της υπόθεσης.
- ΒΙ = ΙΓ, ως ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΒΙΓ του α) ερωτήματος.
- $\widehat{\mathrm{B}}_1 = \frac{\widehat{\mathrm{B}}}{2} = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = \widehat{\Gamma}_1$ αφού ΒΙ και ΓΙ είναι διχοτόμοι των ίσων γωνιών της βάσης ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΒΙΓ του α) ερωτήματος.

4 Α συνέχεια

Συνεπώς τα τρίγωνα ΑΙΒ και ΑΙΓ είναι ίσα γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ), οπότε έχουν και $A\hat{I}B = A\hat{I}\Gamma$ ως γωνίες απέναντι από ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

γ)



Επειδή ΑΒ = ΑΓ από υπόθεση και ΒΙ = ΙΓ από α) ερώτημα, τα σημεία Ι και Α ισαπέχουν από τα Β και Γ άρα είναι σημεία της μεσοκαθέτου του τμήματος ΒΓ.

Άρα η ΑΙ είναι μεσοκάθετος του ΒΓ.