Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

2

ΘΕΜΑ 4

Έστω ΑΒΓ τρίγωνο και τα ύψη του ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ, τότε τα ύψη ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση **Π** αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε την **αντίστροφη** πρόταση της ***Π*** και να αποδείξετε ότι ισχύει.

(Μονάδες 10)

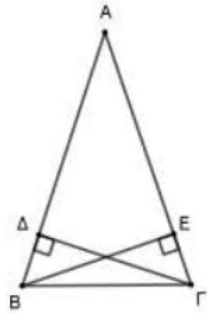
γ) Να διατυπώσετε την πρόταση **Π** και την **αντίστροφή της** ως ενιαία πρόταση.

(Μονάδες 5)

2 Α

ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.



α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ έχουν:

- $\widehat{\Delta} = \widehat{\mathrm{E}} = 90^{o}$ αφού ΓΔ, ΒΕ ύψη.
- ΒΓ κοινή πλευρά
- $\Delta\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{E}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}$, γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Επομένως θα είναι ίσες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\Delta\widehat{\mathrm{B}}\Gamma$ και $\mathrm{E}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}$ αντίστοιχα. Δηλαδή ΒΕ=ΓΔ.

β) Αντίστροφη πρόταση: Αν δύο ύψη ενός τριγώνου είναι ίσα, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ίσες τις πλευρές στις οποίες αντιστοιχούν τα ύψη αυτά.

Απόδειξη

Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ έχουν:

- $\widehat{\Delta} = \widehat{\mathrm{E}} = 90^{o}$ αφού ΓΔ, ΒΕ ύψη.
- ΒΓ κοινή πλευρά
- ΒΕ=ΓΔ (υπόθεση)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Οπότε θα έχουν ίσες και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ και ΓΔ αντίστοιχα. Δηλαδή $\Delta\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{E}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}$ ή $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο γωνίες ίσες, είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ.

γ) Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

3

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

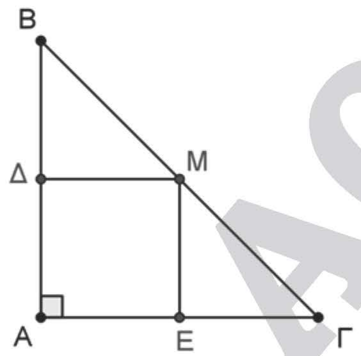
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν είναι ΜΔ = ΜΕ, τότε:

i. τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα, (Μονάδες 8)

ii. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

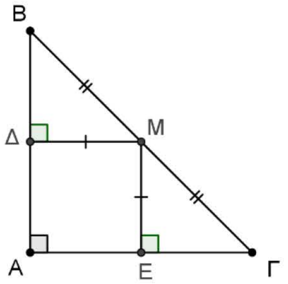
β) Αν είναι ΑΒ = ΑΓ, τότε ΜΔ = ΜΕ. (Μονάδες 8)



3 A

ΛΥΣΗ

α)



i. Τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ορθογώνια αφού τα ΜΔ, ΜΕ είναι κάθετα τμήματα στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα από τα δεδομένα.

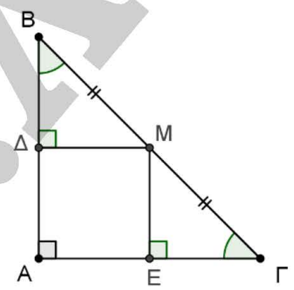
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν:

- ΜΔ = ΜΕ
- ΜΒ = ΜΓ, διότι Μ μέσο της ΒΓ.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα γιατί έχουν δυο ομόλογες πλευρές ίσες μία προς μία.

ii. Από τα ίσα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ προκύπτει ότι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, διότι είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές τους ΜΔ και ΜΕ αντίστοιχα. Άρα το ΑΒΓ είναι ισοσκελές τρίγωνο.

β) Από την υπόθεση έχουμε ΑΒ = ΑΓ, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν:

- ΜΒ = ΜΓ, διότι Μ μέσο της ΒΓ από τα δεδομένα
- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, ως προσκείμενες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ

Άρα τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, οπότε ισχύει ΜΔ = ΜΕ ως απέναντι πλευρές στις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$.

4

ΘΕΜΑ 2

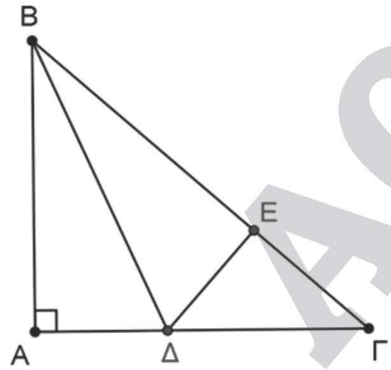
Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\widehat{A}$ και η γωνία $\widehat{\Gamma}$ είναι μικρότερη της γωνίας $\widehat{B}$. Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$ και η ΔΕ είναι κάθετη στην ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ=ΔΕ, (Μονάδες 8)

β) ΑΔ < ΔΓ, (Μονάδες 9)

γ) ΑΓ>ΑΒ. (Μονάδες 8)



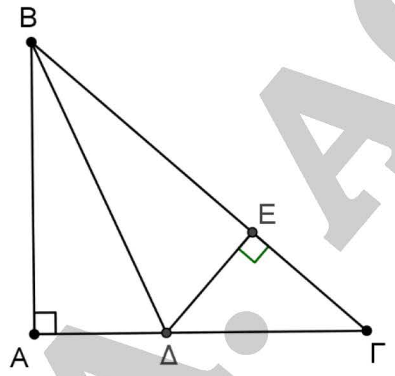
4 Α

ΛΥΣΗ

α) Το σημείο Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας Β άρα ισαπέχει από τις πλευρές ΒΑ, ΒΓ της γωνίας αυτής. Επειδή είναι ΑΔ ⊥ ΑΒ αφού η γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$ είναι ορθή (από υπόθεση) και ΔΕ ⊥ ΒΓ (από υπόθεση), τότε τα ΑΔ και ΔΕ είναι οι αποστάσεις του σημείου Δ από τις πλευρές ΒΑ και ΒΓ της γωνίας Β αντίστοιχα, άρα ΑΔ = ΔΕ.

β) Αφού η ΔΕ είναι κάθετη στην ΒΓ (από υπόθεση) το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{\mathrm{E}}$ και η πλευρά ΔΓ είναι πλευρά απέναντι από την ορθή γωνία $\hat{\mathrm{E}}$, άρα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου. Οπότε ΔΕ < ΔΓ και επειδή ΔΕ = ΑΔ από το α) ερώτημα, προκύπτει ότι ΑΔ < ΔΓ.

γ) Γνωρίζουμε ότι σ' ένα τρίγωνο απέναντι από άνισες γωνίες βρίσκονται ομοίως άνισες πλευρές. Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\widehat{\Gamma} < \widehat{\mathrm{B}}$ από υπόθεση οπότε ΑΒ < ΑΓ.



5

ΘΕΜΑ 2

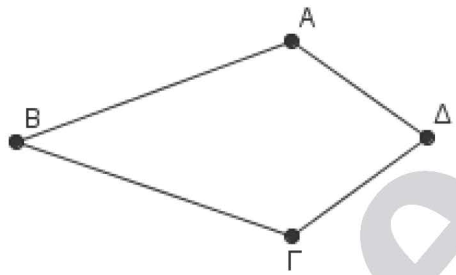
Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\mathrm{BA} = \mathrm{B\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\Gamma}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$, (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 10)

γ) η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 7)

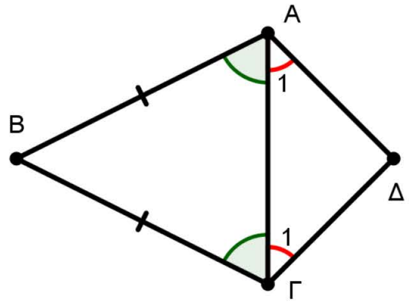


5 Α

ΛΥΣΗ

α) Φέρουμε το τμήμα ΑΓ.

Είναι ΒΑ = ΒΓ από τα δεδομένα, οπότε το τρίγωνο ΒΑΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, άρα $B\widehat{A}\Gamma = B\widehat{\Gamma}A$ ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του.

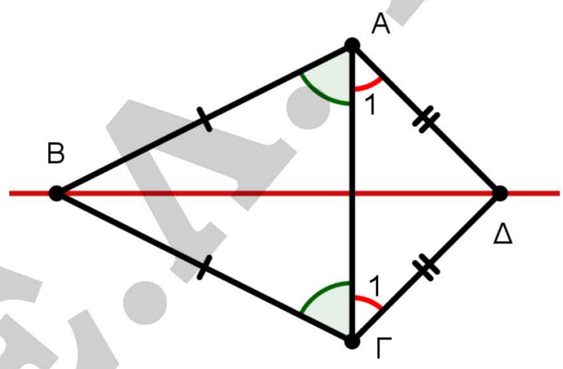


β) Από τα δεδομένα έχουμε ότι $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$ ή $B\widehat{A}\Delta = B\widehat{\Gamma}\Delta$ (1) και $B\widehat{A}\Gamma = B\widehat{\Gamma}A$ (2) από το α) ερώτημα.

Αφαιρούμε τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε $B\widehat{A}\Delta - B\widehat{A}\Gamma = B\widehat{\Gamma}\Delta - B\widehat{\Gamma}A$,

οπότε $\widehat{A}_1 = \widehat{\Delta}_1$. Άρα το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ.

γ)



Είναι ΒΑ = ΒΓ από τα δεδομένα και ΔΑ = ΔΓ, επειδή το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές από β) ερώτημα, οπότε τα σημεία Β και Δ ισαπέχουν από τα σημαία Α και Γ.

Άρα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ.

10

ΘΕΜΑ 3

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) παίρνουμε στην πλευρά ΑΒ σημείο Δ, ώστε ΔΒ = 2ΑΔ, και στην πλευρά ΑΓ σημείο Ε, ώστε ΕΓ= 2ΑΕ. Το Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τμήματα ΔΒ και ΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

ii. Το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

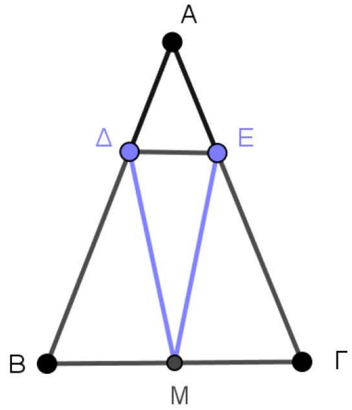
β) Αν Ρ το σημείο τομής των τμημάτων ΒΕ και ΓΔ να δείξετε ότι:

i. Οι γωνίες $\Gamma\widehat{B}E$ και $B\widehat{\Gamma}\Delta$ είναι ίσες. (Μονάδες 6)

ii. Το τμήμα ΡΜ διχοτομεί τη γωνία $B\widehat{P}\Gamma$. (Μονάδες 7)

10 Α

α) Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Μ το μέσο της πλευράς του ΒΓ.



i. Στην πλευρά ΑΔ θεωρούμε σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΔΒ = 2 ΑΔ. Το σημείο Δ χωρίζει την πλευρά ΑΒ σε δυο τμήματα, από τα οποία το ένα είναι διπλάσιο του άλλου. Συνεπώς το τμήμα ΑΔ είναι ίσο με $\frac{1}{3}$ της ΑΒ. Αντίστοιχα και στην πλευρά ΑΓ ισχύει ότι το ΑΕ είναι ίσο με $\frac{1}{3}$ της ΑΓ. Για τα τμήματα ΔΒ και ΕΓ ισχύει ότι ΔΒ = $\frac{2}{3}$ ΑΒ και ΕΓ $= \frac{2}{3}$ ΑΓ, και αφού ΑΒ = ΑΓ θα ισχύει και ότι ΔΒ = ΕΓ.

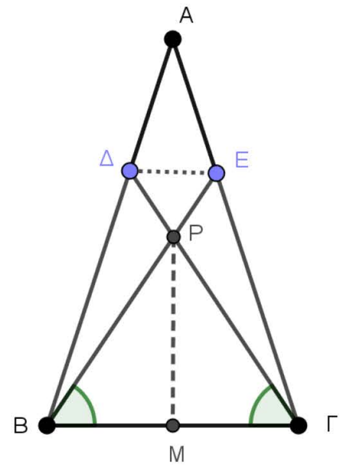
ii. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ. Έχουν:

- ΒΜ = ΜΓ αφού το Μ είναι μέσο της ΒΓ
- ΔΒ = ΕΓ όπως αποδείξαμε στο ερώτημα α)
- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ επειδή είναι οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν τις δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα. Συνεπώς οι πλευρές τους ΜΔ και ΜΕ θα είναι ίσες αφού είναι οι τρίτες πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$.

Στο τρίγωνο ΜΔΕ οι δυο πλευρές του είναι ίσες , οπότε αυτό είναι ισοσκελές.

β) Φέρω τα τμήματα ΒΕ και ΓΔ και έστω Ρ το σημείο τομής τους.



i. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΓΒΕ και ΒΓΔ. Έχουν:

- ΕΓ = ΔΒ από το ερώτημα α)
- ΒΓ κοινή πλευρά
- $E\hat{\Gamma}B = \Delta\hat{B}\Gamma$ ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε οι γωνίες $\Gamma\hat{B}E$ και $B\hat{\Gamma}\Delta$ που είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΕΓ και ΔΒ, είναι ίσες.

ii. Στο τρίγωνο ΡΒΓ οι δύο γωνίες του $\Gamma\hat{B}P$ και $B\hat{\Gamma}P$ είναι ίσες, από το προηγούμενο ερώτημα, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ. Το ΡΜ είναι διάμεσος προς τη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΡΒΓ οπότε είναι και διχοτόμος της γωνίας $B\hat{P}\Gamma$.