

Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

1

ΘΕΜΑ 2

Στο ακόλουθο σχήμα, η AD είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και το E είναι σημείο στην προέκταση της AD , ώστε $DE=AD$.

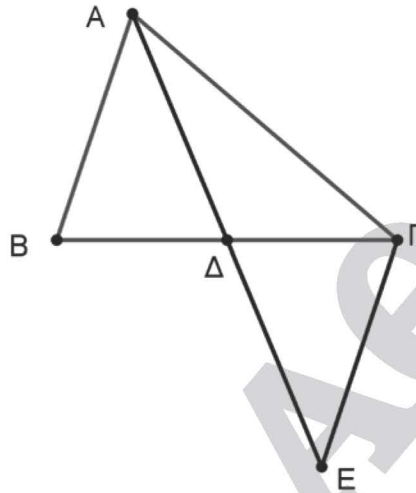
Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = \Gamma E$,

(Μονάδες 12)

β) $AE < AB + A\Gamma$.

(Μονάδες 13)



1 Α

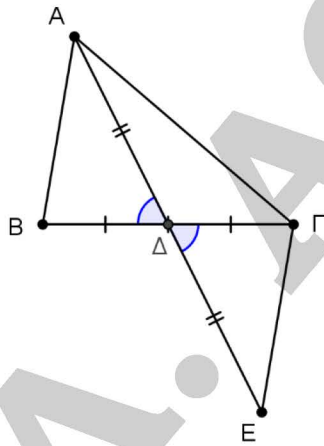
ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ έχουν:

- $A\Delta = \Delta E$, από υπόθεση
- $B\Delta = \Delta\Gamma$, διότι Δ μέσο της $B\Gamma$ αφού $A\Delta$ διάμεσος από την υπόθεση
- $\widehat{A\Delta B} = \widehat{E\Delta\Gamma}$, ως κατακορυφήν γωνίες

Οπότε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, οπότε και $AB = \Gamma E$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A\Delta B}$ και $\widehat{E\Delta\Gamma}$ αντίστοιχα.

β) Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $A\Gamma E$, έχουμε $AE < \Gamma E + A\Gamma$ και λόγω του ότι $AB = \Gamma E$ θα είναι $AE < AB + A\Gamma$.



3

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο N του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B , τέτοια ώστε $NA=NB$. Οι OA και OB τέμνουν τον κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα.

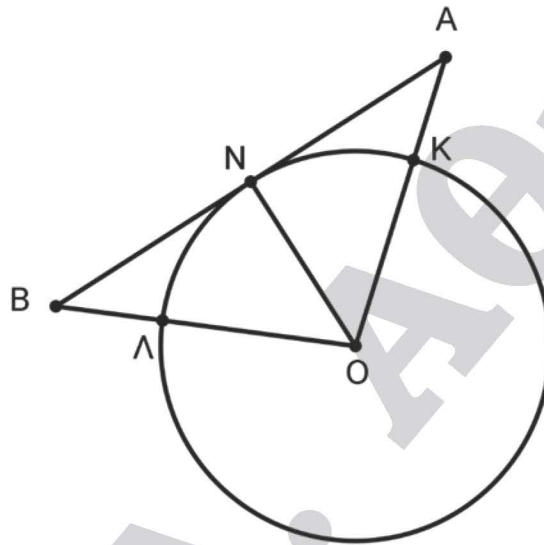
Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 13)

β) το σημείο N είναι μέσο του τόξου $K\Lambda$.

(Μονάδες 12)



3 A

ΛΥΣΗ

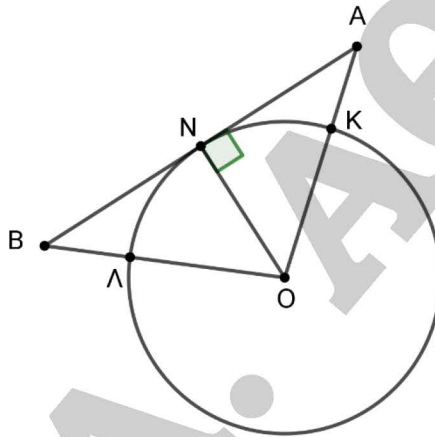
α) Στο τρίγωνο OAB , το τμήμα ON είναι:

- ύψος στην πλευρά AB , επειδή η ON ως ακτίνα που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής του κύκλου με την εφαπτομένη είναι κάθετη σε αυτήν.
- διάμεσος στην πλευρά AB , επειδή $NA = NB$ από τα δεδομένα.

Συνεπώς, το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές με βάση AB .

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο OAB η ON ως διάμεσος θα είναι και διχοτόμος της γωνίας $\widehat{O}$, οπότε $\widehat{AON} = \widehat{BON}$, άρα και $\widehat{KON} = \widehat{LON}$.

Επειδή οι επίκεντρες γωνίες $\widehat{KON}$ και $\widehat{LON}$ είναι ίσες, θα είναι και τα αντίστοιχα τόξα τους ίσα, δηλαδή τα τόξα KN και LN . Άρα το N είναι μέσο του τόξου KL .



3

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 6$. Έστω d η απόσταση του κέντρου O του κύκλου από μια ευθεία (ε) . Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ε) στις εξής περιπτώσεις:

α) $d = 3$.

(Μονάδες 9)

β) $d = 6$.

(Μονάδες 8)

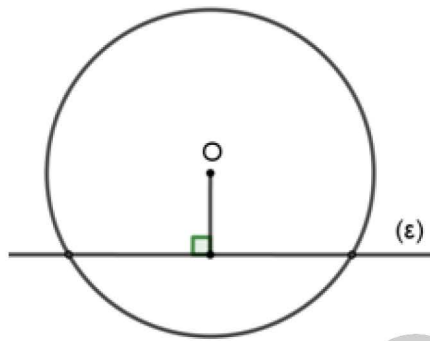
γ) $d = 9$.

(Μονάδες 8)

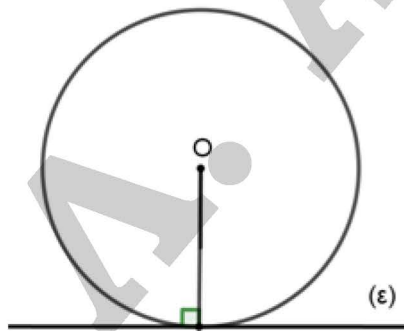
4 Α

ΛΥΣΗ

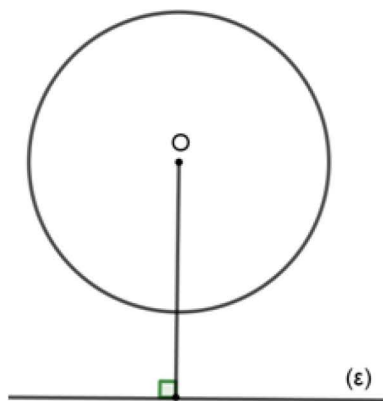
α) Επειδή η απόσταση $d = 3$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μικρότερη από την ακτίνα $\rho = 6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι τέμνουσα του κύκλου.



β) Επειδή η απόσταση $d = 6$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι ίση με την ακτίνα $\rho = 6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, δηλαδή είναι εφαπτόμενη του κύκλου.



γ) Επειδή η απόσταση $d = 9$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα $\rho = 6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι εξωτερική του κύκλου.



5

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος (O, ρ) και ένα εξωτερικό του σημείο A . Από το A φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και AG του κύκλου και έστω E και Δ τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα.

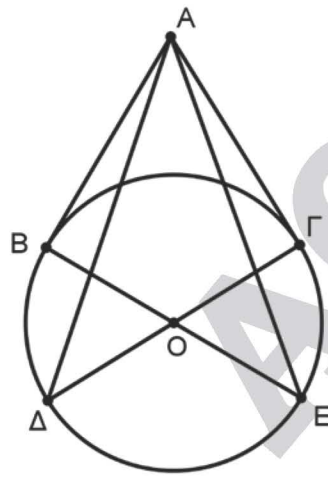
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ABE και $AG\Delta$ είναι ίσα,

(Μονάδες 13)

β) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και AGE είναι ίσα.

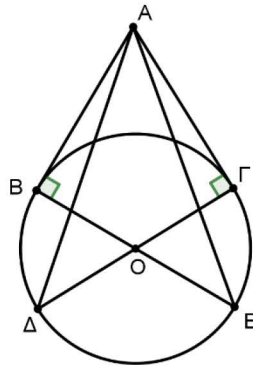
(Μονάδες 12)



5 A

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\widehat{ABE} = \widehat{A\Gamma\Delta} = 90^\circ$, επειδή οι ακτίνες OB και OG που καταλήγουν στα σημεία επαφής B και Γ αντίστοιχα είναι κάθετες στις αντίστοιχες εφαπτομένες AB και $A\Gamma$.

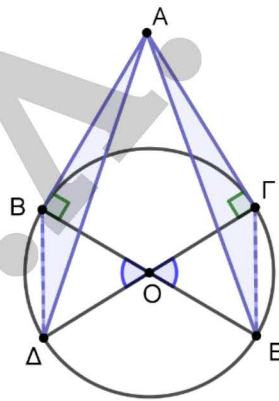


Τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνια και έχουν:

- $AB = A\Gamma$, ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν
- $BE = \Gamma\Delta = 2\rho$

Άρα τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα, γιατί ως ορθογώνια έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

β) Φέρουμε τα τμήματα ΔB και $E\Gamma$.



Είναι $\widehat{BOD} = \widehat{GOE}$ ως κατακορυφήν γωνίες. Οι ίσες γωνίες $\widehat{BOD}$ και $\widehat{GOE}$ είναι και επίκεντρες, οπότε και τα αντίστοιχα τόξα τους θα είναι ίσα, δηλαδή $\widehat{DB} = \widehat{E\Gamma}$, άρα και οι αντίστοιχες χορδές τους θα είναι ίσες, δηλαδή $\Delta B = E\Gamma$ (1).

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABD και AGE , τα οποία έχουν:

- $AB = A\Gamma$, ως εφαπτόμενα τμήματα
- $AD = AE$, ως υποτεινουσες των ίσων τριγώνων ABE και $A\Gamma\Delta$ του α) ερωτήματος
- $\Delta B = E\Gamma$, από σχέση (1)

Οπότε τα τρίγωνα ABD και AGE είναι ίσα, γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (ΠΠΠ).

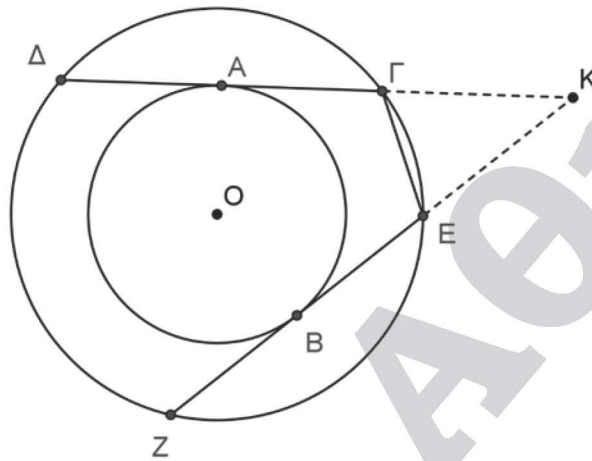
6

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE του κύκλου (O, R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$. (Μονάδες 12)

β) Αν οι $\Delta\Gamma$ και ZE προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΚΕΓ$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)



6 A

ΛΥΣΗ

α) Φέρουμε τις ακτίνες OA και OB του κύκλου (O, ρ) που καταλήγουν στα σημεία επαφής A και B με τις εφαπτομένες $\Delta\Gamma$ και ZE αντίστοιχα. Τότε $OA \perp \Gamma\Delta$ και $OB \perp EZ$.

Τα OA, OB είναι αποστήματα των χορδών $\Delta\Gamma$ και ZE αντίστοιχα στον κύκλο (O, R) και είναι ίσα αφού $OA = OB = \rho$. Άρα και οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE είναι ίσες.

β) Είναι $KA = KB$ (1) ως εφαπτόμενα τμήματα από το K προς τον κύκλο (O, ρ) . Επειδή τα OA και OB είναι αποστήματα των χορδών $\Delta\Gamma$ και ZE αντίστοιχα, τα σημεία A και B είναι μέσα των χορδών και επειδή οι χορδές είναι ίσες και τα μισά τους θα είναι ίσα, δηλαδή $AG = BE$ (2).

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (1), (2), δηλαδή $KA - AG = KB - BE$ οπότε $KG = KE$.

Άρα το τρίγωνο KGE είναι ισοσκελές.

