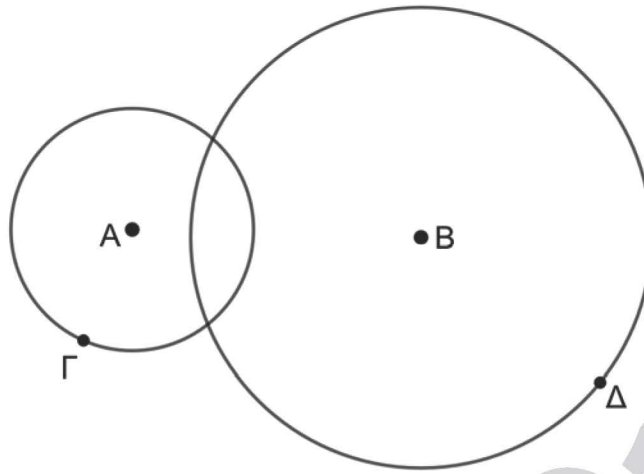


Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

3

ΘΕΜΑ 2

α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$.



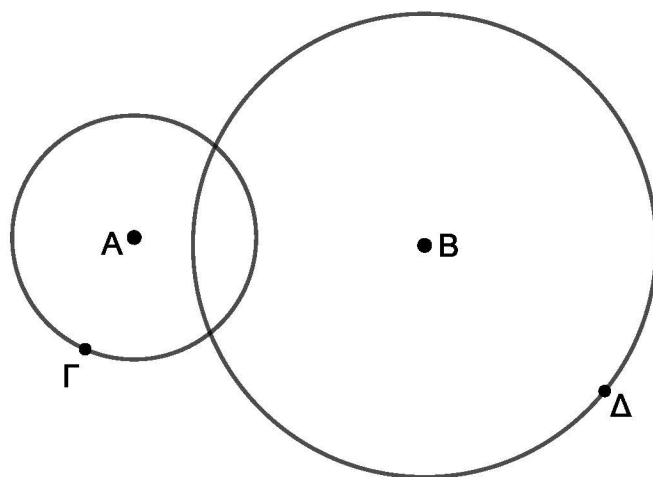
Να αποδείξετε ότι $B\Delta - A\Gamma < AB < A\Gamma + B\Delta$.

(Μονάδες 10)

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 5 από το B του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;

(Μονάδες 15)

3 A

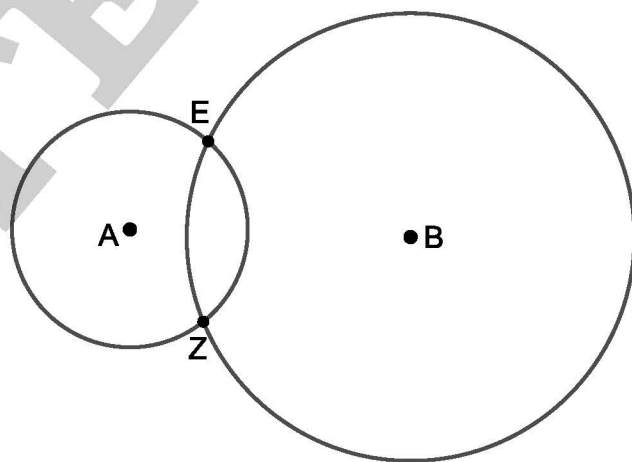


α) Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι.

Άρα ισχύει $R - \rho < \delta < R + \rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το A, R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο B και δ η διάκεντρός τους. Όμως η διάκεντρος είναι η AB και επιπλέον ισχύουν $A\Gamma = \rho$ και $B\Delta = R$. Επομένως $B\Delta - A\Gamma < AB < B\Delta + A\Gamma$.

β) Ο θησαυρός, επειδή απέχει 3 από το A και 5 από το B είναι σε σημείο του κύκλου με κέντρο το A και ακτίνα 3 και σε σημείο του κύκλου με κέντρο το B και ακτίνα 5. Σχεδιάζουμε δύο κύκλους (A, ρ) και (B, R) με $\rho = 3$ και $R = 5$. Τότε η $AB = 6$ είναι η διάκεντρος του κύκλου και ισχύει $R - \rho < AB < R + \rho$ γιατί αντικαθιστώντας έχουμε $5 - 3 < 6 < 5 + 3$, που είναι αληθές.

Επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι δηλαδή έχουν δύο κοινά σημεία τα E και Z. Αυτά τα σημεία έχουν την ιδιότητα να απέχουν 3 από το A και 5 από το B, άρα είναι τα σημεία που μπορεί να κρύβεται ο θησαυρός.



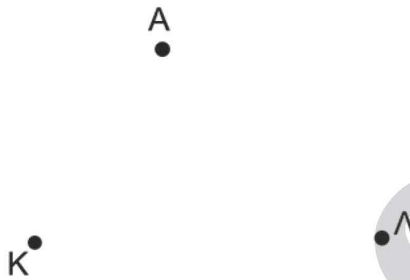
4

ΘΕΜΑ 2

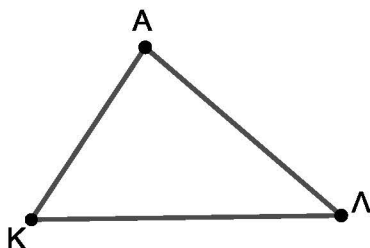
Τα σημεία Α, Κ και Λ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο Α απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.

α) Να αποδείξετε ότι $1 < ΚΛ < 9$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ένα σημείο Β του επιπέδου διαφορετικό από το Α, που να απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ. (Μονάδες 13)



4 A

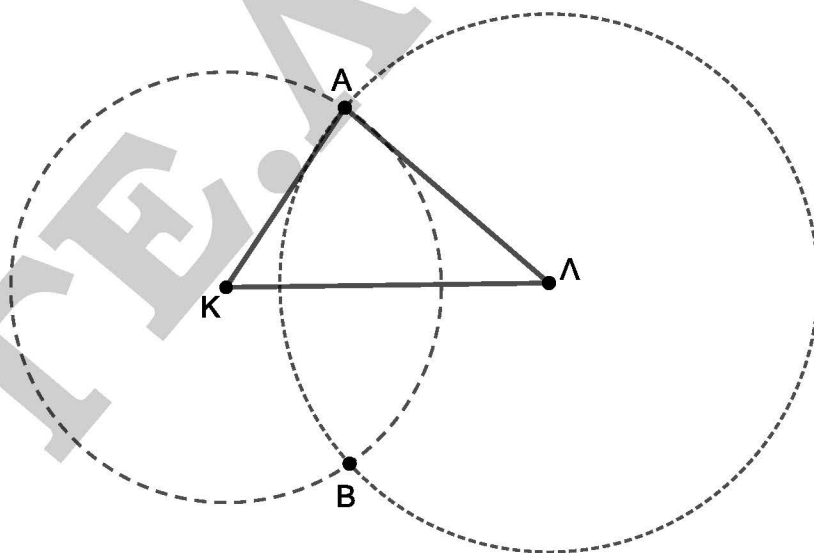


α) Τα τρία μη συνευθειακά σημεία A, K και Λ ορίζουν το τρίγωνο AKΛ. Λόγω της τριγωνικής ανισότητας ισχύει ότι $AK - KL < AL < AK + KL$.

Άρα $5 - 4 < KL < 5 + 4$ ή $1 < KL < 9$.

β) Το ζητούμενο σημείο είναι σημείο του κύκλου (K, 4) και του κύκλου (Λ, 5). Σχεδιάζουμε δύο κύκλους: ο ένας έχει κέντρο το K και ακτίνα 4 και ο άλλος έχει κέντρο το Λ και ακτίνα 5. Από το α) ερώτημα για τη διάκεντρο των κύκλων έχουμε ότι:

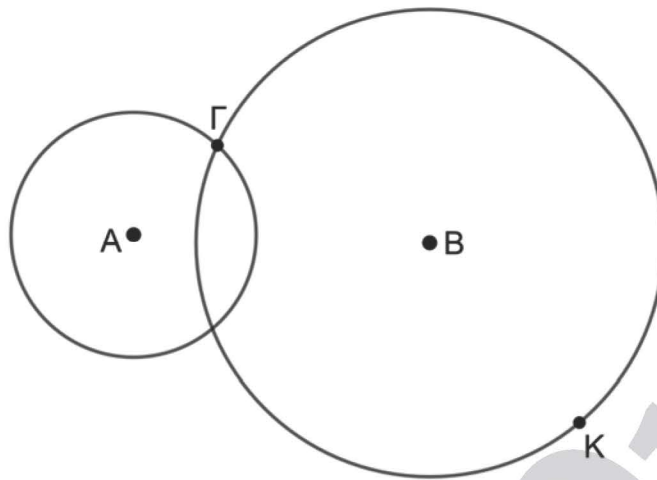
$AK - KL < AL < AK + KL$ ή $R - r < KL < R + r$, όπου R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Λ και r είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το K. Άρα οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία. Το ένα είναι το A και το άλλο είναι το B, που είναι και το ζητούμενο σημείο.



5

ΘΕΜΑ 4

α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$ και $AB = 6$.



i. Να αποδείξετε ότι $BK - A\Gamma < AB < BK + A\Gamma$.

ii. Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2. Ποιο σημείο από τα K και Γ έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;

Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει R από το B.»

Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει ρ από το A.»

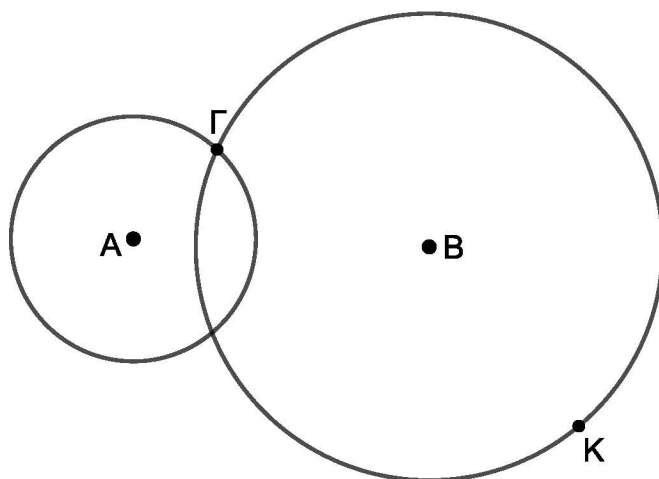
Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 16)

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 2 από το B του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό;

(Μονάδες 9)

5 A

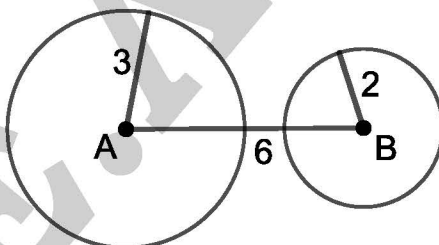


α) i. Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι.

Άρα ισχύει $R - \rho < \delta < R + \rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το A, R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο B και δ η διάκεντρός τους. Όμως η διάκεντρος είναι η AB και επίσης $\rho = A\Gamma$ και $R = BK$. Επομένως $BK - A\Gamma < AB < BK + A\Gamma$.

ii. Το σημείο K έχει μόνο την ιδιότητα 1, γιατί είναι σημείο του κύκλου (B, R) και όχι του κύκλου (A, ρ). Το σημείο Γ έχει και τις δύο ιδιότητες γιατί είναι σημείο και των δύο κύκλων, δηλαδή απέχει ρ από το A και R από το B.

β) Έστω A και B τα δύο σημεία του χάρτη.



Σύμφωνα με την οδηγία το σημείο του θησαυρού ανήκει σε ένα κύκλο κέντρου A και ακτίνας 3 και σε κύκλο κέντρου B και ακτίνας 2. Επειδή απέχει 3 από το A και 2 από το B θα είναι το σημείο τομής των δύο αυτών κύκλων, αν υπάρχει.

Όμως η απόσταση των σημείων A και B που είναι η διάκεντρος των κύκλων (A,3) και (B,2) είναι 6, δηλαδή είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των ακτίνων τους. Αυτό σημαίνει ότι οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και μάλιστα ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου.

Συνεπώς η οδηγία δεν είναι σωστή, γιατί δεν υπάρχει σημείο του επιπέδου (άρα και του χάρτη) για το οποίο να ισχύει αυτό που περιγράφει η οδηγία.

6

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο κύκλοι $(K,3)$ και $(\Lambda,8)$. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:

α) $K\Lambda = 13$.

(Μονάδες 5)

β) $K\Lambda = 2$.

(Μονάδες 5)

γ) $K\Lambda = 5$.

(Μονάδες 5)

δ) $K\Lambda = 11$.

(Μονάδες 5)

ε) $K\Lambda = 9$.

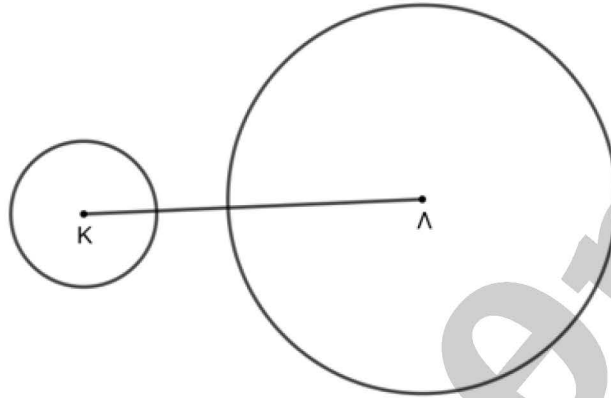
(Μονάδες 5)

6 A

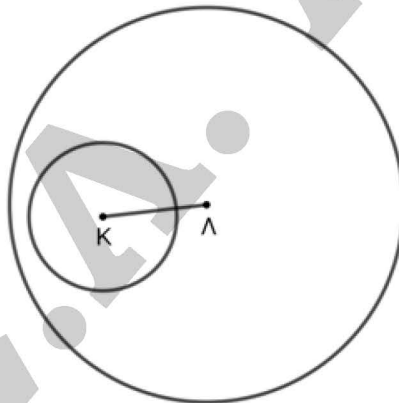
ΛΥΣΗ

Έστω $R = 8$ και $\rho = 3$. Υπολογίζουμε τη διαφορά και το άθροισμα των δύο ακτίνων, δηλαδή $R - \rho = 8 - 3 = 5$ και $R + \rho = 8 + 3 = 11$.

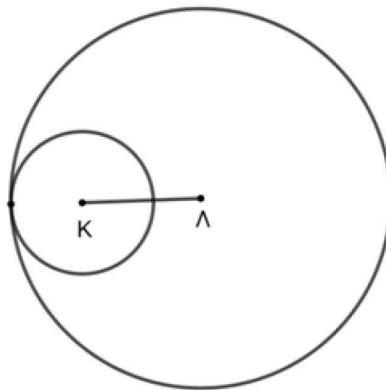
α) Επειδή η διάκεντρος $ΚΛ = 13$ έχει μεγαλύτερο μήκος από το άθροισμα των δύο ακτίνων $R + \rho = 11$, ο κύκλος $(Λ, 8)$ βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου $(Κ, 3)$.



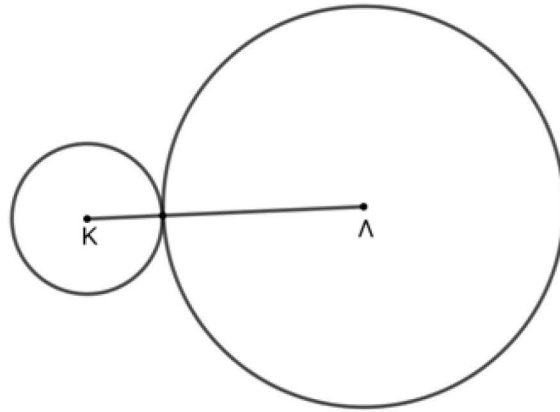
β) Επειδή η διάκεντρος $ΚΛ = 2$ έχει μικρότερο μήκος από τη διαφορά των δύο ακτίνων $R - \rho = 5$, ο κύκλος $(Κ, 3)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(Λ, 8)$.



γ) Επειδή η διάκεντρος $ΚΛ = 5$ έχει ίσο μήκος με τη διαφορά των δύο ακτίνων $R - \rho = 5$, οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.



δ) Επειδή η διάκεντρος $ΚΛ = 11$ έχει ίσο μήκος με το άθροισμα των δύο ακτίνων $R + ρ = 11$, οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.



ε) Επειδή η διάκεντρος $ΚΛ = 9$ έχει μήκος μεταξύ της διαφοράς $R - ρ = 5$ και του αθροίσματος των δύο ακτίνων $R + ρ = 11$, οι κύκλοι τέμνονται.

